

**Obsah**

ÚVOD..... v

1. ELEKTROSTATICKÉ POLE..... 1

2. STÁLÝ PROUD..... 29

3. MAGNETOSTATICKÉ POLE..... 43

4. ELEKTROMAGNETIZMUS ..... 59

5. ČASOVĚ PROMĚNNÉ PROUDY ..... 71

6. ELEKTROMAGNETICKÉ VLNĚNÍ..... 93

Literatura ..... 118

# 1. ELEKTROSTATICKÉ POLE

## Příklad 1.1

D

Jakou silou na sebe působí dva kladné náboje velikosti 1 C vzdálené od sebe 1 m ve vakuu?

**Řešení:** Dva náboje o velikosti  $Q_1$  a  $Q_2$  vzdálené od sebe  $r$  na sebe působí silou, kterou určíme z Coulombova vztahu. (Budeme počítat jen velikost této síly, síla působí ve směru spojnice nábojů a je orientována směrem od druhého náboje, mají-li oba náboje stejnou polaritu nebo ke druhému náboji, mají-li náboje různou polaritu.)

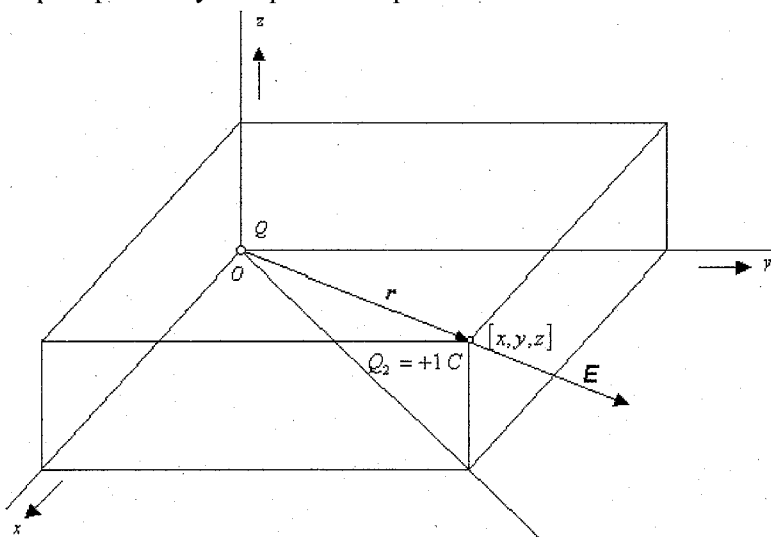
$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1 \cdot 1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2} = 8,988 \cdot 10^9 \text{ [N]}.$$

Náboje se odpuzují silou  $8,988 \cdot 10^9$  N. Je to zhruba síla, kterou Země přitahuje předmět o hmotnosti jednoho milionu tun – např. krychli vody o hraně 100 m. Klidová hmotnost elektronu je  $9,1089 \cdot 10^{-31}$  kg a jeho náboj je  $-1,602 \cdot 10^{-19}$  C, takže náboj o velikosti -1 C by vytvořilo  $1/1,602 \cdot 10^{-19} = 6,2422 \cdot 10^{18}$  elektronů a jejich hmotnost by byla  $6,2422 \cdot 10^{18} \cdot 9,1089 \cdot 10^{-31} = 5,6860 \cdot 10^{-12}$  kg.

## Příklad 1.2

D

V počátku pravouhlé prostorové souřadné soustavy  $Oxyz$  je umístěn náboj o velikosti  $Q$ . Určete intenzitu elektrického pole pro každý bod prostoru s permitivitou  $\epsilon$ .



**Řešení:** Intenzita elektrického pole  $E$  je síla, která by v daném místě prostoru působila na kladný jednotkový náboj. Je tedy dána poměrem síly ku náboji, a má proto fyzikální rozměr N/C (nebo V/m). Stačí tedy vypočítat sílu, která by působila na kladný jednotkový náboj umístěný do bodu se souřadnicemi  $[x, y, z]$ .

Podle Coulombova zákona působí na náboj  $Q_2$  vzdálený  $r$  od náboje  $Q$  síla o velikosti

$$F = \frac{Q Q_2}{4\pi\epsilon r^2},$$

takže velikost intenzity elektrického pole vytvářená nábojem  $Q$  je

$$E = \frac{F}{Q_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Tato síla působí směrem od náboje  $Q$ , je-li polarita obou nábojů shodná a k náboji  $Q$ , je-li polarita nábojů  $Q$  a  $Q_2$  rozdílná.

V našem případě předpokládáme  $Q_2 = +1$  C, bude-li  $Q$  kladný, bude síla (intenzita elektrického pole  $E$ ) působit ve směru spojnice  $Q - Q_2$  směrem od náboje  $Q$ , bude-li  $Q$  záporný, bude síla (intenzita elektrického pole) působit směrem k náboji  $Q$ .

## 1. Elektrostatické pole

Pro určení velikosti intenzity potřebujeme ještě vzdálenost  $r$ . Je to vzdálenost daného bodu  $[x,y,z]$  prostoru od počátku. Platí

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Proto velikost intenzity elektrického pole vytvářeného nábojem  $Q$  umístěným do počátku souřadnic je v místě prostoru  $[x,y,z]$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

V mnoha případech může být pro nás důležité určit intenzitu elektrického pole ne jen velikostí a slovním doprovodem, jak je to s jejím směrem a orientací. V tom případě je vhodné udat vektor intenzity elektrického pole jeho třemi souřadnicemi (průměty na osy  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

Jak vidíme z obrázku, je vektor  $E$  násobkem vektoru  $r$  s počátečním bodem v počátku souřadnic a koncovým bodem v místě  $[x,y,z]$ , kde určujeme intenzitu pole  $E$ . Proto poměr velikosti vektoru intenzity elektrického pole  $E$  k velikosti vektoru  $r$  musí být stejný jako poměr složek vektoru intenzity elektrického pole  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  ku odpovídajícím složkám  $x$ ,  $y$  a  $z$  vektoru  $r$ .

$$\frac{E}{|r|} = \frac{E_x}{x} = \frac{E_y}{y} = \frac{E_z}{z},$$

odtud

$$E_x = E \frac{x}{|r|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$E_y = E \frac{y}{|r|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$E_z = E \frac{z}{|r|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$E = x^0 E_x + y^0 E_y + z^0 E_z.$$

Vektor intenzity elektrického pole můžeme určit také podle vztahu  $E = E r^0$ , kde  $r^0$  je jednotkový vektor rovnoběžný s  $r$  a se stejnou orientací jako  $r$ . Násobením jednotkovým vektorem  $r^0$  vytvoříme vektor velikosti  $E$  orientovaný shodně s vektorem  $r$ , což je právě hledaný vektor. Jednotkový vektor  $r^0$  se od vektoru  $r$  liší jen tím, že jeho velikost je jednotková, tedy  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  krát menší. Ve stejném poměru jsou proto menší i jeho souřadnice. Je proto

$$r^0 = x^0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y^0 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z^0 \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

a násobíme-li tento jednotkový vektor velikostí intenzity elektrického pole  $E$  obdržíme vektor intenzity elektrického pole  $E$ .

### Příklad 1.3

C

V prostoru s pravouhlou souřadnou soustavou  $Oxyz$  a permitivitou  $\epsilon$  jsou v místech  $[0,a,0]$  a  $[0,-a,0]$  umístěny dva náboje o velikosti  $Q_1$  a  $Q_2$ . Určete intenzitu elektrického pole vyvolaného náboji  $Q_1$  a  $Q_2$  v každém bodě prostoru.

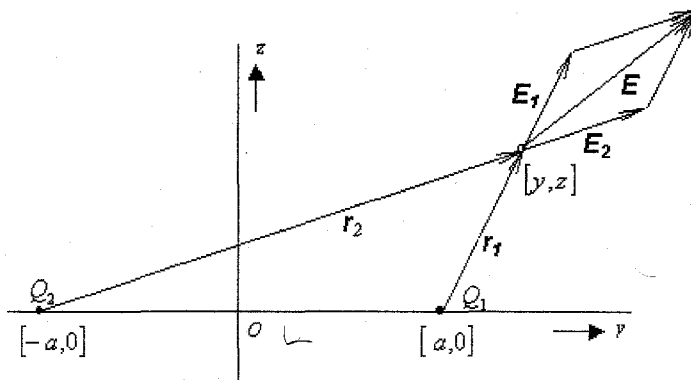
**Řešení:** Rozmístění nábojů v prostoru ukazuje obrázek (osa  $x$  je kolmá na osy  $y$  a  $z$  a tyto osy tvoří pravotočivou souřadnou soustavu, tzn. že pozorujeme-li osy  $y$  a  $z$  z koncového bodu osy  $x$ , pak přechod od osy  $y$  k  $z$  je proti smyslu otáčení hodinových ručiček, nebo-li osy  $x$ ,  $y$  a  $z$  mají směr palce, ukazováčku a prostředníčku pravé ruky). Z rozmístění nábojů je zřejmé, že elektrické pole bude rotačně symetrické okolo osy  $y$ . Intenzita elektrického pole v rovině  $Oyz$  bude mít složku ve směru osy  $x$  nulovou. Najdeme-li intenzitu elektrického pole v rovině  $Oyz$ , potom rotací této roviny okolo osy  $y$  jsme schopni nalézt

# 1. Elektrostatické pole

intenzitu elektrického pole v kterémkoliv místě prostoru. Povšimněme si, že postačuje nalézt intenzitu elektrického pole jen v polovině roviny  $Oyz$ , v níž  $z \geq 0$ . Elektrické pole je symetrické okolo osy  $y$ . Každý z nábojů  $Q_1$ ,  $Q_2$  přispívá k výslednému elektrickému poli složkou, kterou určíme podle Coulombova zákona.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1^2} \mathbf{r}_1^0, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r_2^2} \mathbf{r}_2^0.$$

$\mathbf{r}_1^0$  a  $\mathbf{r}_2^0$  jsou jednotkové vektory k vektorům  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$ . Vektor výsledné intenzity elektrického pole je součtem vektorů intenzit elektrického pole vytvářených každým nábojem zvlášť, tzn.



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$  určíme pomocí složek ve směru os  $y$  a  $z$  (složka ve směru osy  $x$  je nulová). Jednotkové vektory můžeme vyjádřit vztahy

$$\mathbf{r}_1^0 = y^0 \frac{y-a}{r_1} + z^0 \frac{z}{r_1}, \quad \mathbf{r}_2^0 = y^0 \frac{y+a}{r_2} + z^0 \frac{z}{r_2},$$

$y^0$  je jednotkový vektor ve směru osy  $y$  a  $z^0$  je jednotkový vektor ve směru osy  $z$ . Velikosti vektorů  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ , tzn.  $r_1$ ,  $r_2$  vyjádříme vztahy

$$r_1 = \sqrt{(y-a)^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(y+a)^2 + z^2}.$$

Dosadíme-li do vztahů pro  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$ , obdržíme

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1^2} \left( y^0 \frac{y-a}{r_1} + z^0 \frac{z}{r_1} \right), \quad \mathbf{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r_2^2} \left( y^0 \frac{y+a}{r_2} + z^0 \frac{z}{r_2} \right),$$

$$\mathbf{E}_1 = E_{1y} + E_{1z} = y^0 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon((y-a)^2 + z^2)} \frac{(y-a)}{\sqrt{(y-a)^2 + z^2}} + z^0 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon((y-a)^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{(y-a)^2 + z^2}}.$$

Podobně určíme  $\mathbf{E}_2$  - výraz je téměř stejný jako pro  $\mathbf{E}_1$  jen namísto  $Q_1$  je  $Q_2$  a namísto  $(y-a)$  je  $(y+a)$  a  $\mathbf{E}$  získáme jako součet  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$ .

Uvažme nyní, jak určit intenzitu elektrického pole v libovolném bodě prostoru  $[x, y, z]$ . V tom případě

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z^2},$$

jednotkové vektory jsou

$$\mathbf{r}_1^0 = x^0 \frac{x}{r_1} + y^0 \frac{y-a}{r_1} + z^0 \frac{z}{r_1}, \quad \mathbf{r}_2^0 = x^0 \frac{x}{r_2} + y^0 \frac{y+a}{r_2} + z^0 \frac{z}{r_2}.$$

Opět postačuje tyto výrazy dosadit do vztahů pro  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  a  $\mathbf{E}$ , abychom našli výslednou intenzitu elektrického pole vytvářeného náboji  $Q_1$  a  $Q_2$  v kterémkoliv místě prostoru.

**námk:** K vektoru  $\mathbf{r}$  se složkami  $x, y, z$ , tzn.  $\mathbf{r} = x\mathbf{x}^0 + y\mathbf{y}^0 + z\mathbf{z}^0$  je rovnoběžný jednotkový vektor

## 1. Elektrostatické pole

$$\mathbf{r}^0 = x^0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y^0 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z^0 \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Že jde o rovnoběžný vektor je zřejmé z toho, že složky jednotkového vektoru jsou násobkem složek vektoru  $\mathbf{r}$ , že jde o jednotkový vektor plyne z toho, že délka vektoru  $\mathbf{r}^0$  je jednotková. (Také orientace jednotkového vektoru  $\mathbf{r}^0$  je shodná s orientací vektoru  $\mathbf{r}$ ).

### Příklad 1.4

Pro bodový náboj o velikosti  $Q = 1 \text{ C}$  umístěný v počátku prostorových souřadnic  $O, x, y, z$  určete intenzitu elektrického pole, elektrickou indukci a potenciál pro každý bod prostoru, průběh siločar a ekvipotenciálních ploch. Permittivita prostředí je  $\epsilon = 2,1\epsilon_0$ ,  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} [\text{Fm}^{-1}]$ .

**Řešení:** Intenzitu elektrického pole vytvářeného nábojem umístěným v počátku je

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \mathbf{r}^0,$$

pro náš případ (tedy  $Q = 1 \text{ C}$ )

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \mathbf{r}^0,$$

kde  $r$  je vzdálenost bodu  $[x, y, z]$  od počátku a  $\mathbf{r}^0$  je jednotkový vektor rovnoběžný s vektorem s počátkem v počátku souřadné soustavy a koncovým bodem v místě  $[x, y, z]$  prostoru.

Protože předpokládáme homogenní a izotropní prostředí, je vektor elektrické indukce

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{r}^0 = \frac{1}{4\pi r^2} \mathbf{r}^0 \quad \text{pro } Q=1\text{C}$$

Potenciál elektrického pole v daném místě vypočítáme jako práci síly intenzity elektrického pole při přemísťování (jednotkového kladného náboje) z místa, kde potenciál určujeme do místa nulového potenciálu.

V našem případě umístíme nulový potenciál do nekonečné vzdálenosti od náboje v počátku. Práci intenzity elektrického pole zjistíme nejlépe při pohybu z místa  $[x, y, z]$ , v němž potenciál určujeme, po přímce spojující počátek a bod  $[x, y, z]$  směrem vzdalujícím se od počátku. Při této volbě dráhy intenzita elektrického pole směřuje rovnoběžně s dráhou pohybu, proto potenciál

$$\varphi(x, y, z) = \int_r^\infty E(r') dr' = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ -\frac{1}{r'} \right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{1}{4\pi\epsilon r} \quad \text{pro } Q=1\text{C}$$

Integrační proměnná je označena  $r'$  pro odlišení od vzdálenosti bodu o souřadnicích  $[x, y, z]$  od počátku souřadnic  $r$ . Potenciál má jednotku J/C, běžně se ale užívá V (volt). Ve všech bodech prostoru  $[x, y, z]$ , které jsou stejně vzdáleny od počátku, je tedy stejný potenciál. Ekvipotenciálními plochami jsou proto kulové plochy se středem v počátku souřadné soustavy (místě, kde je náboj  $Q$ ).

Vypočítejme poloměr kulové plochy, na níž je potenciál roven 1 V.

$$r = \frac{Q}{4\pi\epsilon\varphi} = \frac{1}{4\pi \cdot 2,1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = \frac{10^{12}}{233,28} = 4,287 \cdot 10^9 [\text{m}].$$

Potenciál 1 V vyvolává náboj 1C na kulové ploše s poloměrem 4,3 milionu km! Potenciál 1000 V stejný náboj vyvolá na kulové ploše o poloměru 4300 km, tedy pořád v obrovské vzdálenosti. Potenciál jednoho milionu voltů vyvolá náboj velikosti 1C na kulové ploše o poloměru 4,3 km. Je zřejmé, že náboj 1C je skutečně velký. Protože intenzita elektrického pole i elektrická indukce jsou vektory směřující radiálním směrem od počátku, jsou elektrické siločáry i indukční čáry polopřímky z počátku směřující všemi směry. Siločáry jsou kolmé k ekvipotenciálním plochám.

## 1. Elektrostatické pole

### Příklad 1.5

Elektrické pole sledujeme pouze v rovině  $Oxy$ . Rozložení potenciálu elektrického pole v této rovině je popsáno funkcí  $\varphi(x,y) = 15xy + 10$  [V]. Z potenciálu určete intenzitu elektrického pole v každém bodě roviny. V prvním kvadrantu roviny  $Oxy$  pak určete průběh ekvipotenciál a siločar. Pro bod roviny  $B = [1,2]$  dále vypočítejte potenciál a intenzitu elektrického pole a zakreslete do grafu průběh ekvipotenciál pro 10, 25, 50, 75 a 100 V a průběh několika siločar.

**Řešení:** Průběh ekvipotenciálních ploch najdeme velice snadno. Jsou to místa, která mají stejný potenciál. Hledáme-li plochu s potenciálem  $\varphi_0$ , potom

$$\varphi_0 = 15xy + 10$$

Ze vztahu je zřejmé, že v tomto případě (kdy se pohybujeme pouze v rovině) je ekvipotenciální plochou *křivka*. Tu můžeme vyjádřit jako funkci

$$y = \frac{\varphi_0 - 10}{15x}$$

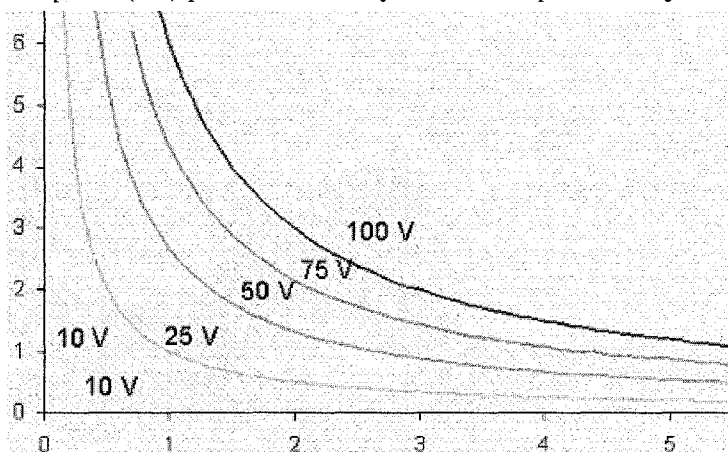
v prvním kvadrantu jsou  $x, y \geq 0$ , proto vyžadujeme  $\varphi_0 \geq 10$  [V].

Ze vztahu je zřejmé, že ekvipotenciály jsou ramena hyperbol v prvním kvadrantu. Ekvipotenciální plochy pro  $\varphi_0 = 10$  V jsou v prvním kvadrantu kladné části os  $x, y$ .

Bod, který leží alespoň na jedné z os, má alespoň jednu souřadnici nulovou a proto má potenciál

$$\varphi = 15 \cdot x \cdot y + 10 = 0 + 10 = 10 \text{ [V]}$$

Průběh ekvipotenciálních ploch (čar) pro několik různých velikostí potenciálu je na obrázku.



Potenciál elektrického pole v bodě  $B = [1,2]$  zjistíme snadno dosazením do  $\varphi(x,y)$

$$\varphi(1,2) = 15 \cdot 1 \cdot 2 + 10 = 40 \text{ [V]}$$

Určení intenzity elektrického pole v bodech  $[x,y]$  roviny je trochu náročnější. Potenciál jsme obecně definovali jako práci intenzity elektrického pole po dráze s počátkem v bodě, v němž potenciál určujeme, do místa (bodu) nulového potenciálu.

$$\varphi(x,y,z) = \int_{A[x,y,z]}^{B_0[x_0,y_0,z_0]} \vec{E} d\vec{l}$$

je bod se souřadnicemi  $[x,y,z]$ , tj. místo, kde určujeme potenciál;  $B$  je bod se souřadnicemi  $[x_0, y_0, z_0]$ , bod s nulovým potenciálem. Integrujeme po nějaké dráze spojující  $A$  s  $B$ . Dejme tomu, že v bodě  $[x,y,z]$  (tedy v bodě prostoru) je potenciál  $\varphi(x,y,z)$ .

U tohoto bodě nechť je intenzita elektrického pole

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{i}E_x(x,y,z) + \vec{j}E_y(x,y,z) + \vec{k}E_z(x,y,z)$$

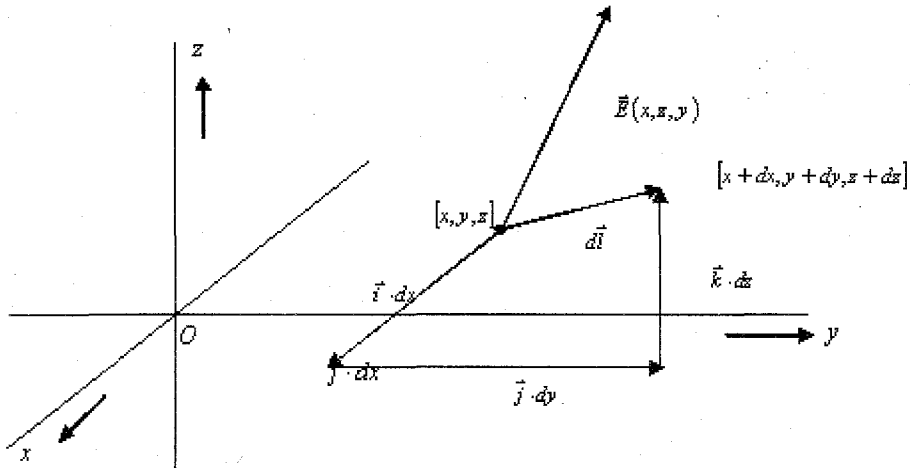
## 1. Elektrostatické pole

Zajímejme se o to, jaký je potenciál v bodě  $[x + dx, y + dy, z + dz]$ , tedy v bodě vzdáleném od původního o  $d\vec{l} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ , viz obrázek.

Vektor  $\vec{E}$  vykoná na dráze  $d\vec{l}$  práci

$$\begin{aligned} dA &= \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{i}E_x(x, y, z) + \vec{j}E_y(x, y, z) + \vec{k}E_z(x, y, z)) \cdot (\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz) = \\ &= E_x(x, y, z) \cdot dx + E_y(x, y, z) \cdot dy + E_z(x, y, z) \cdot dz \end{aligned}$$

(Skalární součin je roven součtu součinů odpovídajících složek obou vektorů)



Jak to vypadá s potenciálem bodu  $[(x + dx), (y + dy), (z + dz)]$ ? Je právě o  $dA$  menší než potenciál v bodě  $(x, y, z)$ , neboť potenciál je definován jako práce intenzity elektrického pole z místa, kde potenciál určujeme, do místa potenciálu nulového.

$$\begin{aligned} \varphi(x + dx, y + dy, z + dz) &= \varphi(x, y, z) - dA = \\ &= \varphi(x, y, z) - (E_x(x, y, z) \cdot dx + E_y(x, y, z) \cdot dy + E_z(x, y, z) \cdot dz) \end{aligned}$$

V prostoru máme určeno potenciální pole vztahem  $\varphi(x, y, z)$ .

V bodě  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  určíme potenciál pomocí diferenciálu

$$\varphi(x + dx, y + dy, z + dz) = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} \cdot dz$$

Porovnáním posledních dvou vztahů

$$E_x(x, y, z) = -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x}$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y}$$

$$E_z(x, y, z) = -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z}$$

čili

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= \vec{i}E_x(x, y, z) + \vec{j}E_y(x, y, z) + \vec{k}E_z(x, y, z) = -\left(\vec{i}\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z}\right) = \\ &= -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \varphi(x, y, z) = -\nabla \cdot \varphi(x, y, z) = -\text{grad} \varphi(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \text{ se nazývá operátor nabra.}$$

## 1. Elektrostatické pole

šém dvojrozměrném případě

$$\vec{E}(x, y) = \vec{i} E_x(x, y) + \vec{j} E_y(x, y) = - \left( \vec{i} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right) = - \left( \vec{i} \frac{\partial (15xy + 10)}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial (15xy + 10)}{\partial y} \right) =$$

$$= -\vec{i} \cdot 15y - \vec{j} \cdot 15x$$

$$E_x(x, y) = -15y$$

$$E_y(x, y) = -15x$$

dě  $B = [1, 2]$  je

$$E_x(1, 2) = -15 \cdot 2 = -30 \text{ [Vm}^{-1}\text{]}$$

$$E_y(1, 2) = -15 \cdot 1 = -15 \text{ [Vm}^{-1}\text{]}$$

ukreslení intenzity elektrického pole do grafu a výpočet absolutní hodnoty této intenzity jsou

mají nás rovnice křivek – siločar. Protože známe intenzitu elektrického pole v každém bodě

$$\frac{y}{x} = \frac{E_y(x, y)}{E_x(x, y)} = \frac{-15x}{-15y} = \frac{x}{y} \quad \text{čili} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

e diferenciální rovnice pro určení čáry  $y = y(x)$ , která splní požadavek na derivaci pro každý svůj

í rovnice  $\frac{dy}{dx} = \frac{E_y(x, y)}{E_x(x, y)}$  nemusí být vždy snadné. V našem konkrétním případě ale dostaneme

$$y dy = x dx \Rightarrow \int y dy = \int x dx + konst_1$$

$$y^2 = x^2 + konst \Rightarrow x^2 - y^2 + konst = 0$$

áme se o řešení v prvním kvadrantu, tam platí  $x, y \geq 0$ . Pro  $konst = 0$  je řešením  $y = x$ , čili osa

bychom chtěli nakreslit siločáru jdoucí bodem  $[x_0, y_0]$ , potom pro  $x = x_0$  a  $y = y_0$  musí platit

$$y_0^2 = x_0^2 + konst \Rightarrow konst = y_0^2 - x_0^2$$

ka má rovnici

$$r^2 = x^2 + (y_0^2 - x_0^2)$$

rovnice siločáry procházející bodem  $[x_0, y_0]$ .

ice

$$r^2 = x^2 + konst$$

nice soustavy rovnoosých hyperbol s osami v osách  $x$  a  $y$  roviny  $Oxy$ . Lze ukázat, že tato soustava

bol (siločar) je soustavou křivek kolmých na soustavu ekvipotenciálních ploch.

ad 1.6

D

počtete úhel mezi dvěma vektory intenzity elektrického pole  $E_1 = 2x^0 + 3y^0 + z^0$  a  $E_2 = x^0 - 6y^0 + z^0$ .

í: Pro skalární součin platí

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_{1x} E_{2x} + E_{1y} E_{2y} + E_{1z} E_{2z} = E_1 E_2 \cos \alpha = -15 \text{ (V/m)}^2$$

o absolutní hodnoty platí

$$|E_1| = (E_{1x}^2 + E_{1y}^2 + E_{1z}^2)^{1/2} = 3,74 \text{ V/m,}$$

$$|E_2| = (E_{2x}^2 + E_{2y}^2 + E_{2z}^2)^{1/2} = 6,16 \text{ V/m.}$$

## 1. Elektrostatické pole

Pro vektorový součin platí

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ E_{1x} & E_{1y} & E_{1z} \\ E_{2x} & E_{2y} & E_{2z} \end{bmatrix} = 9x^0 - y^0 - 15z^0 \text{ (V/m)}^2,$$

$$|\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2| = E_1 E_2 \sin \alpha = 17,52 \text{ (V/m)}^2.$$

Tedy

$$\cos \alpha = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 / (E_1 E_2) = -0,651,$$

$$\sin \alpha = |\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2| / E_1 E_2 = 0,760.$$

$$\text{Proto } \alpha = 130,6^\circ.$$

### Příklad 1.7

C

Vektor  $\mathbf{r}$  směřuje z bodu  $P'(x', y', z')$  do  $P(x, y, z)$ . Určete pro pevný bod  $P$  a pohyblivý bod  $P'$  grad  $(1/r)$  a naopak pro pevný bod  $P'$  a pohyblivý bod  $P$  grad  $(1/r)$ . Určete div  $\mathbf{r}$ .

**Řešení:** Pro pevný bod  $P$  a pohyblivý bod  $P'$  platí

$$\text{grad}'(1/r) = -\frac{\partial}{\partial x} x^0 - \frac{\partial}{\partial y} y^0 - \frac{\partial}{\partial z} z^0 = \frac{x^0}{r^2} + \frac{y^0}{r^2} + \frac{z^0}{r^2} = \frac{\mathbf{r}^0}{r^2},$$

kde  $\mathbf{r}^0$  je jednotkový vektor podle  $\mathbf{r}$ . Pro pevný bod  $P'$  a pohyblivý bod  $P$  platí

$$\text{grad}(1/r) = \frac{\partial}{\partial x} x^0 + \frac{\partial}{\partial y} y^0 + \frac{\partial}{\partial z} z^0 = -\frac{x^0}{r^2} - \frac{y^0}{r^2} - \frac{z^0}{r^2} = -\frac{\mathbf{r}^0}{r^2}$$

Pro div  $\mathbf{r}$  platí

$$\text{div } \mathbf{r} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

### Příklad 1.8

D

V prostoru jsou dány dva vektory intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$  svými absolutními hodnotami (moduly)  $E_1 = 5,5 \text{ V/m}$ ,  $E_2 = 8,1 \text{ V/m}$  a dvěma směrovými kosiny (k ose  $x$  a  $y$ )  $\cos(\mathbf{E}_1, x^0) = 0,30$ ;  $\cos(\mathbf{E}_1, y^0) = 0,37$ ;  $\cos(\mathbf{E}_2, x^0) = 0,82$ ;  $\cos(\mathbf{E}_2, y^0) = 0,11$ .

Určete 1)  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , 2)  $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ , 3) úhel  $\alpha$  mezi  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$ , 4)  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ .

**Řešení:** 1) Abychom mohli sečíst vektory  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$  musíme v prostoru znát všechny tři jejich složky tj.

$E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}$  a  $E_{2x}, E_{2y}, E_{2z}$ . Složky vypočítáme z modulů a směrových kosinů. Pro směrové kosiny platí

$$\cos^2(\mathbf{E}_1, x^0) + \cos^2(\mathbf{E}_1, y^0) + \cos^2(\mathbf{E}_1, z^0) = 1.$$

a podobně pro druhý vektor. Proto

$$\cos(\mathbf{E}_1, z^0) = (1 - 0,3^2 - 0,37^2)^{1/2} = \pm 0,88,$$

$$\cos(\mathbf{E}_2, z^0) = (1 - 0,82^2 - 0,11^2)^{1/2} = \pm 0,562.$$

Potom

$$\mathbf{E}_1 = E_1 [\cos(\mathbf{E}_1, x^0) x^0 + \cos(\mathbf{E}_1, y^0) y^0 + \cos(\mathbf{E}_1, z^0) z^0] = 1,65 x^0 + 2,04 y^0 + 4,84 z^0 \text{ V/m},$$

$$\mathbf{E}_2 = E_2 [\cos(\mathbf{E}_2, x^0) x^0 + \cos(\mathbf{E}_2, y^0) y^0 + \cos(\mathbf{E}_2, z^0) z^0] = 6,64 x^0 + 0,89 y^0 + 4,55 z^0 \text{ V/m}$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 8,29 x^0 + 2,93 y^0 + 9,39 z^0 \text{ V/m}$$

$$2) \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = E_{1x} E_{2x} + E_{1y} E_{2y} + E_{1z} E_{2z} = 34,77 \text{ (V/m)}^2$$

$$3) \text{ Pro skalární součin platí } \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = E_1 E_2 \cos \alpha \text{ a tedy } \cos \alpha = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 / (E_1 E_2) = 0,78. \text{ Takže } \alpha = 38^\circ.$$

## 1. Elektrostatické pole

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ E_{1x} & E_{1y} & E_{1z} \\ E_{2x} & E_{2y} & E_{2z} \end{bmatrix} = 4,97x^0 + 24,63y^0 - 12,08z^0 \text{ (V/m)}^2$$

$$|\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2| = 27,8 \text{ (V/m)}^2$$

### úkol 1.9

D

Prostoru je dána rovina  $z = 0$  a vektor  $\mathbf{A} = 3x^0 + 5y^0 + z^0$ . Určete tečnou a normálovou složku vektoru  $\mathbf{A}$  vzhledem k dané rovině.

**Řešení:** Tečnou  $A_t$  a normálovou  $A_n$  složku daného vektoru  $\mathbf{A}$  určíme ze vztahů

$$|\mathbf{n}^0 \times \mathbf{A}| = A_t, \quad \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{A} = A_n$$

V našem případě je normála roviny  $\mathbf{n}^0 = z^0$ , takže

$$A_t = \left| z^0 \times (3x^0 + 5y^0 + z^0) \right| = |-5x^0 + 3y^0| = (34)^{1/2} = 5,83$$

$$A_n = z^0 \cdot (3x^0 + 5y^0 + z^0) = 1$$

### úkol 1.10

C

Je dán potenciál  $\varphi = K(x^y - z^2)$  [V]. Určete jeho gradient v bodě  $x=2,7$ ;  $y=2$  a  $z=2$ .

**Řešení:** Gradient je

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} x^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z^0 = K(yx^{y-1} x^0 + \ln x x^y y^0 - 2z z^0) = K(5,4x^0 + 7,24y^0 - 4z^0) \text{ [V/m]}$$

### úkol 1.11

C

Určete grad  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  pro vektory  $\mathbf{A} = 3x^0 + 4y^0 + 5z^0$  a  $\mathbf{B} = x x^0 + y y^0 + z z^0$ .

**Řešení:** Platí

$$\text{grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{grad } (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) = \text{grad } (3x + 4y + 5z) = 3x^0 + 4y^0 + 5z^0.$$

### úkol 1.12

C

Ujistěte, zda může být vektorové pole  $\mathbf{A} = (x^2 - y^2)x^0 + xy y^0$  popsáno skalárním potenciálem.

**Řešení:** Vektorové pole lze popsat skalárním potenciálem tehdy, je-li rotace daného vektoru rovna nule

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A}^0 &= \begin{bmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & xy & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial z}(xy)x^0 + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y^2)y^0 + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) \right] z^0 = \\ &= 0x^0 + 0y^0 + (y + 2y)z^0 \neq 0 \end{aligned}$$

daného vektoru  $\mathbf{A}$  tedy nemůže být popsáno skalárním potenciálem.

### úkol 1.13

D

Vypočítejte, jak velký musí být poloměr osamocené vodivé koule ve vakuu, kterou lze nabít nábojem  $Q_0 = 1 \text{ C}$ , aniž nastane srážení. Elektrická pevnost prostředí je  $E_{\max} = 3 \text{ MV/m}$ .

**Řešení:** Ze vztahu pro intenzitu pole  $E = Q_0 / 4\pi\epsilon_0 r^2$  vypočítáme

$$r = \sqrt{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 E_{\max}}} = 54,7 \text{ m}.$$

# 1. Elektrostatické pole

## Příklad 1.14

D

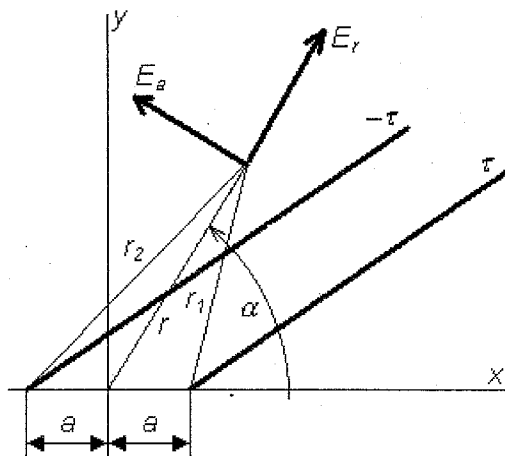
V elektrickém poli je v místě A potenciál 300 V a v místě B 1 200 V. Jakou práci je potřebné vykonat, abychom přenesli kladný náboj  $Q = 3 \cdot 10^{-8}$  C z místa A do B.

**Řešení:**  $A = W_B - W_A = Q(\varphi_B - \varphi_A) = 3 \cdot 10^{-8}(1\,200 - 300) = 27 \cdot 10^{-6}$  J.

## Příklad 1.15

B

Určete vztah pro potenciál dvou velmi dlouhých rovnoběžných nabitých vodičů zanedbatelného průřezu nesoucích náboje  $+\tau$  a  $-\tau$ . Vztah upravte pro případ tzv. liniového dipólu, pro který platí  $a \ll r$ . Stanovte intenzitu tohoto dipólu.



**Řešení:** Pro jeden vodič platí (uvažujeme Gaussův válec o poloměru  $r$  s osou na vodiči)  $E_1 2\pi r l = \tau_0 l / \epsilon$ . Proto  $E_1 = \tau_0 / 2\pi r \epsilon$ . Integrací dostaneme

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r_1 + K_1.$$

Použijeme metodu superpozice. Výsledný potenciál vyvolaný nabitými vodiči je

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r_1 + K_1 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r_2 + K_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + K$$

Volíme-li referenční bod pro potenciál na symetrále vodičů, tj. pro  $r_2/r_1 = 1$ , je  $K = 0$ .

Je-li  $a \ll r$ , pak lze psát

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r + a \cos \alpha}{r - a \cos \alpha} + K = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1 + \frac{a}{r} \cos \alpha}{1 - \frac{a}{r} \cos \alpha} + K = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\left(1 + \frac{a}{r} \cos \alpha\right)^2}{1 - \left(\frac{a}{r} \cos \alpha\right)^2} + K \approx \\ &\approx \frac{\tau}{\pi\epsilon} \ln \left(1 + \frac{a}{r} \cos \alpha\right) + K \end{aligned}$$

Rozvojem v Taylorovu řadu získáme pro logaritmus přibližný vztah

$$\ln \left(1 + \frac{a}{r} \cos \alpha\right) \approx \frac{a}{r} \cos \alpha$$

Odtud pro potenciál liniového dipólu  $\varphi_d = \frac{\tau}{\pi\epsilon} \frac{a}{r} \cos \alpha + K$

Označíme-li  $p' \approx 2a\tau_0$  je  $\varphi_d = \frac{p'}{2\pi\epsilon r} \cos \alpha + K$ , kde  $p'$  je moment liniového dipólu.

Intenzita elektrického pole má ve válcové soustavě složky

## 1. Elektrostatické pole

$$= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{a} \quad E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$$

$$E_r = \frac{p'}{2\pi\epsilon r^2} \cos \alpha, \quad E_\alpha = \frac{p'}{2\pi\epsilon r^2} \sin \alpha, \quad |E| = \frac{p'}{2\pi\epsilon r^2}.$$

### Úloha 1.16

B

Nalezněte rovnice ekvipotenciál z předcházejícího příkladu.

**Řešení:** Zřejmě můžeme vyšetřovat ekvipotenciály pouze v rovině. Výsledný potenciál je

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Vyjádříme  $R_1 = [(a-x)^2 + y^2]^{1/2}$  a  $R_2 = [(a+x)^2 + y^2]^{1/2}$ . Pro ekvipotenciály musí platit  $\varphi = \text{konst.}$  Z toho  $R_2/R_1 = k$ . Proto

$$\frac{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} = k$$

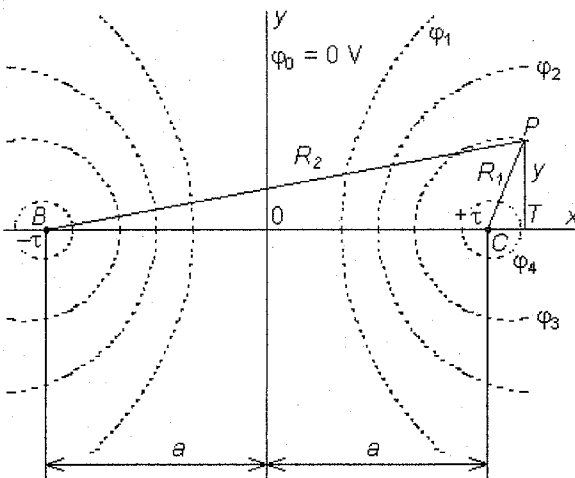
$$\left(x - a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ak}{k^2 - 1}\right)^2.$$

Ekvipotenciály tedy tvoří kružnice se středem na ose  $x$  v bodě  $\left(a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}; 0\right)$  a jejich poloměry jsou

### Úloha 1.17

A

Vypočítejte kapacitu na jednotku délky dvou vodičového vedení s poloměrem  $R$  a vzdáleností mezi středy



**Řešení:** Povrch nabitých vodičů tvoří ekvipotenciální plochy a jsou to dvě válcové plochy. Tato situace připomíná předchozí příklad nekonečných vodičů o zanedbatelném poloměru. Zřejmě platí

$$\frac{2ak}{k^2 - 1} = R$$

$$2a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} = D.$$

Číslům vyloučíme  $2a$

## 1. Elektrostatické pole

$$\frac{R}{D} = \frac{k}{k^2 + 1}$$

$$Rk^2 - kD + R = 0$$

$$k = \frac{R_2}{R_1} = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4R^2}}{2R}$$

I když skutečné vedení není nikdy nekonečně dlouhé, můžeme uvažovat, že je mnohem delší než vzdálenost mezi středy vodičů  $D$ .

Jestliže z důvodu symetrie předpokládáme, že potenciál na ose symetrie je nulový, pak potenciály jednotlivých válců  $\varphi_+$  a  $\varphi_-$  lze psát jako

$$\varphi_+ = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln k$$

$$\varphi_- = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon} \ln k$$

Napětí mezi oběma válci (vodiči) je

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\tau}{\pi\epsilon} \ln k$$

Proto kapacita vedení na jednotku délky  $C/l$  je

$$\frac{C}{l} = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon}{\ln k} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \left[ \frac{D + \sqrt{D^2 - 4R^2}}{2R} \right]}$$

Obvykle bývá  $D \gg R$  a proto

$$\frac{C}{l} \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln(D/R)}$$

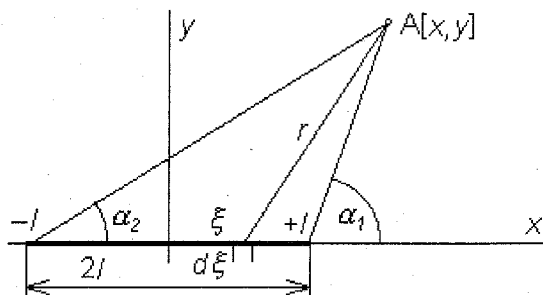
**Poznámka:** Pro  $D \gg R$  lze použít alternativní postup. Pro integraci zvolíme spojnicí středů obou vodičů. Napětí je tedy

$$U = \int_a^D \frac{Q dr}{2\pi r l \epsilon} - \int_{D-a}^0 \frac{Q dr}{2\pi (D-r) l \epsilon} = \frac{Q}{\pi l \epsilon} \ln \left( \frac{D}{a} \right),$$

což vede na stejný výsledek.

### Příklad 1.18

B



Určete vztah pro potenciál  $\varphi$  a intenzitu pole  $E$  náboje spojitě rozloženého podél úsečky délky  $2l$  v obecném bodě  $A[x, y]$ , je-li délková hustota náboje  $\tau_0 = \text{konst.}$

**Řešení:** Protože známe rozložení náboje, můžeme jeho pole řešit superpozicí polí jednotlivých elementárních množství. Potenciál  $d\varphi$  elementárního bodového množství v bodě A je

$$d\varphi = \frac{dQ_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} + K$$

## 1. Elektrostatické pole

$Q_0$  dosadíme  $dQ_0 = \tau_0 d\xi$  a  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$

je

$$d\varphi = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} + K$$

edný potenciál v bodě A je tedy dán integrálem

$$\varphi = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon} \int_{-l}^{+l} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} + K$$

dáme substituci  $x - \xi = z$ ,  $-d\xi = dz$ , takže

$$\varphi = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon} \int_{x+l}^{x-l} \frac{-dz}{\sqrt{z^2 + y^2}} + K = -\frac{\tau_0}{4\pi\epsilon} \left[ \ln \left( z + \sqrt{z^2 + y^2} \right) \right]_{x+l}^{x-l} + K$$

enciál v bodě A

$$\varphi = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon} \ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}} + K \text{ [V]}$$

ením tohoto vztahu pro  $\varphi = K$  bychom získali rovnice ekvipotenciálních ploch (je jimi soustava fokálních rotačních elipsoidů).

$E = -\text{grad } \varphi$

$$E = -\text{grad } \varphi = -\text{grad} \left( \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon} \ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right) =$$

$$= \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}} \right) x^0 + \left( \frac{x+l}{y\sqrt{(x+l)^2 + y^2}} - \frac{x-l}{y\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right) y^0 \right] =$$

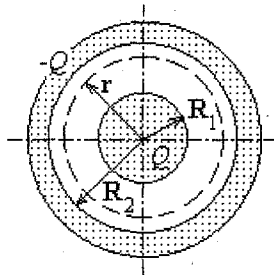
$$= \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon y} [(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) x^0 + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) y^0].$$

derivaci podle  $y$  je výhodnější derivovat výrazy

$$\ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}} = \ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{y} - \ln \frac{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}}{y}.$$

klad 1.19

B



odíte vztah pro kapacitu kulového kapacitoru (dvě soustředné koule s poloměry  $R_1$  a  $R_2$ ).

ení: Napětí je dáno

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

oto

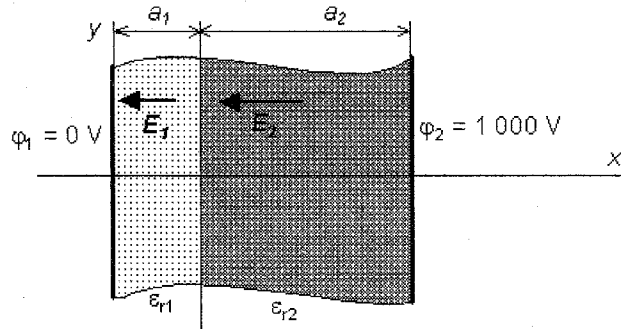
# 1. Elektrostatické pole

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

## Příklad 1.20

C

Mezi elektrodami deskového kondenzátoru s děleným dielektrikem je připojeno napětí  $U = 1\,000\text{ V}$ . Tloušťky vrstev dielektrika jsou  $a_1 = 20\text{ mm}$ ,  $a_2 = 40\text{ mm}$ , permitivity jsou  $\epsilon_{r1} = 4$  a  $\epsilon_{r2} = 2$ . Vypočítejte intenzity elektrického pole  $E_1$  a  $E_2$  a indukce  $D_1$  a  $D_2$  v obou vrstvách. Stanovte plošnou hustotu volného náboje  $\sigma_f$  na deskách kondenzátoru a hustotu vázaného náboje  $\sigma_b$  na obou rozhraních mezi dielektrikem a elektrodou. Určete závislost  $\varphi(x)$ .



**Řešení:** Z podmínky na rozhraní  $D_{1n} = D_{2n}$  plyne  $D_1 = D_2$  a  $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$ .

Celkové napětí je  $-U = E_1 a_1 + E_2 a_2$ . Odtud

$$U = -E_1 \left( a_1 + a_2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)$$

$$E_1 = -U / \left( a_1 + a_2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) = -1000 / (0,02 + 2 \cdot 0,04) = -10^4 \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 = -2 \cdot 10^4 \text{ V/m}$$

Ze vztahu  $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$  vypočítáme

$$D = \epsilon_0 \epsilon_1 E_1 = \epsilon_0 \epsilon_2 E_2 = -3,54 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

Plošná hustota volného náboje je co do velikosti na obou deskách stejná

$$|\sigma_f| = D = 3,54 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

Plošnou hustotu vázaného náboje na rozhraní prostředí o permitivitě  $\epsilon_1, \epsilon_2$  je

$$\sigma_b = P_n = P \text{ a } D = \epsilon_0 E + P$$

$$|\sigma_{v1}| = |D - \epsilon_0 E_1| = 2,655 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

$$|\sigma_{v2}| = |D - \epsilon_0 E_2| = 1,77 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2.$$

Potenciál je (intenzity mají směr záporné osy  $x$ )

$$\varphi_1 = -E_1 x + K_1 \quad \text{v prostředí s permitivitou } \epsilon_1$$

$$\varphi_2 = -E_2 x + K_2 \quad \text{v prostředí s permitivitou } \epsilon_2$$

Na rozhraní dielektrik platí  $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1)$

Volíme-li  $\varphi_1(0) = 0$  je  $K_1 = 0$  a  $K_2 = (E_2 - E_1) a_1 = -200\text{ V}$  a

$$\varphi = 10^4 x \text{ V} \quad \text{pro } 0 \leq x \leq a_1$$

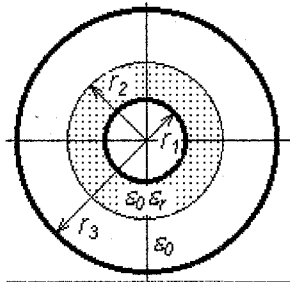
$$\varphi = 2 \cdot 10^4 x - 200 \text{ V} \quad \text{pro } a_1 \leq x \leq a_2.$$

## 1. Elektrostatické pole

ad 1.21

C

álcový kapacitor má dělené dielektrikum. Je připojen na zdroj napětí  $U$ . Stanovte permitivitu  $\varepsilon_r$  tak, napětí na obou vrstvách dielektrika bylo stejné  $U_{AB} = U_{BC}$ . Vypočítejte, jaký je v tomto případě  $E(r_2)/E(r_1)$ , kde  $E(r_2)$  je intenzita ve vzduchu. Kolik by byl tento poměr, kdyby byl celý kapacitor jen vzduchem? Rozměry jsou  $r_1 = 20$  mm,  $r_2 = 40$  mm,  $r_3 = 60$  mm.



ní: Potenciál pole ve válcovém kapacitoru je

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln + K$$

dtud napětí mezi poloměry  $r_1$  a  $r_2$  a  $r_2$  a  $r_3$  je

$$U_{AB} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad U_{BC} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_3}{r_2}$$

$$\text{kže } \frac{1}{\varepsilon_r} \ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r_3}{r_2} \text{ a odtud } \varepsilon_r = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_3}{r_2}} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}} = 1,71.$$

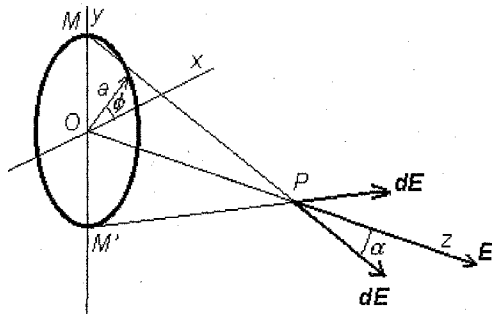
tenzita pole válcového kapacitoru je  $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$ ,

$$\frac{E(r_2)}{E(r_1)} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0\varepsilon_1}{\varepsilon_0r_2} = \frac{1,71 \cdot 20}{40} = 0,855.$$

o vzduchový kapacitor je tento poměr  $\frac{E(r_2)}{E(r_1)} = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ .

lad 1.22

B



řete pole rovnoměrně nabitě kruhové smyčky na ose smyčky.

ní: Malý oblouk o délce  $a d\phi$  umístěný v bodě  $M$  vytvoří elektrické pole  $dE$  v bodě  $P$

$$dE = \frac{\tau a d\phi}{4\pi(a^2 + z^2)\varepsilon},$$

$a$  je poloměr a  $OP$  je osa  $z$ . Symetricky položený bod  $M'$  bude mít stejnou velikost intenzity, ale bude na opačné straně od osy  $z$  v rovině  $MOP$ . To znamená, že složky kolmé na osu  $z$  se budou rovněž rušit a složky ve směru osy  $z$  se budou sčítat. Protože to platí pro libovolnou symetricky zvolenou dvojici bodů, musíme integrovat pouze složky  $dE_z = dE \cos \alpha$

## 1. Elektrostatické pole

$$E_z = E_z^0 = \int_0^{2\pi} \frac{\tau a d\phi^0}{4\pi\epsilon(a^2 + z^2)} \cos\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{z \tau a d\phi}{4\pi\epsilon(a^2 + z^2)^{3/2}} z^0 = \frac{z \tau (2\pi a)}{4\pi\epsilon(a^2 + z^2)^{3/2}} z^0$$

Na opačné straně smyčky bude na ose  $z$  pole o stejné velikosti, ale bude mít opačný směr, tzn.  $E$  směřuje ve směru vnější normály.

### Příklad 1.23

B

Určete pole rovnoměrně nabitě kruhové desky na ose desky.

**Řešení:** Budeme modifikovat řešení předešlého příkladu. Uvažujme na kruhové desce elementární mezikruží omezené kružnicemi o poloměru  $R$  a  $R+dR$ . To odpovídá smyčce z minulého příkladu. Elementární plocha o dílce  $R d\phi$  a šířce  $dR$  bude nabitá nábojem s plošnou hustotou  $\sigma$ . Tedy v bodě  $P$  na ose  $z$  ve vzdálenosti  $z$  bude pole podobně jako pro smyčku

$$dE_z = \frac{z \sigma (2\pi R dR)}{4\pi\epsilon(R^2 + z^2)^{3/2}} z^0.$$

Integraci pro celou kruhovou desku, tzn. pro meze od  $R = 0$  do poloměru desky  $a$  dostaneme

$$E_z = \frac{2\pi z \sigma^0}{4\pi\epsilon} \int_0^a \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Substitucí  $R^2 + z^2 = v^2$  dostaneme ( $z$  je konstanta pro integraci)  $2R dR = 2 v dv$

$$E_z = \frac{z \sigma^0}{2\epsilon} \int_z^{\sqrt{a^2 + z^2}} \frac{v dv}{v^3} = \frac{z \sigma^0}{2\epsilon} \left[ -\frac{1}{v} \right]_z^{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] z^0.$$

Ovšem platí, že pole je symetrické na obou stranách desky a směřuje vždy ve směru vnější normály k desce (pro kladný náboj).

### Příklad 1.24

C

Určete pole rovnoměrně nabitě nekonečné desky.

**Řešení:** Použijme předešlý příklad. Jestliže plošná hustota  $\sigma$  je stejná, pak pro nekonečně velkou desku ( $a \rightarrow \infty$ ) platí

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon} z^0.$$

To je pozoruhodný výsledek, protože vůbec nezávisí na vzdálenosti  $z$ . Jinak řečeno pole má všude stále stejnou velikost a směr. Opět platí, že pole je symetrické na obou stranách desky a směřuje vždy ve směru vnější normály k desce (pro kladný náboj).

**Poznámka:** Stejný vztah získáme, budeme-li uvažovat Gaussův válec tak, že horní a dolní podstava leží na opačných stranách desky. Jsou-li podstavy desek  $S$ , je celkový náboj uvnitř válce  $\sigma S$  a tedy

$$\oint_S E \cdot dS = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon}.$$

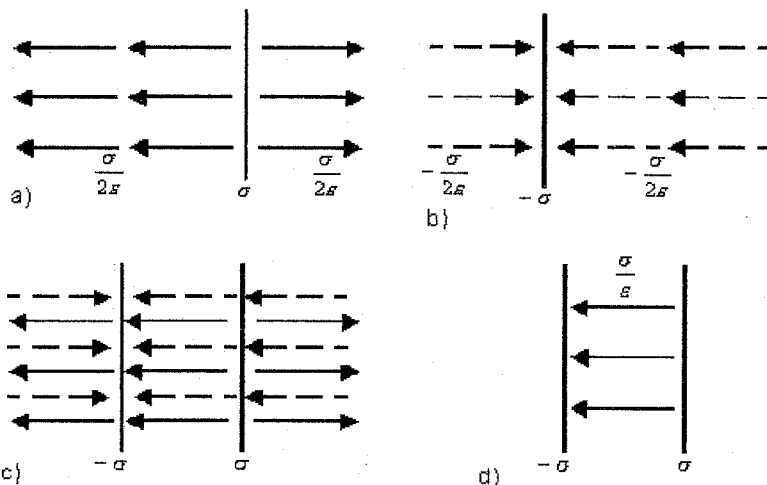
### Příklad 1.25

C

Vyšetřete pole dvou rovnoměrně, ale opačně nabitých rovnoběžných nekonečných desek.

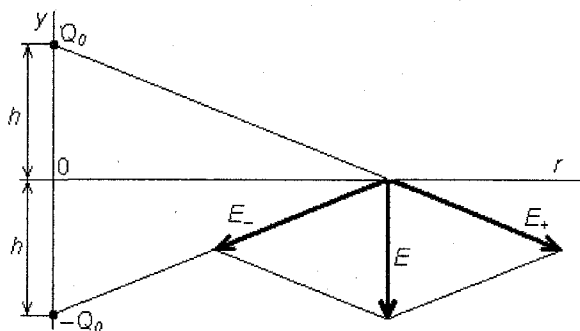
**Řešení:** Velikost pole je dána podle předešlého příkladu. Elektrické pole  $E$  v případě kladně nabitě desky je v směru vnější normály, jak je ukázané na obr. a). Elektrické pole  $E$  v případě záporně nabitě desky má opačný je v směru normály k desce, jak je ukázané na obr. b). Když jsou dvě desky umístěné rovnoběžně, dostaneme pole pomocí principu superpozice, jak je ukázáno na obr. c). Proto je pole nulové všude mimo prostor mezi oběma deskami, kde je jeho velikost dvojnásobná proti poli jedné desky, jak je ukázáno na obr. d).

# 1. Elektrostatické pole



id 1.26

B



ový náboj o velikosti  $Q_0$  je umístěn ve výši  $h$  nad vodivou rovinou. Vypočítejte plošnou hustotu  $\sigma_0$ , indukovaného na rovině v závislosti na  $r$  a určete jeho celkovou velikost.

f: Použijeme metodu zrcadlení. Rozložení náboje na rovině je dáno vztahem  $|\sigma_0| = \epsilon E$ .

enzita pole  $E$  je dána součtem intenzit náboje  $Q_0$  a jeho zrcadlového obrazu  $-Q_0$ .

$$E = 2E_+ = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} = 2 \frac{Q_0}{4\pi\epsilon(r^2 + h^2)} \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$|\sigma_0| = \frac{Q_0}{2\pi} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

ý indukovaný náboj určíme integrací

$$Q_0 = \int_S \sigma_0 dS = \int_0^\infty \sigma_0 2\pi r dr = \frac{Q_0 h}{2} \int_0^\infty \frac{2r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr.$$

í substituce  $r^2 + h^2 = z$  dostaneme

$$Q_0 = \frac{Q_0 h}{2} \int_{h^2}^\infty \frac{dz}{h^2 z^{3/2}} = Q_0$$

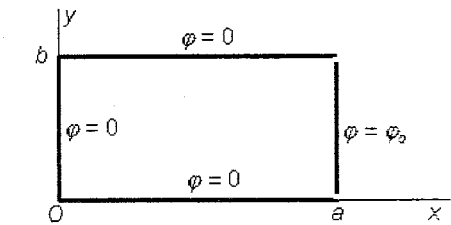
rientace normálové složky intenzity na rovině plyne, že indukovaný náboj je záporný. Celkový indukovaný na rovině je roven co do velikosti náboji  $Q_0$  umístěnému nad rovinou. Z toho plyne, že é siločáry, vycházející z náboje  $Q_0$ , vstupují do vodivé roviny.

id 1.27

A

čte pole uvnitř nekonečně dlouhého kvádr. Na třech stěnách v rovinách  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=b$  je íal  $\varphi=0$ . Na čtvrté stěně v rovině  $x=0$  je  $\varphi=\varphi_0$

## 1. Elektrostatické pole



**Řešení:** Obecné řešení Laplaceovy rovnice (jak se přesvědčíme dosazením) bude

$$\varphi(x, y) = \sum_k (A_k \sinh kx + B_k \cosh kx)(C_k \sin ky + D_k \cos ky) + Mxy + Nx + Sy + T.$$

Konstanty určíme z okrajových podmínek. Pro  $x=0$  je  $\varphi(0, y) = 0$ . Proto musí být  $B_k = S = T = 0$ . Také pro  $y=0$  je  $\varphi(x, 0) = 0$ . Proto  $D_k = N = 0$ . Pro  $y = b$  je  $\varphi(x, b) = 0$ . Proto  $M = 0$ ,  $kb = n\pi$ , kde  $n$  je celé číslo. Tedy  $k = n\pi/b$ . Obecné řešení tedy bude (zavedeme novou konstantu  $C'_k = A_k C_k$ )

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sinh\left(\frac{\pi}{b} nx\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} ny\right)$$

Pro  $x=a$  musí platit  $\varphi(a, y) = \varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sinh\left(\frac{\pi}{b} na\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} ny\right)$  v intervalu  $0 < y < b$ .

Průběh funkce  $\varphi(a, y)$  je dán okrajovou podmínkou a v intervalu  $0 < y < b$  se shoduje s průběhem periodické obdélníkové funkce s amplitudou  $\varphi_0$  a délkou periody  $2b$ . Fourierův rozvoj této funkce je

$$\varphi^*(y) = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)y].$$

Srovnáním s předchozí rovnicí plyne

$$\varphi_0 = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left[\frac{\pi}{b} (2n-1)y\right] = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n \sinh\left[\frac{\pi}{b} (2n-1)a\right] \sin\left[\frac{\pi}{b} (2n-1)y\right],$$

proto

$$C'_n = \frac{4\varphi_0}{(2n-1)\pi} \frac{1}{\sinh\left[\frac{\pi}{b} (2n-1)a\right]}.$$

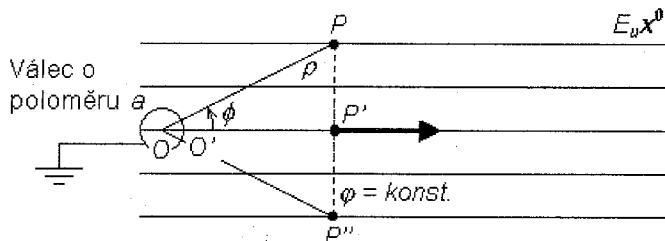
Takže

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\varphi_0}{(2n-1)\pi} \frac{1}{\sinh\left[\frac{\pi}{b} (2n-1)a\right]} \sinh\left[\frac{\pi(2n-1)x}{b}\right] \sin\left[\frac{\pi(2n-1)y}{b}\right].$$

### Příklad 1.28

A

Vyřešte Laplacovu rovnici pro válcové souřadnice za předpokladu, že neexistuje změna ve směru  $z$ .



**Řešení:** Ve válcových souřadnicích platí (pro nulové derivace podle  $z$ )

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

Předpokládám řešení ve tvaru  $\varphi = f(\rho) F(\phi)$ , kde  $f(\rho)$  je funkcí pouze  $\rho$  a  $F(\phi)$  jen  $\phi$ . Po dosazení a malé úpravě dostaneme separované proměnné

## 1. Elektrostatické pole

$$\frac{\rho}{f(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{F(\phi)} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = 0.$$

ce musí být splněna pro libovolné  $\rho$  a  $\phi$ . Proto

$$\frac{1}{f(\rho)} \left\{ \rho^2 \frac{d[f'(\rho)]}{d\rho} + \rho f'(\rho) \right\} = k^2$$

$$\frac{1}{F(\phi)} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = -k^2.$$

Jestliže  $k = 0$ , pak

$$\frac{d[f'(\rho)]}{f'(\rho)} + \frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

ací dostaneme

$$\ln [f'(\rho)] = \ln A - \ln (\rho) = \ln (A/\rho)$$

je konstanta. Tedy

$$f'(\rho) = A/\rho$$

$$f(\rho) = A \ln \rho + B.$$

$k = 0$  pak  $\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = -k^2 F(\phi) = 0$  dává řešení  $F(\phi) = C\phi + D$  a proto pro  $k=0$  je

$$V = f(\rho) F(\phi) = (A \ln \rho + B)(C\phi + D).$$

Jestliže  $k \neq 0$ , pak

$$f(\rho) = A_k \rho^k + B_k \rho^{-k}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = -k^2 F(\phi)$$

řešení

$$F(\phi) = C_k \cos(k\phi) + D_k \sin(k\phi).$$

by bylo  $k^2$  záporné, použili bychom hyperbolické funkce cosh a sinh. Výsledné řešení je

$$V = f(\rho) F(\phi) = (A_k \rho^k + B_k \rho^{-k}) [C_k \cos(k\phi) + D_k \sin(k\phi)].$$

to rovnice se používají, pokud splňují okrajové podmínky problému pro válcové proměnné.

**Úd 1.29**

**B**

žetete vliv vložení nekonečně dlouhého vodivého válce o poloměru  $a$ , jehož osa je shodná s osou  $z$ .  
okládá se, že pole bez válce je všude uniformní s elektrickým polem  $E = E_u \mathbf{x}^\theta$ .

í: Protože se jedná o válcovou symetrii podle osy  $z$  můžeme použít řešení Laplaceovy rovnice  
ešlého příkladu s následujícími počátečními podmínkami:

velké vzdálenosti os osy válce (tzn. pro  $\rho \rightarrow \infty$ ) nebude pole přítomností válce ovlivněné a jeho  
ta bude  $E_u \mathbf{x}^\theta$ . Ekvipotenciální plochy budou roviny kolmé na osu  $x$ . Předpokládejme, že je válec  
ěný. Jestliže potenciál v bodě  $P$  ve vzdálenosti  $\rho$  od počátku  $O$  je  $\phi$ , pak se rovná rozdílu  
iálů mezi  $P'$  (na stejné ekvipotenciále a na ose  $x$ ) a bodem  $O'$  (kde válec protíná osu  $x$ ). Tzn.

$$V = - \int_{O'}^{P'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E_u \int_{O'}^{P'} x^\theta \cdot d\mathbf{s} = -E_u (O'P') \approx -E_u (OP') \quad \text{pro } \rho \gg a$$

$$\approx -E_u x = -E_u \rho \cos \phi \quad \text{pro } \rho \rightarrow \infty.$$

$\rho = a$  musí být potenciál nulový.

ové podmínky ukazují, že je nutné volit řešení ve tvaru

$$V = (A\rho + B/\rho) (C \cos \phi + D \sin \phi).$$

## 1. Elektrostatické pole

Je zřejmé, že  $AC = -E_u$ . Protože potenciál v bodě  $P(\rho, \phi)$  je stejný jako v  $P'(\rho, -\phi)$ , bude  $D = 0$ . Protože pro  $R=a$  je potenciál nulový, dostaneme

$$\phi = AC\rho \cos \phi + BC \cos \phi / \rho$$

$$-E_u a \cos \phi + BC \cos \phi / a = 0$$

$$BC = a^2 E_u$$

Proto konečný tvar řešení je

$$\phi = (a^2/\rho - \rho) E_u \cos \phi.$$

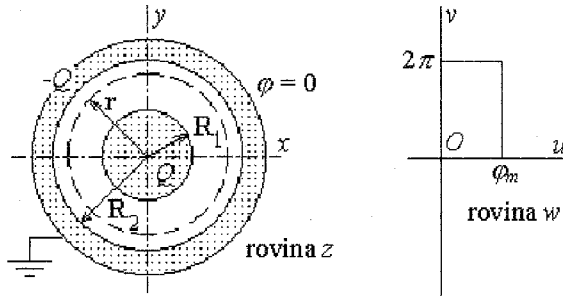
### Příklad 1.30

B

Pomocí konformního zobrazení odvoďte vztahy pro pole válcového kapacitoru.

**Řešení:** Uvažujme regulární funkci  $w = \ln z$ . Pokud potřebujeme toto řešení přizpůsobit okrajovým podmínkám, můžeme je nahradit funkcí

$$w = u + jv = C_1 \ln z + C_2 = C_1 \ln [r \exp(j\phi)] + C_2 = C_1 \ln r + C_2 + jC_1 \phi.$$



Jestliže zvolíme, aby  $u = \text{konst.}$  reprezentovalo ekvipotenciální plochu, pak tomu odpovídá v rovině  $z$  válec  $r = \text{konst.}$  Předpokládejme, že vnitřní válec má potenciál  $\phi_m$  a vnější válec je uzemněn na nulovém potenciálu. Tzn.

$$\phi_m = C_1 \ln R_1 + C_2$$

$$0 = C_1 \ln R_2 + C_2$$

Řešení je

$$C_1 = -\phi_m / \ln(R_2 / R_1),$$

$$C_2 = \phi_m \ln R_2 / \ln(R_2 / R_1),$$

Výsledné řešení  $\phi = u$

$$\phi = -\frac{\phi_m \ln r}{\ln(R_2 / R_1)} + \frac{\phi_m \ln R_2}{\ln(R_2 / R_1)} = \frac{\phi_m \ln(R_2 / r)}{\ln(R_2 / R_1)}.$$

Pole  $E$  je

$$E = -\text{grad } \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{r}^\theta = \frac{\phi_m}{r \ln(R_2 / R_1)} \mathbf{r}^\theta.$$

### Příklad 1.31

B

Určete pole dvou vodivých polorovin se společnou přímkou, které spolu svírají úhel  $\pi/n$ , kde  $n$  je přirozené číslo.

**Řešení:** Je možné použít transformaci  $w = A z^n$  a Moivrovu větu

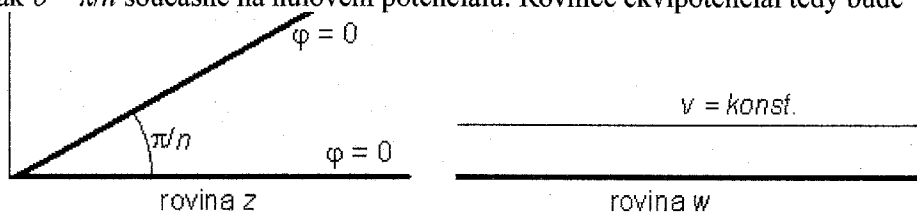
$$w = u + jv = A z^n = A r^n \exp(j\theta) = A r^n (\cos \theta + j \sin \theta) = A r^n [\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)]$$

$$u = A r^n \cos(n\theta); v = A r^n \sin(n\theta),$$

$$r^2 = x^2 + y^2; \text{tg } \theta = y/x.$$

## 1. Elektrostatické pole

stliže zvolíme  $v = \text{konst.}$  jako potenciální funkci, pak je zřejmé, pro  $\varphi = v = 0$  je v rovině  $z$  jak  $\theta = 0$ , tak  $\theta = \pi/n$  současně na nulovém potenciálu. Rovnice ekvipotenciál tedy bude



$$v = A r^n \sin(n\theta) = \text{konst.}$$

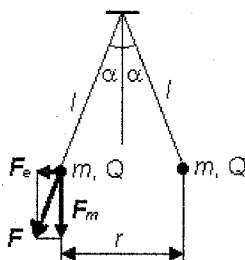
ovnice siločar jsou

$$u = A r^n \cos(n\theta) = \text{konst.}$$

ločary a ekvipotenciály jsou symetrické vzhledem k ose úhlu (v rovině  $z$  úhel  $\pi/(2n)$ ). Protože tato odpovídá úhlu  $\pi/2$  (osa  $v$  v rovině  $w$ ), můžeme určit bod (hodnoty  $A$ ,  $r$ ) pro nenulový potenciál na ose a elektrické pole uvnitř oblasti vytvořené oběma polorovinami.

ad 1.32

S



ě vodivé kuličky s hmotou  $m = 0,1$  g jsou zavěšeny na nevodivých vláknech délky  $l = 50$  cm, ž hmota je zanedbatelná. Udejte výchylku kuliček  $\alpha$ , jestliže mají obě kuličky stejné náboje  $3 \cdot 10^{-9}$  C. Průměr kuliček je velmi malý proti jejich vzdálenosti, takže je lze považovat za bodové e ve středech kuliček.

šení: Elektrické síly  $F_e$  a gravitační síly  $F_m$  jsou

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{4l^2 \sin^2 \alpha},$$

$$F_m = mg.$$

o úhlovou výchylku platí

$$\tan \alpha = F_e / F_m.$$

pečně bychom museli tuto rovnici řešit numericky. V tab. je uvedeno řešení pomocí tabulkového soru ( $\alpha$  [rad]). Pro řešení použijeme Nástroje, Hledání řešení, Nastavená buňka C2, Cílová ota 0, Měněná buňka D2 (pro různé procesory se mohou názvy měnit).

|   | A          | B          | C                         | D        | E                    |
|---|------------|------------|---------------------------|----------|----------------------|
| 1 | $F_e$      | $F_m$      | $\tan \alpha - F_e / F_m$ | $\alpha$ | $\alpha$ (přibližné) |
| 2 | 4,2725E-05 | 9,8100E-04 | -1,6763E-07               | 0,0435   | 0,0435               |

o malé úhlové výchylky však platí přibližné řešení (viz E2)

$$\tan \alpha \sin^2 \alpha \approx \alpha^3 \approx \frac{Q^2}{16\pi\epsilon l^2 mg}.$$

ad 1.33

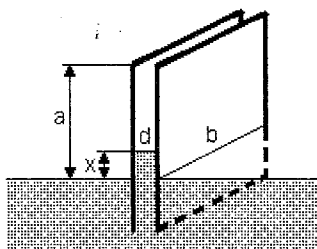
D

čete výslednou kapacitu  $C$  obvodu složeného z kapacitorů  $C_1$  až  $C_5$ .

šení: Výsledná kapacita zapojení podle obr. je

$$= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4 + C_5}.$$

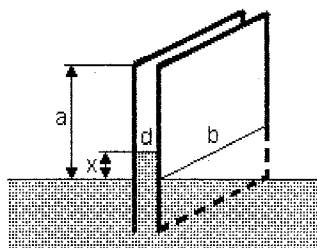
## 1. Elektrostatické pole



### Příklad 1.34

B

Elektrody deskového kapacitoru mají vzdálenost  $d = 5 \text{ mm}$  a rozměry  $a = 50 \text{ mm}$  a  $b = 75 \text{ mm}$ . Spodní hrana elektrod je ponořena do oleje s relativní permitivitou  $\epsilon_r = 2,8$  a hustotou  $\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$ . Do jaké výšky vystoupí olej v mezeře mezi elektrodami, je-li mezi nimi napětí  $U = 10 \text{ kV}$ . Zanedbejte kapilární elevaci v mezeře.



**Řešení:** Změnou hladiny oleje se mění kapacita a energie jeho pole. Na olej působí síla, která se snaží zvětšit kapacitu, tzn. vtahuje olej mezi elektrody a gravitační síla.

Kapacitor s dvojnásobným dielektrikem (vzduchem a olejem) lze považovat za paralelní spojení dvou kapacitorů s plochami  $S_1$  a  $S_2$ . Proto

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S_2}{d} = \frac{\epsilon_0 b}{d} (a - x + x \epsilon_r).$$

Podle principu virtuální práce působí na olej síla

$$F = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0 b}{d} (\epsilon_r - 1).$$

V rovnováze musí být tato a gravitační síla stejná, tzn.

$$\frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0 b}{d} (\epsilon_r - 1) = mg = x b d \gamma g,$$

$$x = \frac{U^2 \epsilon_0}{2 \gamma g d^2} (\epsilon_r - 1) = \frac{10000^2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 900 \cdot 9,81 \cdot 0,005^2} (2,8 - 1) = 0,0036 \text{ m} = 3,6 \text{ mm}$$

### Příklad 1.35

B

Určete sílu na jednotku délky dvou vodičového vedení s poloměrem  $R$  a vzdáleností mezi středy vodičů  $D$  při zanedbání vlivu blízkosti země pro  $D \gg R$ . Napětí mezi vodiči je  $U = 100 \text{ kV}$ ,  $D = 2 \text{ m}$  a průměr vodičů  $2R = 25 \text{ mm}$ .

**Řešení:** Kapacita vedení na jednotku délky  $C/l$  podle příkladu 1.16 pro  $D \gg R$  je

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi \epsilon}{\ln(D/R)}.$$

Na jednotku délky působí síla, která se snaží zmenšit vzdálenost mezi vodiči  $D$

$$\frac{F}{l} = \frac{1}{2} U^2 \frac{d}{dD} \frac{\pi \epsilon}{\ln(D/R)} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\pi \epsilon}{D [\ln(D/R)]^2}.$$

Po dosazení hodnot dostaneme

## 1. Elektrostatické pole

$$\frac{F}{l} = -\frac{1}{2}(10^5)^2 \frac{\pi 8,854 \cdot 10^{-12}}{2[\ln(2/0,0125)]^2} = -2,7 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}.$$

### říklad 1.36

C

Kapacitor s otočnými deskami má při zcela vytočených deskách kapacitu  $C_1 = 44 \text{ pF}$ . Při zasunutých deskách má kapacitu  $C_2 = 1\,000 \text{ pF}$ . V této poloze byl připojen na napětí  $U = 220 \text{ V}$ , nabit a odpojen. Jak se změní napětí, když desky zcela vytočíme?

**Řešení:** Předpokládejme, že při otáčení desek se náboj nemění. Kapacitor získal náboj

$$Q = C_2 U = 10^{-9} \cdot 220 = 0,22 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

Při zcela vysunutých deskách bude napětí

$$U_1 = Q / C_1 = 0,22 \cdot 10^{-9} / 44 \cdot 10^{-12} = 5\,000 \text{ V}.$$

### říklad 1.37

D

Určete kapacitu kapacitoru s otočnými deskami při zasunutých deskách. Kapacitor má 13 pevných a 2 otočných desek tvaru půlkruhu o poloměru  $4 \text{ cm}$ . Vzdálenost mezi deskami je  $d = 1 \text{ mm}$ .

**Řešení:** Kapacita mezi dvěma deskami je

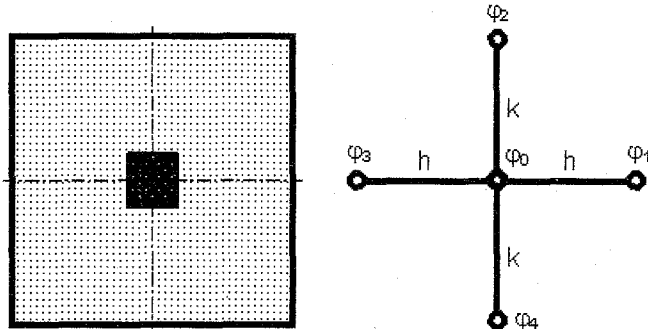
$$C = \frac{S \epsilon_0}{d} = \frac{\pi r^2 \epsilon_0}{2d} = \frac{\pi 0,04^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 0,001} = 22,2 \text{ pF}.$$

Protože jsou propojené otočné a pevné desky, jedná se o celkem 24 kapacitorů spojených paralelně a toto výsledná kapacita bude

$$C_v = 24 C = 533 \text{ pF}.$$

### říklad 1.38

S



Metodou konečných diferencí (metodou sítí) určete potenciály uvnitř kabelu, který má čtvercové díře. Vnější rozměr vnitřního vodiče (strana čtverce) je  $4 \text{ mm}$ , vnitřní rozměr vnějšího vodiče (strana verce) je  $12 \text{ mm}$ . Potenciál vnitřního vodiče  $\varphi_A = 100 \text{ V}$  a vnějšího vodiče  $\varphi_B = 0 \text{ V}$ .

**Řešení:** Pole ve směru osy kabelu  $z$  se nemění a tedy derivace podle  $z$  je nulová, takže můžeme ažovat dvourozměrnou úlohu. Pro metodu sítí nahrazujeme derivace diferencemi. Budou-li  $h$  a  $k$  vzdálenosti mezi uzly ve směru  $x$  a  $y$  (viz obr.), pak zřejmě platí pro první a druhé derivace podle  $x$  analogické vztahy platí pro derivace podle  $y$ )

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0 = \frac{1}{h}(\varphi_1 - \varphi_0), \quad \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_0 = \frac{1}{h^2}(\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_0)$$

Poissonova rovnice bude (označení  $\varphi_i$  se volí podle obr. – prostřední bod má index nula)

$$\Delta^2 \varphi|_0 = \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_0 + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right|_0 = \frac{1}{h^2}(\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_0) + \frac{1}{k^2}(\varphi_2 + \varphi_4 - 2\varphi_0) = -\frac{\rho_0}{\epsilon}.$$

Protože uvnitř kabelu nebudou volné náboje, dostaneme pro  $h = k$

# 1. Elektrostatické pole

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4}$$

Použijeme-li tabulkový procesor, lze tuto úlohu snadno řešit. Nemusíme uvažovat celý průřez kabelu, ale zvolíme pouze jednu čtvrtinu (např. dolní levý roh). Tento roh má rozměr 6 x 6 mm, takže zvolíme-li  $h = k = 1$  mm a použijeme tabulku se 7 x 7 buňkami (každá buňka odpovídá uzlu s potenciálem  $\varphi_i$ ). Pak bude sloupec A a řádek 7 odpovídat vnějšímu vodiči s nulovým potenciálem. Podobně budou mít buňky E1, E2 a E3 až H3 potenciál 100 V (odpovídají povrchu vnitřního vodiče). Zřejmě bude pole symetrické podle vodorovné a svislé osy. Z důvodu symetrie proto bude pro body B1 až D1 platit

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3 + 2\varphi_4}{4},$$

neboť hodnota  $\varphi_4$  bude stejná jako hodnota  $\varphi_2$ . Analogicky bychom postupovali pro G3 až G6. Tyto vztahy se vloží do vnitřních buněk, jak je ukázáno v tabulce.

|   | A | B                  | C                  | D                  |
|---|---|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 0 | $=(2*B2+C1+A1)/4$  | $=(2*C2+D1+B1)/4$  | $=(2*D2+E1+C1)/4$  |
| 2 | 0 | $=(B1+B3+C2+A2)/4$ | $=(C1+C3+D2+B2)/4$ | $=(D1+D3+E2+C2)/4$ |
| 3 | 0 | $=(B2+B4+C3+A3)/4$ | $=(C2+C4+D3+B3)/4$ | $=(D2+D4+E3+C3)/4$ |
| 4 | 0 | $=(B3+B5+C4+A4)/4$ | $=(C3+C5+D4+B4)/4$ | $=(D3+D5+E4+C4)/4$ |
| 5 | 0 | $=(B4+B6+C5+A5)/4$ | $=(C4+C6+D5+B5)/4$ | $=(D4+D6+E5+C5)/4$ |
| 6 | 0 | $=(B5+B7+C6+A6)/4$ | $=(C5+C7+D6+B6)/4$ | $=(D5+D7+E6+C6)/4$ |
| 7 | 0 | 0                  | 0                  | 0                  |

|   | E                  | F                  | G                 |
|---|--------------------|--------------------|-------------------|
| 1 | 100                |                    |                   |
| 2 | 100                |                    |                   |
| 3 | 100                | 100                | 100               |
| 4 | $=(E3+E5+F4+D4)/4$ | $=(F3+F5+G4+E4)/4$ | $=(G3+G5+2*F4)/4$ |
| 5 | $=(E4+E6+F5+D5)/4$ | $=(F4+F6+G5+E5)/4$ | $=(G4+G6+2*F5)/4$ |
| 6 | $=(E5+E7+F6+D6)/4$ | $=(F5+F7+G6+E6)/4$ | $=(G5+G7+2*F6)/4$ |
| 7 | 0                  | 0                  | 0                 |

Pro výpočet potenciálu je nutné provést iterační výpočet (pro Excel lze zvolit **Nástroje, Možnosti, Výpočty, Přepočítání Automaticky, Iterace, Maximum iterací 1000, Maximální změna 0.001** – toto nastavení je vhodné provést až po vyplnění celé tabulky). Po skončení výpočtu dostaneme následující hodnoty potenciálu:

|   | A | B      | C      | D      | E      | F      | G      |
|---|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0 | 21.851 | 45.170 | 71.175 | 100    |        |        |
| 2 | 0 | 21.117 | 43.827 | 69.764 | 100    |        |        |
| 3 | 0 | 18.789 | 39.256 | 64.056 | 100    | 100    | 100    |
| 4 | 0 | 14.782 | 30.353 | 47.205 | 64.056 | 69.764 | 71.175 |
| 5 | 0 | 9.986  | 20.170 | 30.353 | 39.256 | 43.827 | 45.170 |
| 6 | 0 | 4.993  | 9.986  | 14.782 | 18.789 | 21.117 | 21.851 |
| 7 | 0 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |

Pro zpřesnění výpočtu a získání podrobnějšího obrazu pole lze použít hustší síť (menší  $h, k$ ). Takže např. pro  $h = k = 0,5$  mm dostaneme následující tabulku (jednotlivé potenciály jsou odstupňovány různými stupni šedi, což sice není nejvýhodnější, ale při použití „náznových“ barevných odstínů není občas zcela zřejmé, které barvy odpovídají vyšším hodnotám potenciálů).

## 1. Elektrostatické pole

|   |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |
|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 22 | 33 | 45 | 57 | 71 | 85 | 100 |     |     |     |     |
| 1 | 21 | 33 | 44 | 57 | 71 | 85 | 100 |     |     |     |     |
| 0 | 21 | 32 | 43 | 56 | 69 | 84 | 100 |     |     |     |     |
| 0 | 20 | 30 | 41 | 53 | 67 | 82 | 100 |     |     |     |     |
| 9 | 18 | 28 | 38 | 49 | 62 | 78 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 8 | 17 | 25 | 34 | 44 | 55 | 66 | 78  | 82  | 84  | 85  | 85  |
| 7 | 14 | 22 | 30 | 38 | 46 | 55 | 62  | 67  | 69  | 71  | 71  |
| 6 | 12 | 18 | 25 | 31 | 38 | 44 | 49  | 53  | 56  | 57  | 57  |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 34 | 38  | 41  | 43  | 44  | 45  |
| 4 | 7  | 11 | 15 | 18 | 22 | 25 | 28  | 30  | 32  | 33  | 33  |
| 2 | 5  | 7  | 10 | 12 | 14 | 17 | 18  | 20  | 21  | 21  | 22  |
| 1 | 2  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9   | 10  | 10  | 11  | 11  |
| 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |

| Legenda    |  |
|------------|--|
| 81 – 100 V |  |
| 61 – 80 V  |  |
| 41 – 60 V  |  |
| 21 – 40 V  |  |
| 0 – 20 V   |  |

Hodnoty  
potenciálu

bychom určili pomocí vztahu  $E = -\text{grad } \varphi$ , kde derivace určíme pomocí diferencí. Přitom pro  $E_x$  bychom vytvořili další tabulky. Např. pro  $h = k = 0,5$  mm bychom hodnotu  $E_x$  v uzlu B2 určili jako  $(B2 - B1)/0.0005$  a  $E_y$  jako  $(B1 - B2)/0.0005$ . Pokud není známá „následující“ hodnota potenciálu, použijeme diferenci pomocí předešlé hodnoty. Např. pokud neznáme  $\varphi_1$  počítáme místo  $\partial\varphi/\partial x \approx (\varphi_1 - \varphi_0)/h$ .

ilustraci uvedeme pouze hodnoty  $E_x$  uvedené v následující tabulce:

|       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |     |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|-----|-----|
| 21800 | 22601 | 23783 | 25288 | 26976 | 28563 | 29593 | 29593 |      |      |     |     |
| 21601 | 22411 | 23621 | 25196 | 27026 | 28841 | 30108 | 30108 |      |      |     |     |
| 20995 | 21822 | 23095 | 24850 | 27091 | 29668 | 31890 | 31890 |      |      |     |     |
| 19970 | 20785 | 22089 | 24017 | 26819 | 30850 | 35894 | 35894 |      |      |     |     |
| 18523 | 19259 | 20458 | 22310 | 25318 | 31020 | 44942 | 44942 |      |      |     |     |
| 16694 | 17271 | 18173 | 19446 | 21124 | 22969 | 22969 | 9048  | 4004 | 1782 | 515 | 515 |
| 14569 | 14958 | 15516 | 16179 | 16764 | 16764 | 14919 | 9217  | 5186 | 2609 | 794 | 794 |
| 12253 | 12476 | 12753 | 12989 | 12989 | 12403 | 10725 | 7717  | 4914 | 2674 | 844 | 844 |
| 9836  | 9939  | 10034 | 10034 | 9799  | 9136  | 7862  | 6010  | 4081 | 2327 | 752 | 752 |
| 7377  | 7409  | 7409  | 7314  | 7036  | 6479  | 5577  | 4378  | 3075 | 1801 | 591 | 591 |
| 4912  | 4912  | 4880  | 4777  | 4554  | 4165  | 3588  | 2853  | 2038 | 1212 | 401 | 401 |
| 2453  | 2446  | 2421  | 2359  | 2239  | 2041  | 1759  | 1406  | 1013 | 606  | 201 | 201 |

I 1.39

S

odou sítí určete potenciály pro dvě rovnoběžné nabitě nekonečné desky vzdálené 12 cm em potenciálů 100 V a třetí deskou (nekonečný pás o šířce 4 cm) vloženou kolmo na obě desky lenosti 3 cm od desky s potenciálem 100 V.

Zvolíme osu  $x$  ve směru desky s nulovým potenciálem a osu  $y$  ve směru třetí desky. Pole ve sy  $z$  se nemění a tedy derivace podle  $z$  je nulová, takže můžeme uvažovat dvourozměrnou úlohu. jeme stejně jako v předešlém příkladu, pouze s tím rozdílem, že neznáme potenciál třetí desky. etrie na vertikální ose  $y$  plyne, že je nulový gradient potenciálu ve směru  $x$ . Ve velké vzdálenosti y (budeme předpokládat vzdálenost 12 cm) lze uvažovat, že se neprojeví vliv třetí vložené desky, e opět nulový gradient potenciálu ve směru  $x$  (sloupec M). Rozdělíme oblast na  $13 \times 13$  uzlů ( $k = m$ ) a vytvoříme následující tabulku ( $A4=A5=A6=A7=A8$ , protože na vodivé desce je stejný ál, pro výpočet potenciálu je možné zvolit libovolnou buňku, zvolili jsme A4). Sloupce D až J ime (sloupce C až L získáme kopírováním).

# 1. Elektrostatické pole

|    | A                    | B                      | C                      |
|----|----------------------|------------------------|------------------------|
| 1  | 100                  | 100                    | 100                    |
| 2  | $=(2*B2+A1+A3)/4$    | $=(A2+C2+B1+B3)/4$     | $=(B2+D2+C1+C3)/4$     |
| 3  | $=(2*B3+A2+A4)/4$    | $=(A3+C3+B2+B4)/4$     | $=(B3+D3+C2+C4)/4$     |
| 4  | $=(2*B4+A3+A5)/4$    | $=(A4+C4+B3+B5)/4$     | $=(B4+D4+C3+C5)/4$     |
| 5  | $=A4$                | $=(A5+C5+B4+B6)/4$     | $=(B5+D5+C4+C6)/4$     |
| 6  | $=A4$                | $=(A6+C6+B5+B7)/4$     | $=(B6+D6+C5+C7)/4$     |
| 7  | $=A4$                | $=(A7+C7+B6+B8)/4$     | $=(B7+D7+C6+C8)/4$     |
| 8  | $=A4$                | $=(A8+C8+B7+B9)/4$     | $=(B8+D8+C7+C9)/4$     |
| 9  | $=(2*B9+A8+A10)/4$   | $=(A9+C9+B8+B10)/4$    | $=(B9+D9+C8+C10)/4$    |
| 10 | $=(2*B10+A9+A11)/4$  | $=(A10+C10+B9+B11)/4$  | $=(B10+D10+C9+C11)/4$  |
| 11 | $=(2*B11+A10+A12)/4$ | $=(A11+C11+B10+B12)/4$ | $=(B11+D11+C10+C12)/4$ |
| 12 | $=(2*B12+A11+A13)/4$ | $=(A12+C12+B11+B13)/4$ | $=(B12+D12+C11+C13)/4$ |
| 13 | 0                    | 0                      | 0                      |

|    | K                      | L                      | M                    |
|----|------------------------|------------------------|----------------------|
| 1  | 100                    | 100                    | 100                  |
| 2  | $=(J2+L2+K1+K3)/4$     | $=(K2+M2+L1+L3)/4$     | $=(2*L2+M1+M3)/4$    |
| 3  | $=(J3+L3+K2+K4)/4$     | $=(K3+M3+L2+L4)/4$     | $=(2*L3+M2+M4)/4$    |
| 4  | $=(J4+L4+K3+K5)/4$     | $=(K4+M4+L3+L5)/4$     | $=(2*L4+M3+M5)/4$    |
| 5  | $=(J5+L5+K4+K6)/4$     | $=(K5+M5+L4+L6)/4$     | $=(2*L5+M4+M6)/4$    |
| 6  | $=(J6+L6+K5+K7)/4$     | $=(K6+M6+L5+L7)/4$     | $=(2*L6+M5+M7)/4$    |
| 7  | $=(J7+L7+K6+K8)/4$     | $=(K7+M7+L6+L8)/4$     | $=(2*L7+M6+M8)/4$    |
| 8  | $=(J8+L8+K7+K9)/4$     | $=(K8+M8+L7+L9)/4$     | $=(2*L8+M7+M9)/4$    |
| 9  | $=(J9+L9+K8+K10)/4$    | $=(K9+M9+L8+L10)/4$    | $=(2*L9+M8+M10)/4$   |
| 10 | $=(J10+L10+K9+K11)/4$  | $=(K10+M10+L9+L11)/4$  | $=(2*L10+M9+M11)/4$  |
| 11 | $=(J11+L11+K10+K12)/4$ | $=(K11+M11+L10+L12)/4$ | $=(2*L11+M10+M12)/4$ |
| 12 | $=(J12+L12+K11+K13)/4$ | $=(K12+M12+L11+L13)/4$ | $=(2*L12+M11+M13)/4$ |
| 13 | 0                      | 0                      | 0                    |

Po skončení iteračního výpočtu (postupujeme podle předešlého příkladu) dostaneme následující hodnoty potenciálu (odstupňované šedě).

|    | A   | B   | C   | D   | E   | F   | G   | H   | I   | J   | K   | L   | M   |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1  | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 2  | 96  | 96  | 95  | 95  | 94  | 94  | 93  | 93  | 93  | 93  | 93  | 92  | 92  |
| 3  | 92  | 92  | 91  | 90  | 89  | 88  | 87  | 86  | 86  | 85  | 85  | 85  | 85  |
| 4  | 90  | 89  | 87  | 84  | 83  | 81  | 80  | 79  | 78  | 78  | 77  | 77  | 77  |
| 5  | 90  | 86  | 82  | 79  | 76  | 74  | 73  | 72  | 71  | 70  | 69  | 69  | 69  |
| 6  | 90  | 83  | 77  | 73  | 70  | 67  | 65  | 64  | 63  | 62  | 61  | 61  | 61  |
| 7  | 90  | 79  | 71  | 66  | 62  | 59  | 57  | 56  | 55  | 54  | 53  | 53  | 53  |
| 8  | 90  | 72  | 63  | 57  | 54  | 51  | 49  | 47  | 46  | 45  | 45  | 45  | 44  |
| 9  | 61  | 56  | 51  | 47  | 44  | 41  | 40  | 38  | 37  | 37  | 36  | 36  | 36  |
| 10 | 43  | 41  | 38  | 36  | 33  | 32  | 30  | 29  | 28  | 28  | 27  | 27  | 27  |
| 11 | 27  | 27  | 25  | 24  | 22  | 21  | 20  | 20  | 19  | 19  | 18  | 18  | 18  |
| 12 | 13  | 13  | 13  | 12  | 11  | 11  | 10  | 10  | 10  | 9   | 9   | 9   | 9   |
| 13 | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |

## Příklad 1.40

C

Vyšetřete pole uvnitř příčné ploché válcové dutiny v nekonečném homogenním prostředí s osou rovnoběžnou se směrem pole  $E$ .

**Řešení:** Protože je pole rovnoběžné s osou válce, platí, že normálové složky  $D$  na plášti jsou nulové a na podstavách jsou stejné, tzn. ( $\sigma_f = 0$ ,  $D_d$  je pole uvnitř dutiny,  $n^0$  je jednotkový normálový vektor)

$$(D_d - D) \cdot n^0 = \sigma_f = 0, \quad D_{dn} = D, \quad D_{dn} = D = \epsilon E.$$

$$\epsilon E = \epsilon_0 E_{dn}, \quad E_{dn} = \epsilon_r E.$$

V příčné ploché dutině je tedy  $D$  stejný, ale  $E_{dn}$  je  $\epsilon_r$ -krát větší.

## 1. Elektrostatické pole

### klad 1.41

C

Vyšetřete pole uvnitř štíhlé podélné válcové dutiny v nekonečném homogenním prostředí s osou rovnoběžnou se směrem pole  $E$ .

**ení:** Pro tečné složky na plášti platí ( $E_d$  je intenzita pole uvnitř dutiny,  $n^0$  je jednotkový normálový vektor)

$$(E_d - E) \times n^0 = 0, \quad E_{dt} = E_t = E.$$

Zná, že ve štíhlé podélné dutině je intenzita elektrického pole stejná.

### klad 1.42

B

Vyšetřete pole uvnitř kulové dutiny o poloměru  $a$  v nekonečném homogenním prostředí s polem  $E$ .

**ení:** Na hranici dutiny indukuje vnější pole  $E$  náboj s proměnnou hustotou  $\sigma_b' = P \cdot n^0 = P \cos \psi$ , kde  $\psi$  je úhel mezi směrem pole  $E$  a vnějším jednotkovým normálovým vektorem  $n^0$  a  $P$  polarizace. Pro výpočet si povrch koule rozdělíme na velmi úzké pásy o ploše  $dS = 2\pi a \sin \psi \cdot a d\psi$  kolmé ke směru pole  $E$  a intenzita ve středu koule vlivem náboje  $\sigma'$  na pásu  $dS$  bude

$$dE_K' = \frac{PdS}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \psi = \frac{P2\pi a \sin \psi a d\psi}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \psi = \frac{Pd(\cos \psi)}{2\epsilon_0} \cos^2 \psi.$$

Integrací přes celý povrch koule dostaneme

$$E_K' = \int_0^\pi \frac{P}{2\epsilon_0} \cos^2 \psi d(\cos \psi) = -\frac{E\epsilon_0 \chi_e}{6\epsilon_0} [\cos^3 \psi]_0^\pi = \frac{E\chi_e}{3}.$$

Toto pole má stejný směr jako původní pole a proto výsledné pole je dáno součtem

$$E_{DK} = E \left( 1 + \frac{\chi_e}{3} \right) = E \left( \frac{\epsilon_r + 2}{3} \right).$$

**pámka:** Pro pole uvnitř osamocené koule umístěné v původně homogenním poli  $E$  bychom logicky dostali

$$E_K = E \left( \frac{3}{\epsilon_r + 2} \right).$$

### klad 1.43

D

Mějme rovinné rozhraní dvou dielektrik bez volných nábojů a o permitivitách  $\epsilon_1 = 1$  a  $\epsilon_2 = 4$ , v prostředí 1 je vektor intenzity elektrického pole  $E_1$  o velikosti 10 V/m, který svírá s rovinným rozhraním úhel  $\beta_1 = 45^\circ$ . Určete a) jak velký úhel  $\beta_2$  svírá vektor intenzity elektrického pole  $E_2$  v prostředí 2 s rovinným rozhraním, b) jak je velký vektor  $E_2$ .

**ení:** a) Na rozhraní dvou dielektrik obecně platí, že se sobě rovnají tečné složky vektoru intenzity elektrického pole  $E$  a normálové složky vektoru elektrické indukce  $D$ , tedy  $E_{1t} = E_{2t}$  a  $D_{1n} = D_{2n}$ . Jelikož  $D = \epsilon E$ , pak také  $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$ . V prostředí 1 platí  $\tan \beta_1 = E_{1n} / E_{1t}$ , obdobně v prostředí 2 platí (vedeme)

$$\tan \beta_2 = E_{2n} / E_{2t} = \epsilon_1 E_{1n} / \epsilon_2 E_{1t} = \tan \beta_1 \epsilon_1 / \epsilon_2$$

odtud konečně

$$\beta_2 = \arctg ([\epsilon_1 / \epsilon_2] \tan \beta_1) = \arctg (1/4 \tan 45^\circ) = \arctg (1/4) = 14^\circ$$

b) Amplitudu vektoru pole  $E_2$  v prostředí 2 určíme z jeho složek:

$$E_2^2 = (E_{2n})^2 + (E_{2t})^2 = ([\epsilon_1 / \epsilon_2] E_{1n})^2 + (E_{1t})^2 = (1/4 \cdot 7,07)^2 + 7,07^2 = 53,1 \text{ (V/m)}^2$$

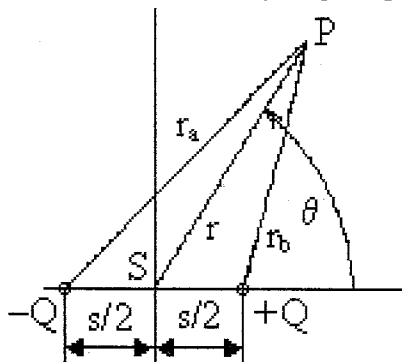
de  $E_{1n} = E_1 \sin \beta_1 = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ V/m}$  a  $E_{1t} = E_1 \cos \beta_1 = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ V/m}$

výsledná intenzita elektrického pole v prostředí 2 je tedy  $E = 7,3 \text{ V/m}$ .

## Příklad 1.44

C

Vyšetřete potenciál elektrického dipólu (dvou nábojů  $+Q$  a  $-Q$  vzdálených  $s$ ) ve vzdálenosti  $r \gg s$ .



**Řešení:** V bodě  $P$ , vzdáleném  $r \gg s$  od bodu  $S$ , který leží uprostřed spojnice obou nábojů, platí

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right),$$

kde  $r_a = r^2 + (s/2)^2 + rs \cos \theta$ . Dělíme-li obě strany  $r^2$ , dostaneme po malé úpravě

$$\frac{r}{r_a} = \left[ 1 + \left( \frac{s}{2r} \right)^2 + \frac{s}{r} \cos \theta \right]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{s^2}{4r^2} + \frac{s}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{s^2}{4r^2} + \frac{s}{r} \cos \theta \right)^2 - \dots$$

Zanedbáme-li členy  $(s/r)^3$  a vyšší, pak

$$\frac{r}{r_a} = 1 - \frac{s}{2r} \cos \theta + \frac{s^2}{4r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}.$$

Podobně

$$\frac{r}{r_b} = 1 + \frac{s}{2r} \cos \theta + \frac{s^2}{4r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

a proto

$$\varphi = \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta.$$

Poznamenejme, že potenciál dipólu klesá jako  $1/r^2$ , zatímco jednoho bodu se mění pouze jako  $1/r$ . Pokud zavedeme dipólový moment  $\mathbf{p} = Q\mathbf{s}$ , který směřuje od negativního ke kladnému náboji, pak

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}^\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

## Příklad 1.45

B

Odvoďte Poissonovu rovnici pro  $E$ .

**Řešení:** Platí  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{E})$ . V elektrostatickém poli platí  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , takže

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) = \text{grad}(\rho / \epsilon_0).$$

Stejná rovnice platí i pro jednotlivé pravoúhlé složky (to neplatí pro složky v jiných souřadnicových soustavách). Lze tedy odvodit pro jednotlivé složky  $E_x$ ,  $E_y$  a  $E_z$  podobné řešení jako pro potenciál a proto

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\nabla' \rho}{r} dV',$$

kde gradient  $\nabla'$  se vztahuje na čárkované souřadnice uvnitř objemu  $V'$ . Mnohem obvyklejší je ovšem používání Gaussovy věty (i když jsou oba integrály ekvivalentní, integrandy jsou samozřejmě různé).

## . STÁLÝ PROUD

### říklad 2.1

D

V elektronovém paprsku obrazovky prochází za jednu sekundu počet elektronů  $n = 5 \cdot 10^{14}$ . Náboj elektronu  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Jakému elektrickému proudu to odpovídá?

**ešení:** Proud

$$I = Q/t = -ne = -5 \cdot 10^{14} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = -8 \cdot 10^{-5} \text{ A} = -80 \text{ } \mu\text{A}.$$

naménko minus udává, že smysl proudu je opačný než směr pohybu elektronů (náboj elektronu je  $\text{iporný}$  a smysl proudu je definován směrem pohybu kladných nábojů).

### říklad 2.2

D

Vodič má délku  $l = 16$  m a kruhový průřez s průměrem  $d = 1,8$  mm. Vodičem prochází proud  $I = 14,5$  A a napětí mezi konci vodiče je  $U = 35,6$  V. Určete odpor a měrný odpor materiálu vodiče. rčete hustotu proudu a intenzitu elektrického pole

**ešení:** Odpor

$$R = U/I = 35,6 / 14,5 = 2,45 \text{ } \Omega.$$

Pro vodič s konstantním odporem po celé délce platí  $R = \rho l / S$ . Proto

$$\rho = RS / l = R \pi d^2 / (4l) = 0,39 \cdot 10^{-6} \text{ } \Omega\text{m}.$$

Hustota proudu (při rovnoměrném rozložení proudu)

$$J = I / S = I / (\pi d^2 / 4) = 5,7 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2 = 5,7 \text{ A/mm}^2.$$

Intenzita pole

$$E = J / \sigma = J \rho = 0,39 \cdot 10^{-6} \cdot 5,7 \cdot 10^6 = 2,22 \text{ V/m}.$$

Protože ve vodiči je homogenní pole, platí rovněž

$$E = U / l = 35,6 / 16 = 2,22 \text{ V/m}.$$

### říklad 2.3

D

Vypočtete výsledný odpor paralelní kombinace odporů  $R_1=1 \text{ } \Omega$ ,  $R_2=2 \text{ } \Omega$  a  $R_3=3 \text{ } \Omega$ .

**ešení:** Platí

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 11/6,$$

$$R = 6/11 = 0,545$$

### říklad 2.4

C

Napětí zdroje bylo měřeno voltmetrem, který má odpor  $1000 \text{ } \Omega$  na  $1 \text{ V}$  měřicího rozsahu. Při epnutí na rozsah  $120 \text{ V}$  bylo změřeno napětí  $U_1 = 115 \text{ V}$ . Po přepnutí na rozsah  $300 \text{ V}$  bylo změřeno pětí  $U_2 = 144 \text{ V}$ . Určete napětí nezatíženého zdroje  $U_i$  a jeho vnitřní odpor  $R_i$ . Určete proud krátko (se zkratovanými výstupními svorkami) pro tento zdroj.

**ešení:** Při rozsahu  $120 \text{ V}$  má voltmetr odpor  $R_1 = 120\,000 \text{ } \Omega$  a pro  $300 \text{ V}$  má voltmetr odpor  $= 300\,000 \text{ } \Omega$ . Proud pro obě měření jsou

$$I_1 = \frac{U_i}{R_i + R_1} = \frac{U_1}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{U_i}{R_i + R_2} = \frac{U_2}{R_2}.$$

oto

$$R_i = \frac{U_2 - U_1}{\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2}} \approx 60\,000\,\Omega,$$

$$U_i = \frac{U_1}{R_i} R_i + U_1 \approx 173\,\text{V}.$$

Pro zkratovaný zdroj platí

$$I = \frac{U_i}{R_i} = 2,9\,\text{mA}.$$

### Příklad 2.5

D

Vypočítejte odpor cívky navinuté na válcovou kostru o délce  $l_1 = 30\,\text{mm}$  a průměru  $d_1 = 50\,\text{mm}$ . Cívka má  $N = 1\,600$  závitů drátu o průměru  $d = 0,5\,\text{mm}$  (měď, měrný odpor  $\rho = 1,79 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}$ ). Vnější průměr cívky je  $d_2 = 86\,\text{mm}$ .

**Řešení:** Pro výpočet celkové délky  $l$  budeme uvažovat  $N$  „průměrných závitů“

$$l = N\pi(d_1 + d_2) / 2.$$

Odpor cívky je

$$R = \rho l / S = \rho N\pi(d_1 + d_2) / (2\pi d^2 / 4) = 2\rho N\pi(d_1 + d_2) / (\pi d^2) = 31,2\,\Omega.$$

### Příklad 2.6

D

Souosý kabel o vnitřním poloměru  $r_1 = 2\,\text{mm}$  a vnějším poloměru  $r_2 = 8\,\text{mm}$  má nedokonalé dielektrikum s měrným odporem  $\rho = 4,2 \times 10^{12}\,\Omega\text{m}$ . Určete svodový odpor a proud na jednotku délky kabelu, je-li mezi  $r_1$  a  $r_2$  napětí  $U = 3\,\text{kV}$ .

**Řešení:** Uvažujme proudové vlákno s průřezem  $2\pi r$  na jednotku délky kabelu (plášť válce o poloměru  $r$  a délce  $l$ ) a integrujeme od  $r_1$  do  $r_2$

$$R = \rho \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} = 0,92 \cdot 10^{12}\,\Omega,$$

$$\frac{I}{l} = \frac{U}{lR} = 3,24 \cdot 10^{-9}\,\text{A/m}.$$

*Poznámka:* Svodový odpor můžeme vypočítat analogií s elektrostatickým polem. Protože kapacita je  $C = 2\pi\epsilon l / \ln(r_2/r_1)$ , je  $G = 2\pi\sigma l / \ln(r_2/r_1)$ , takže pro odpor  $R = 1/G$  dostaneme stejný vztah jako přímou integrací s uvažováním měrného odporu.

### Příklad 2.7

D

Na cívce z měděného drátu byl při teplotě  $\vartheta_1 = 20\,^\circ\text{C}$  změřen odpor  $R_1 = 86,5\,\Omega$ . Po zahřátí cívky průchodem proudem byl změřen odpor  $R_2 = 99,8\,\Omega$ . Určete teplotu  $\vartheta_2$  (měď má teplotní součinitel odporu  $\alpha_t = 0,00392\,\text{K}^{-1}$ ).

**Řešení:** Změna odporu je

$$R_2 = R_1(1 + \alpha_t \Delta\vartheta).$$

Tedy

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta = \vartheta_1 + (R_2/R_1 - 1) / \alpha_t = 59,2\,^\circ\text{C}.$$

### Příklad 2.8

D

Elektrické topné těleso má příkon  $P = 800\,\text{W}$ . Stanovte odpor a proud při napětí  $U = 220\,\text{V}$ .

**Řešení:** Příkon  $P = UI = U^2/R$  a tedy

$$R = U^2 / P = 60,5\,\Omega,$$

## 2. Stálý proud

$$I = P / U = 3,64 \text{ A.}$$

### Příklad 2.9

D

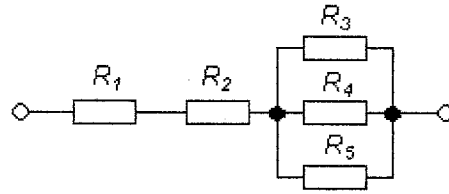
Určete výsledný odpor  $R$  kombinace na obr.

**Řešení:** Pro odpor paralelní kombinace  $R_p$  platí

$$1/R_p = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5.$$

Výsledný odpor

$$R = R_1 + R_2 + R_p.$$

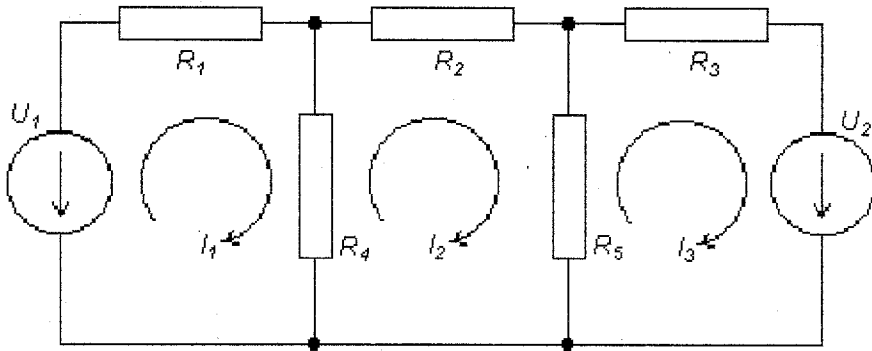


### Příklad 2.10

S

Metodou smyčkových proudů určete proudy  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$ . Je dáno  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 4 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$ ,  $R_5 = 13 \Omega$ ,  $U_1 = 50 \text{ V}$  a  $U_2 = 100 \text{ V}$ .

**Řešení:** Pro jednotlivé smyčky platí



$$\begin{array}{rrcr} (R_1 + R_4) I_1 & -R_4 I_2 & +0 & = U_1, \\ -R_4 I_1 & +(R_2 + R_4 + R_5) I_2 & -R_5 I_3 & = 0, \\ 0 & -R_5 I_2 & +(R_3 + R_5) I_3 & = -U_2. \end{array}$$

Tyto rovnice lze psát jako  $\mathbf{R} \mathbf{I} = \mathbf{U}$ , kde matici odporů  $\mathbf{R}$  pro metodu smyčkových proudů sestavíme následujícím způsobem: Prvky  $R_{mn}$  na hlavní diagonále jsou dány součtem odporů zapojených ve smyčce  $n$  a  $R_{mn}$  je záporně vzatý součet odporů, které jsou společné pro smyčku  $m$  a  $n$ . Pověšme si, že matice odporů  $\mathbf{R}$  je symetrická podle hlavní diagonály. Příslušnou matici odporů  $\mathbf{R}$  a sloupcový vektor napětí  $\mathbf{u}$  uložíme do tabulek.

Pomocí tabulkového procesoru (příkazů pro inverzi a součin matic) získáme řešení  $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

Matice odporů  $\mathbf{R}$  a napětí  $\mathbf{U}$  jsou v následujících tabulkách

|        |         |         |
|--------|---------|---------|
| 6,000  | -2,000  | 0,000   |
| -2,000 | 18,000  | -13,000 |
| 0,000  | -13,000 | 17,000  |

|          |
|----------|
| 50,000   |
| 0,000    |
| -100,000 |

Pomocí příkazu pro inverzi získáme inverzní matici  $\mathbf{R}^{-1}$ . Pomocí příkazu pro součin matic násobíme inverzní matici vektorem napětí, takže dostaneme  $\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}$ . I když v tomto případě by bylo možné poměrně snadno řešit soustavu 3 rovnic pro 3 neznámé proudy, je zřejmé, že pro více smyček je nepraktické řešit rozsáhlé soustavy lineárních rovnic.

Inverzní matice  $\mathbf{R}^{-1}$

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 0,182 | 0,045 | 0,034 |
| 0,045 | 0,135 | 0,103 |
| 0,034 | 0,103 | 0,138 |

Matice proudů  $\mathbf{I}$

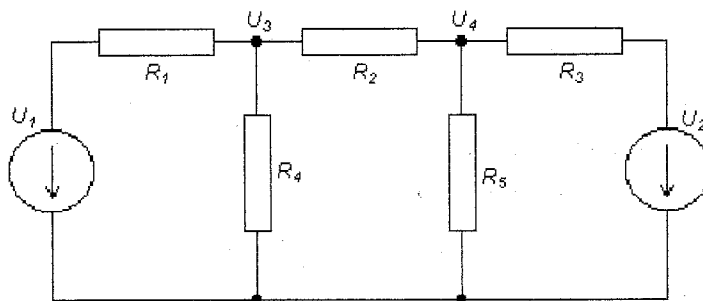
|       |         |
|-------|---------|
| $I_1$ | 5,637   |
| $I_2$ | -8,090  |
| $I_3$ | -12,069 |

### Příklad 2.11

D

Metodou uzlových napětí určete napětí  $U_3$  a  $U_4$ .

## 2. Stálý proud



**Řešení:** Pro jednotlivé uzly platí (napětí  $U_1$  a  $U_2$  jsou dána napěťovými zdroji)

$$\frac{U_3 - U_1}{R_1} + \frac{U_3}{R_4} + \frac{U_3 - U_4}{R_2} = 0,$$

$$\frac{U_4 - U_3}{R_2} + \frac{U_4}{R_5} + \frac{U_4 - U_2}{R_3} = 0.$$

### Příklad 2.12

**B**

Určete potenciál vodivé kulové elektrody, umístěné v rozlehlém prostředí s vodivostí  $\sigma$  mnohem menší než je vodivost elektrody. Přívod proudu  $I$  k elektrodě je proveden slabým izolovaným vodičem.

**Řešení:** Jedná se o pole osamocené vodivé koule, kde povrch koule má stejný potenciál. Proudové čáry vystupují kolmo z povrchu a mají směr radiálních paprsků. V místech stejně vzdálených od středu koule je tedy hustota proudu stejně velká a dána vztahem

$$I = \oint_S J_r dS$$

a tedy

$$J_r = \frac{I}{4\pi r^2}.$$

Intenzita ve vzdálenosti  $r$  od středu koule

$$E_r = \frac{J_r}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}.$$

Hodnota potenciálu daného místa je

$$\varphi_r = \frac{I}{4\pi\sigma r} + K.$$

Předpokládáme-li, že pro  $\varphi_{r \rightarrow \infty} = 0$ , je

$$\varphi_r = \frac{I}{4\pi\sigma r}.$$

### Příklad 2.13

**B**

Kovová uzemňovací elektroda (koule o poloměru  $d/2$ ) je umístěna v hloubce  $h \gg d$  v zemi s vodivostí  $\sigma$  mnohem menší než je vodivost elektrody. Je napájena proudem  $I$  izolovaným vodičem. Určete průběh intenzity elektrického pole na povrchu země a místo, kde leží maximum této intenzity a její velikost v tomto bodě. Určete krokové napětí.

**Řešení:** Na povrchu je normálová složka hustoty proudu rovna nule. Jedná se o rozhraní vodič (země) – nevodič (vzduch). Úlohu řešíme metodou zrcadlení. Ve vzdálenosti  $h$  nad povrchem země umístíme druhý – zrcadlový zdroj proudu. Směr proudu volíme s ohledem na to, že proudová čára při povrchu země musí sledovat rozhraní. Vzhledem k tomu, že  $h \gg d$ , můžeme pokládat zdroje proudu za bodové.

## 2. Stálý proud

Na povrchu země je výsledný potenciál v bodě A dán superpozicí potenciálů vyvolaných oběma zdroji  $\varphi_v = \varphi_1 + \varphi_2$ , kde potenciál podle předešlého příkladu je

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\sigma r_2}.$$

Protože na povrchu země je  $r_1 = r_2 = r$ , platí

$$\varphi_v = \frac{I}{2\pi\sigma r} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{x_A^2 + h^2}},$$

kde  $\sigma$  je měrná vodivost země.

Intenzita elektrického pole má na povrchu země pouze složku  $E_x$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{2x}{2(x_A^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{x}{(x_A^2 + h^2)^{3/2}}$$

Maximum určíme z podmínky  $\frac{dE_x}{dx} = 0$ , tj.

$$\frac{I}{2\pi\sigma} \frac{(x_m^2 + h^2)^{3/2} - x_m \cdot \frac{3}{2}(x_m^2 + h^2)^{1/2} \cdot 2x_m}{(x_m^2 + h^2)^3} = 0 \quad |_{x_1 = x_m},$$

Tedy

$$x_m^2 + h^2 = 3x_m^2 \Rightarrow x_m = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Největší intenzita pole  $E_m$  je ve vzdálenosti  $x = h/\sqrt{2}$  a má hodnotu

$$E_m = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{h}{\sqrt{2\left(\frac{h^2}{2} + h^2\right)^{3/2}}} = \frac{I}{\sqrt{27}\pi\sigma h^2}.$$

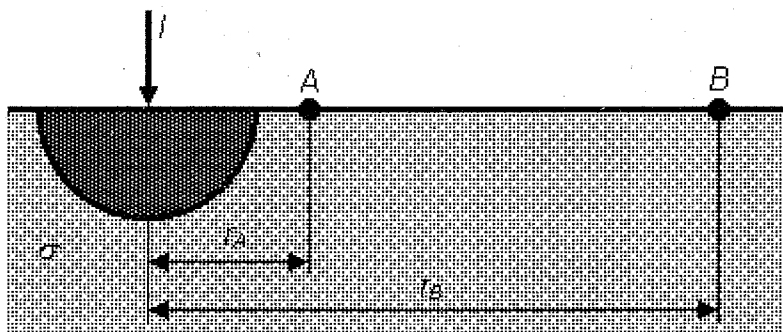
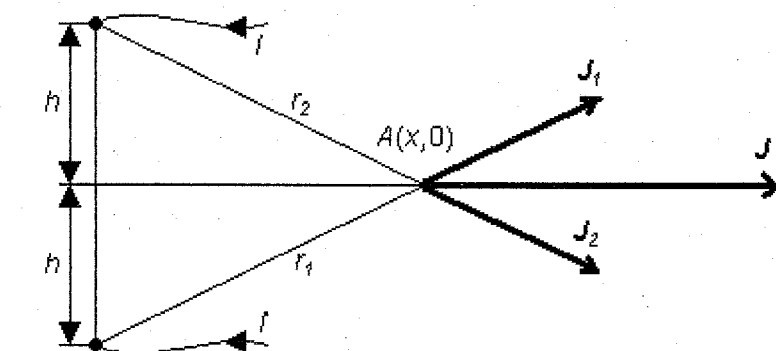
Krokové napětí je definováno rozdílem potenciálů mezi body A a B na zemi, vzdálenými od sebe 1 m ( $x_A = x_B - 1$  pro  $r_A, i_B \gg d/2$ )

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[ \frac{1}{\sqrt{x_A^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + h^2}} \right].$$

### Příklad 2.14

Vypočítejte krokové napětí vodivé uzemňovací polokoule, kterou prochází do země proud  $I = 100$  A, ve vzdálenosti  $r_A = 5$  m. Průměr polokoule je 0,5 m, vodivost země  $\sigma = 2 \cdot 10^{-3}$  S/m.

**Řešení:** Rozložení pole uvnitř země je stejné jako kdyby sjednalo o osamocenou kouli uvnitř rozlehlé země. Protože je



## 2. Stálý proud

proud rozložen na poloviční ploše, je hustota proudu a intenzita pole dvojnásobná  $J_r = I/(2\pi r^2)$ ,  $E_r = I/(2\pi\sigma r^2)$  a potenciál pro  $\varphi_{r \rightarrow \infty} = 0$  je  $\varphi_r = I/(2\pi\sigma r)$ .

Krokové napětí je definováno rozdílem potenciálů mezi body  $A$  a  $B$  vzdálenými od sebe 1 m

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] = 265 \text{ V.}$$

### Příklad 2.15

C

Nechť uvnitř homogenního izotropního tělesa s měrnou vodivostí  $\sigma$  existuje v okamžiku  $t = 0$  volný náboj  $\rho_0$ . Jak se bude tento náboj měnit s časem pro měď ( $\sigma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ), polovodič ( $\sigma = 100 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ) a izolant ( $\sigma = 10^{-12} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ). Předpokládejme, že  $\varepsilon_r = 3$ .

**Řešení:** Z rovnice kontinuity plyne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma \rho}{\varepsilon_r \varepsilon_0}, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\right)$$

a proto relaxační doba  $T = \varepsilon_0 \varepsilon_r / \sigma$  bude pro měď  $T_{Cu} \approx 5 \cdot 10^{-19}$  s, polovodič  $T_s \approx 3 \cdot 10^{-13}$  s a izolant  $T_i \approx 30$  s.

### Příklad 2.16

D

Akumulátorová baterie má napětí naprázdno  $U_0 = 10$  V. Odebírá-li se proud  $I = 10$  A, je její svorkové napětí  $U_s = 9,5$  V. Stanovte vnitřní odpor baterie.

**Řešení:** Pro napětí  $U_s$  a vnitřní odpor  $R_i$  platí

$$U_s = U - IR_i,$$

$$R_i = (U - U_s) / I = 0,05 \Omega.$$

### Příklad 2.17

A

Ve vakuové diodě s rovinnými elektrodami vystupují elektrony z katody v rovině  $x = 0$  s potenciálem  $\varphi_k = 0$  a pohybují se k anodě v rovině  $x = a$ , která je připojená na napětí  $U$  (potenciál  $\varphi_a > \varphi_k$ ). Metodou přímé integrace Poissonovy rovnice určete  $E(x)$ ,  $\varphi(x)$  a hustotu proudu v prostoru mezi elektrodami. Předpokládejte, že elektrony vystupují z katody s nulovou rychlostí, mezi anodou a katodou jsou pouze elektrony a počet elektronů blízko katody je mnohem větší než počet elektronů, který dopadá na anodu.

**Řešení:** Hustota nábojů se mění se vzdáleností, tzn.  $\rho = \rho_0(x)$  a proto použijeme Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_0(x)}{\varepsilon_0}.$$

Při pohybu elektronů se mění potenciální energie  $\varphi e$ , kde  $e$  je náboj elektronů, na kinetickou energii  $mv^2/2$ , kde  $m$  je hmotnost elektronu. Takže rychlost elektronů  $v$  bude  $v = (2e\varphi/m)^{1/2}$ .

Hustota proudu bude dána rychlostí a hustotou elektronů a v daném místě  $x$  je konstantní

$$J = -v\rho(x),$$

takže

$$-\rho = J/v = J(2e\varphi/m)^{-1/2}, \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = J \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right) \varphi^{-1/2} = JK_1 \varphi^{-1/2},$$

kde  $K_1$  je konstanta uvnitř závorek. I když  $J$  je také konstanta, je uvedena samostatně, protože nás zajímá ve výrazu pro  $\varphi_A$ . Násobíme obě strany 2  $(d\varphi/dx) dx$  a integrujeme, pak

$$\int 2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right) \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) dx = 2K_1 J \int \varphi^{-1/2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right) dx = 2K_1 J \int \varphi^{-1/2} d\varphi,$$

takže

$$\int \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] dx = \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = 2K_1 J \frac{\varphi^{1/2}}{1/2} + C_1,$$

Protože pro  $x=0$  je  $\varphi=0$  a  $(d\varphi/dx)=0$ , bude  $C_1=0$  a tedy

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{4K_1 J} \varphi^{1/4}, \quad \int \varphi^{-1/4} d\varphi = \sqrt{4K_1 J} \int dx, \quad \frac{4}{3} \varphi^{3/4} = \sqrt{4K_1 J} x + C_2.$$

Protože pro  $x=0$  je  $\varphi_k=0$  a  $(d\varphi_k/dx)=0$ , bude  $C_2=0$  a pro  $x=a$ ,  $\varphi=\varphi_a=U$

$$J^{1/2} = \left( \frac{4}{3a\sqrt{4K_1}} \right) U^{3/4} = \sqrt{K} U^{3/4},$$

kde  $K^{1/2}$  je konstanta rovná výrazu v závorce. Umocněním dostaneme Child-Langmuirův třípolovinový zákon

$$J = K U^{3/2}.$$

### Příklad 2.18

D

Dvou vodičové vedení má délku  $l$  [m] a průřez  $S$  [mm<sup>2</sup>]. Stanovte největší výkon, který lze vedením přenášet, nemá-li být účinnost (daná poměrem příkonu spotřebiče na konci vedení k výkonu zdroje na začátku vedení) menší než  $\eta$ . Udejte, jak se tento výkon změní, zvýší-li se použité napětí  $n$  krát.

**Řešení:** Výkon zdroje na začátku vedení je  $P_1 = U_1 I$ , kde  $U_1$  je napětí zdroje a  $I$  je proud ve vedení (současně proud zdroje a proud spotřebiče). Výkon ztracený odporem vedení je  $P_z = R_v I^2$ , kde  $R_v$  je odpor vedení (obou vodičů dvou vodičového vedení). Příkon spotřebiče je  $P_2 = P_1 - P_z$  a účinnost je

$$\eta = P_2 / P_1 = 1 - P_z / P_1.$$

Dosadíme  $P_z = R_v I^2$  a  $I^2 = P_1^2 / U_1^2$  a dostaneme

$$P_1 = (1 - \eta) U_1^2 / R_v,$$

kde  $R_v = 2l/(\sigma S)$  pro dvou vodičové vedení délky  $l$ , průřezu  $S$  a  $\sigma$  je měrná vodivost.

Je zřejmé, že při stejném odporu vedení a stejné účinnosti roste přenášený výkon s druhou mocninou použitého napětí; při napětí  $n$  krát vyšším je přípustný výkon  $n^2$  krát větší. To je důvod použití vysokého napětí k přenosu elektrické energie na velké vzdálenosti.

### Příklad 2.19

D

Žárovka se označuje podle výkonu  $P_r$  rozptýleného ve vlákně, když je napětí žárovky 220 V (část rozptýlené energie se přemění na viditelné světlo). Určete proud a odpor 100 W žárovky. Jestliže žárovka je v provozu 24 h, jaká je spotřebovaná energie?

**Řešení:** Proud

$$I = P_r / U = 100 / 220 = 0,45 \text{ A}.$$

Odpor

$$R = U / I = U^2 / P_r = 220^2 / 100 = 484 \Omega.$$

Spotřebovaná energie

$$W = P_r t = 100 \text{ [W]} \cdot 24 \text{ [h]} = 0,1 \text{ [kW]} \cdot 24 \text{ [h]} = 2,4 \text{ kWh}.$$

### Příklad 2.20

D

Určete hodnotu  $U_1$ , jestliže  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $U_2 = 20 \text{ V}$  a proud a)  $I = 2 \text{ A}$  (teče proti směru hodinových ručiček), b)  $I = -2 \text{ A}$  (teče po směru hodinových ručiček).

## 2. Stálý proud

**Řešení:** Pro smyčku platí (bez ohledu na hodnotu proudu, je-li kladná, nebo záporná) pro danou orientaci smyčky

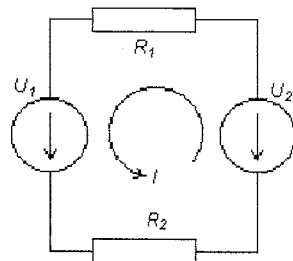
$$U_1 = -R_2 I + U_2 - R_1 I$$

Pro  $I = 2 \text{ A}$  platí

$$U_1 = -6 + 20 - 10 = 4 \text{ V.}$$

a pro  $I = -2 \text{ A}$

$$U_1 = -R_2 I + U_2 - R_1 I = 6 + 20 + 10 = 36 \text{ V.}$$



### Příklad 2.21

D

Baterie pro ruční svítilnu s  $U_i = 3 \text{ V}$  a  $R_i = 0,6 \Omega$  dává při provozu proud  $1,5 \text{ A}$ . Určete celkový výkon zdroje, výkon přeměněný na teplo ve vnitřním odporu zdroje (rozptýlený výkon) a výstupní výkon baterie.

**Řešení:** Celkový výkon zdroje  $P_z$

$$P_z = I U_i = 4,5 \text{ W.}$$

Rozptýlený výkon

$$P_i = R_i I^2 = 1,35 \text{ W}$$

Výstupní výkon baterie

$$P = UI = (U_i - R_i I)I = 3,15 \text{ W.}$$

### Příklad 2.22

B

Na rozlehlou kovovou folii s konstantní tloušťkou  $d$  a konstantní měrnou vodivostí  $\sigma$  jsou přiloženy dvě elektrody kruhového průřezu o poloměru  $r$ , jejichž středy jsou vzdálené  $b$ , které do folie přivádí proud. Jakému případu elektrostatického pole odpovídá proudové pole ve folii?

**Řešení:** Proudové pole ve folii odpovídá elektrostatickému poli dvou rovnoběžných vodivých válců s náboji  $+\tau$  a  $-\tau$  na jednotku délky. Protože kapacita na jednotku délky těchto vodičů je

$$\frac{C}{l} \approx \frac{\pi \epsilon}{\ln(b/r)},$$

je vodivost na jednotku délky

$$\frac{G}{l} \approx \frac{\pi \sigma}{\ln(b/r)}.$$

Proto pro folii s tloušťkou  $d$  je odpor

$$R \approx \frac{1}{\pi \sigma d} \ln(b/r).$$

### Příklad 2.23

D

Jak dlouho se bude nabíjet akumulátor s kapacitou  $Q = 35 \text{ Ah}$  proudem  $I = 3 \text{ A}$ , zanedbáme-li malé ztráty. Určete náboj v C.

**Řešení:** Doba nabíjení

$$t = Q/I = 35/3 = 11,67 \text{ hodin.}$$

Náboj vyjádřený v C je  $Q = 35 \text{ Ah} = 35 \cdot 3600 = 126\,000 \text{ C}$ .

### Příklad 2.24

D

Výkon elektromotoru je  $P = 3,7 \text{ kW}$ . Účinnost je  $\eta = 82 \%$ . Určete příkon motoru. Jakou spotřebu naměří elektroměr po 8 hod. provozu?

**Řešení:** Příkon motoru, který odebíráme ze sítě, je

## 2. Stálý proud

$$P_p = P / \eta = 3,7 / 0,82 = 4,5 \text{ kW.}$$

Spotřeba (práce) bude

$$A = P t = 8 \cdot 4,5 = 36 \text{ kWh.}$$

### Příklad 2.25

D

Žehlička má příkon  $P_p = 1\,200 \text{ W}$  při napětí  $U = 220 \text{ V}$ . Určete její odpor.

**Řešení:** Odpor  $R = U^2/P_p = 220^2 / 1200 = 40,3 \, \Omega$ .

### Příklad 2.26

D

Elektrický náboj, který prochází průřezem vodiče je  $Q(t) = 6,5 t^2 + 3,5 \text{ C}$  v době mezi 0 a 8 s. Určete vztah pro proud  $I(t)$  v tomto časovém intervalu a proud v čase  $t = 3,4 \text{ s}$

**Řešení:** Proud v daném časovém intervalu a pro daný čas jsou

$$I(t) = dQ/dt = 13 t, \quad I(3,4) = 44,2 \text{ A.}$$

### Příklad 2.27

C

Určete střední dobu mezi srážkami s atomy pro měď při  $20^\circ\text{C}$  ( $\sigma = 5,98 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ ), za předpokladu, že existuje jeden volný elektron na jeden atom (hustota vodivých elektronů  $N = 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ). Náboj a hmotnost elektronu jsou  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  a  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

**Řešení:** Při působení stálého elektrického pole působí na elektron síla  $F = -eE$ , která vytváří zrychlení  $a = F/m = -eE/m$  a tedy rychlost  $v = at$ . Protože střední doba mezi srážkami s atomy je  $\tau_s$ , pohybuje se mrak vodivých elektronů konstantní rychlostí  $v_d = a \tau_s = -\tau_s eE/m$  a proudová hustota

$$J = -Ne v_d = -Ne \tau_s eE/m = \sigma E,$$

$$\tau_s = \sigma m / (Ne^2) = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s.}$$

### Příklad 2.28

C

Odhadněte hustotu volných elektronů v křemíku za předpokladu, že střední doba  $\tau_s$  je stejná jako pro měď v předešlém příkladu a vodivost křemíku  $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ S/m}$ .

**Řešení:** Hustota volných elektronů v křemíku se rovná zhruba hustotě děr a proto poloviční hustotě nosičů. Podle předchozího příkladu platí

$$N_e e^2 \tau_s E / m = Ne^2 \tau_s E / (2m) = \sigma E,$$

$$N_e = \sigma m / (2 \tau_s e^2) = 1,6 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

a proto je o více než 11 řádů nižší než hustota vodivých elektronů v mědi.

### Příklad 2.29

D

Pro diodu s přechodem PN lze odvodit velmi přesný výraz pro proud

$$I = I_0 [\exp(eU/kT) - 1],$$

kde  $I_0$  je parametr, který závisí na konkrétní diodě,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  je Boltzmannova konstanta,  $T$  je teplota [K],  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  a  $U$  napětí přechodu PN. Použitím  $I_0 = 10^{-6} \text{ A}$  určete proud a odpor pro  $20^\circ\text{C}$  a) pro  $U = 0,2 \text{ V}$ , b)  $U = -0,2 \text{ V}$ .

**Řešení:** Pro  $U = 0,2 \text{ V}$  je proud a odpor

$$I = 10^{-6} \{ \exp[1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2 / (293 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23})] - 1 \} = 2,7 \text{ mA}; \quad R = U/I = 74 \, \Omega.$$

Pro  $U = -0,2 \text{ V}$  je proud a odpor

$$I = 10^{-6} \{ \exp[-1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2 / (293 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23})] - 1 \} = -1 \mu\text{A}; \quad R = U/I = 200 \text{ k}\Omega.$$

## Příklad 2.30

D

Kovový vodič má při  $t = 20^\circ\text{C}$  odpor  $40\text{ m}\Omega$ . Vodič se roztaví a úplně použije pro výrobu nového vodiče, který má třikrát větší délku než původní vodič. Jaký je odpor nového vodiče pro  $t = 20^\circ\text{C}$ ?

**Řešení:** Protože objem vodiče se nezmění, bude vodič třikrát delší ( $l' = 3l$ ), ale průřez se zmenší třikrát ( $S' = S/3$ ). Proto odpor nového vodiče bude

$$R' = \frac{l'}{\sigma S'} = \frac{3l}{\sigma S/3} = \frac{9l}{\sigma S} = 9R = 360\text{ m}\Omega$$

## Příklad 2.31

D

Stanovte podmínku rovnováhy Wheatstonova můstku podle levého obrázku, tzn. podmínku toho, aby napětí mezi uzly  $B$  a  $D$  bylo nulové. Udejte proud galvanometru, pokud se rovnováhy poruší změnou odporu  $R_3$  o  $\Delta R_3 \ll R_3$ ?

**Řešení:** Odporů můstku  $R_1$  a  $R_3$  tvoří dělič napětí napájený ze zdroje napětí  $U$ . Druhá dvojice odporů  $R_2$  a  $R_4$  tvoří druhý dělič, napájený dělič ze stejného zdroje. Pro vyvážený můstek musí platit

$$U_B = U \frac{R_3}{R_1 + R_3} = U_D = U \frac{R_4}{R_2 + R_4};$$

$$R_3(R_2 + R_4) = R_4(R_1 + R_3).$$

Tedy

$$R_2 R_3 = R_1 R_4; \quad R_1/R_3 = R_2/R_4.$$

Při změně odporu o  $\Delta R_3$  platí ( $\Delta U_g$  je změna napětí galvanometru, tzn. napětí mezi uzly  $B$  a  $D$ )

$$\Delta U_g = U_B - U_D = U \frac{R_3}{R_1 + R_3} - U \frac{R_4}{R_2 + R_4}.$$

Pro malé změny platí přibližně

$$\frac{\Delta U_g}{\Delta R_3} \approx \frac{dU_g}{dR_3} = U \frac{R_1}{(R_1 + R_3)^2}; \quad \Delta U_g \approx U \frac{R_1}{(R_1 + R_3)^2} \Delta R_3.$$

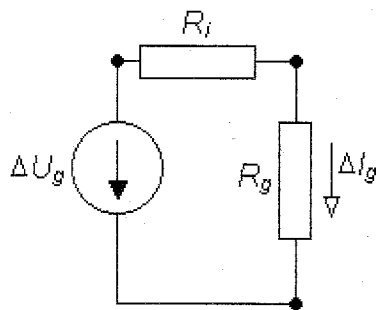
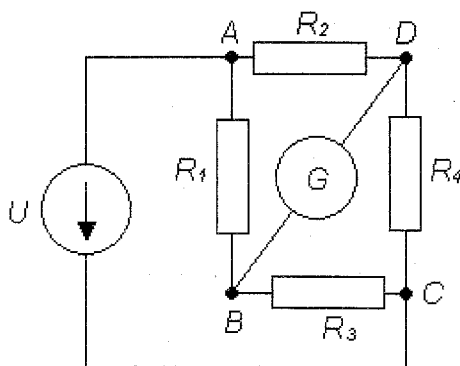
Podle Théveninova teoremu se můstek chová jako zdroj napětí  $\Delta U_g$  (napětí mezi body  $B$ ,  $D$  při nezapojeném galvanometru), který má vnitřní odpor  $R_i$ , jehož velikost zjistíme následující úvahou: Zavedeme-li při měření odporu  $R_i$  do vyváženého můstku proud svorkami  $B$ ,  $D$ , nevyvolá tento proud mezi uzly  $A$ ,  $C$ , pokud jsou rozpojeny, žádné napětí a proto ani žádný proud, neboť z podmínky rovnováhy  $R_2 R_3 = R_1 R_4$  plyne také  $R_1/R_2 = R_3/R_4$ , takže změříme stejný odpor, jako kdyby uzly  $A$ ,  $C$  nebyly spojeny. Hledaný odpor  $R_i$  je tedy dán výsledným spojením dvou paralelních větví  $R_1 + R_2$  a  $R_3 + R_4$

$$R_i = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Výsledný proud galvanometru  $\Delta I_g$  se určí pomocí náhradního schéma na pravém obrázku, kde je zobrazeno napětí ideálního zdroje  $\Delta U_g$ , vnitřní odpor  $R_i$  a odpor galvanometru  $R_g$

$$\Delta I_g \approx \Delta U_g \frac{1}{R_i + R_g}.$$

**Poznámka:** Vztahy pro  $\Delta U_g$  a  $\Delta I_g$  jsou odvozeny za předpokladu malé odchylky od vyváženého stavu, kdy  $\Delta R_3 \ll R_3$ . Pro větší změny  $\Delta R_3$  není závislost  $\Delta U_g$  na  $\Delta R_3$  lineární a proto i odpor  $R_i$  je závislý na  $\Delta R_3$ .



## 2. Stálý proud

### Příklad 2.32

S

Pro analogové modelování elektrostatických polí lze použít elektrolytické vany, kdy se do vodivé kapaliny ponoří elektrody ve tvaru modelovaných (obecných) válců. Potenciál měříme na jednotlivých místech sondami, které nesmí deformovat pole. Ukažte, proč toto pole je analogické elektrostatickému poli a jak lze toto pole modelovat na počítači.

**Řešení:** Pro potenciál platí Laplaceova rovnice, kterou modelujeme pomocí tabulkového procesoru stejně jako v případě elektrostatického pole. Obtíže může způsobit stanovení okrajových podmínek (rozhraní vany a kapaliny), které se musí pečlivě uvážit.

### Příklad 2.33

D

Vypočítejte spotřebu paliva, má-li trakční vozidlo elektrické trakce vykonat práci 1 MWh. Účinnost trakčního vozidla je  $\eta_{TV} = 0,92$ ; účinnost napájecí stanice  $\eta_{NS} = 0,89$ ; účinnost trakčního vedení  $\eta_{EV} = 0,95$  a účinnost napájecího vedení z elektrárny  $\eta_T = 0,85$ . a) Pro fosilní palivo – uhlí v parní elektrárně s účinností  $\eta_E = 33\%$ . Tepelný obsah paliva – uhlí  $q = 7 \cdot 10^3$  kWh/t. b) Pro uran 235 v jaderném reaktoru, kde tepelný obsah jaderného paliva  $q_u = 2,7 \cdot 10^7$  kWh/kg a účinnost jaderné elektrárny  $\eta_{EJ} = 36\%$ .

**Řešení:** a) Účinnost celého řetězce toku energie pro parní elektrárnu

$$\eta_{cel} = \eta_{TV} \cdot \eta_{NS} \cdot \eta_{EV} \cdot \eta_T \cdot \eta_E = 0,92 \cdot 0,95 \cdot 0,85 \cdot 0,89 \cdot 0,33 = 0,218$$

Pro vykonání trakční práce 1 MWh je nutno dodat energii

$$A_1 = \frac{A_2}{\eta_{cel}} = \frac{1 \cdot 10^3}{0,218} = 4587,1 \text{ kWh}$$

Potřebné množství fosilního paliva

$$Q = \frac{A_1}{q} = \frac{4587,1}{7 \cdot 10^3} = 0,655 \text{ t uhlí.}$$

b) Účinnost celého řetězce toku energie pro jaderný reaktor

$$\eta_{cel} = 0,92 \cdot 0,95 \cdot 0,85 \cdot 0,89 \cdot 0,36 = 0,238$$

Dodaná energie

$$A_1 = \frac{1}{\eta_{cel}} = \frac{1 \cdot 10^3}{0,238} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ kWh}$$

Spotřeba jaderného paliva reaktoru

$$Q = \frac{A_1}{q_u} = \frac{4 \cdot 10^3}{2,7 \cdot 10^7} = 1,48 \cdot 10^{-4} \text{ kg uranu.}$$

*Poznámka:* Pro trolejbus je spotřeba 110 kWh/100 km a pro autobus je spotřeba 40 l nafty/100 km.

### Příklad 2.34

D

Urči, v jakých mezích se může pohybovat teplota, nemá-li se odpor manganinového drátku změnit více než o jedno promile. Jaké je rozmezí teplot pro měď?

**Řešení:** Potřebné hodnoty  $\alpha$  je nutno najít v tabulkách.

Ze vztahu  $R_g = R_{g_0} (1 + \alpha \Delta g)$  vyplývá, že součin  $\alpha \cdot \Delta g$  může být maximálně roven 0,001.

$$\text{Pro manganin je } \Delta g = \frac{0,001}{\alpha} = \frac{0,001}{0,00002} = 50^\circ \text{C,}$$

$$\text{pro měď } \Delta g = \frac{0,001}{0,004} = 0,25^\circ \text{C.}$$

## 2. Stálý proud

### Příklad 2.35

D

Jaký je stejnosměrný odpor vinutí  $R_2$  jedné fáze motoru při průměrné teplotě vinutí  $\vartheta_2$ , jestliže při teplotě  $\vartheta_1$  jsme naměřili odpor  $R_1$ ? Vinutí je z mědi (teplotní součinitel odporu mědi  $\alpha_{Cu}$  známe) a teplota okolí se během zatížení nezměnila. Dáno  $R_1 = 2,2 \Omega$ ;  $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_2 = 60^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_{Cu} = 3,92 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

**Řešení:** Odpor se mění s teplotou podle vztahu

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha_{Cu} (\vartheta_2 - \vartheta_1)]$$

Po dosazení do vztahu dostaneme velikost odporu vinutí při teplotě  $60^\circ\text{C}$

$$R_2 = 2,2 [1 + 3,92 \cdot 10^{-3} (60 - 20)] = 2,55 \Omega$$

### Příklad 2.36

D

Po dlouhodobém odstavení pece při teplotě  $\vartheta_1$  jsme naměřili odpor vyhřívací spirály  $R_1$ . Po delší době provozu jsme naměřili odpor spirály  $R_2$ . Jaká je průměrná teplota spirály  $\vartheta_2$  po zahřátí? Teplotní součinitel odporu spirály  $\alpha$  je znám. Dáno:  $R_1 = 100 \Omega$ ;  $R_2 = 102 \Omega$ ;  $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ ;  $\alpha = 4,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

**Řešení:** Ze vztahu  $R_2 = R_1 [1 + \alpha_{Cu} (\vartheta_2 - \vartheta_1)]$  vypočteme  $\vartheta_2$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right)$$

po dosazení

$$\vartheta_2 = 20 + \frac{1}{4,1 \cdot 10^{-5}} \left( \frac{102}{100} - 1 \right) = 507,8^\circ\text{C}$$

### Příklad 2.37

D

Na svorkách zdroje napětí jsme naměřili při odebíraném proudu  $I_1$  napětí  $U_1$  a při proudu  $I_2$  napětí  $U_2$ . Určete vnitřní napětí  $U_0$  a vnitřní odpor  $R_i$  zdroje. Dáno:  $I_1 = 100 \text{ mA}$ ;  $U_1 = 12 \text{ V}$ ;  $I_2 = 500 \text{ mA}$ ;  $U_2 = 10 \text{ V}$ .

**Řešení:** Pro napětí na svorkách v prvním případě platí  $U_1 = U_0 - R_i \cdot I_1$

a ve druhém případě  $U_2 = U_0 - R_i \cdot I_2$

Z obou rovnic vyjádříme  $U_0 = U_1 + R_i \cdot I_1$ ,  $U_0 = U_2 + R_i \cdot I_2$ . Při rovnosti levých stran můžeme psát

$$U_1 + R_i \cdot I_1 = U_2 + R_i \cdot I_2$$

Z této rovnice vypočteme  $R_i$

$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{12 - 10}{0,5 - 0,1} = 5 \Omega$$

Napětí zdroje v nezátíženém stavu  $U_0 = U_1 + R_i \cdot I_1$  nebo  $U_0 = U_2 + R_i \cdot I_2$

$$U_0 = 12 + 5 \cdot 0,1;$$

$$U_0 = 10 + 5 \cdot 0,5$$

$$U_0 = 12,5 \text{ V};$$

$$U_0 = 12,5 \text{ V}.$$

### Příklad 2.38

D

Jaký proud  $I'$  budeme odebírat z každého článku baterie, máme-li  $m$  článků spojených paralelně? Každý článek má vnitřní napětí  $U'_0$  a vnitřní odpor  $R'_i$ . Baterie pracuje do zatěžovacího odporu  $R_z$ .

Dáno:  $U'_0 = 6 \text{ V}$ ;  $R'_i = 0,1 \Omega$ ;  $m = 5$ ;  $R_z = 1 \Omega$ .

**Řešení:** Výsledné napětí  $U_0$  baterie je rovno napětí článku  $U'_0$

## 2. Stálý proud

$$U_0 = U'_0 = 6 \text{ V}$$

Výsledný vnitřní odpor baterie  $R_i = \frac{R'_i}{m} = \frac{0,1}{5} = 0,02 \text{ ?}$

Proud odebíraný odporem  $R_z$  z baterie  $I = \frac{U_0}{R_i + R_z} = \frac{6}{0,02 + 1} = 5,88 \text{ A}$

Proud odebíraný z jednoho článku (vnitřní odpory všech článků jsou stejné)

$$I' = \frac{I}{m} = \frac{5,88}{5} = 1,18 \text{ A}$$

### Příklad 2.39

D

Potřebujeme měřit v síti s napětím  $U$ . Máme k dispozici voltmetr s rozsahem  $r_v$  a vnitřním odporem  $R_v$  při tomto rozsahu. Určete velikost předřadného odporu  $R_p$  a konstantu voltmetru  $k_v$  po zvětšení rozsahu, je-li počet dílků na stupnici  $d$ . Dáno:  $U = 230 \text{ V}$ ;  $r_v = 60 \text{ V}$ ;  $R_v = 2000 \text{ ?}$  při rozsahu  $60 \text{ V}$ ;  $d = 120$  dílků

**Řešení:** Předřadné odpory jsou vyráběny s hodnotami stejnými, jako mají vnitřní odpory voltmetrů, proto upravíme nový rozsah na nejbližší vyšší násobek základního rozsahu, tj. na  $240 \text{ V}$  ( $n = \frac{240}{60} = 4$ ).

Velikost předřadného odporu  $R_p = (n-1)R_v = (4-1) \cdot 2000 = 6000 \text{ ?}$

Konstanta voltmetru je  $k_v = \frac{r_v}{d} = \frac{240}{120} = 2 \text{ V/na dílek}$ .

*Poznámka:* Vnitřní odpor voltmetru se udává též hodnotou odporu vztaženého na  $1 \text{ V}$  měřicího rozsahu, tedy např.  $5000 \text{ ?/V}$ . Má-li voltmetr měřicí rozsah např.  $12 \text{ V}$ , je  $R_v = 5000 \cdot 12 = 60000 \text{ ?}$ .

### Příklad 2.40

D

Z výstupu usměrňovače o napětí  $U$  je napájen stejnosměrný motor, který má na štítku uveden jmenovitý výkon  $P_n$ , účinnost  $\eta_n$  a jmenovité napětí  $U_n$ . Na usměrňovač je též připojeno  $x$  žárovek, které jsou na napětí  $U$  a mají výkon  $P_z$ . Vypočítejte příkon  $P_d$  a proud  $I_n$  plně zatíženého motoru, odpor  $R_z$  jednotlivých žárovek a proud  $I_z$ , který žárovkami prochází. Dáno:  $U = 24 \text{ V}$ ;  $P_n = 1,5 \text{ kW}$ ;  $\eta_n = 82 \text{ %}$ ;  $U_n = 24 \text{ V}$ ;  $x = 10$ ;  $P_z = 5 \text{ W}$ .

**Řešení:**  $P_p = \frac{P_n}{\eta} = \frac{1500}{0,82} = 1829,3 \text{ W}$   $R_z = \frac{U^2}{P_z} = \frac{24^2}{5} = 115,2 \text{ ?}$

$$I_n = \frac{P_p}{U_n} = \frac{1829,3}{24} = 76,2 \text{ A} \quad I_z = \frac{U}{R_z} = \frac{24}{115,2} = 0,2 \text{ A}$$

### Příklad 2.41

D

Nabitý akumulátor o napětí  $4 \text{ V}$  má elektrický náboj  $28 \text{ Ah}$ . Kolik je to coulombů? Jakým proudem se nabije za  $10$  hodin? Jakým proudem se vybije za  $140$  hodin?

**Řešení:**  $1 \text{ Ah} = 3600 \text{ As}$

$$28 \text{ Ah} = 3600 \cdot 28 = 100\,800 \text{ C}$$

$$I_n = \frac{Q}{t} = \frac{28 \text{ Ah}}{10 \text{ h}} = 2,8 \text{ A}$$

Akumulátor se nabije proudem  $2,8 \text{ A}$  za dobu  $10$  hodin.

$$I_v = \frac{Q}{t} = \frac{28 \text{ Ah}}{140 \text{ h}} = 0,2 \text{ A}$$

Za  $140$  hodin se akumulátor vybije proudem  $0,2 \text{ A}$ .

## 2. Stálý proud

### Příklad 2.42

D

Kolik ampérhodin je 96 494 coulombů (Faradayův náboj)?

**Řešení:**  $1 \text{ Ah} = 3600 \text{ C} = 3600 \text{ As}$

$$\frac{96494 \text{ C}}{3600 \text{ As}} = 26,8 \text{ Ah}$$

Náboj 96494 C představuje 26,8 Ah.

### Příklad 2.43

D

Vodičem o průřezu  $S = 4 \text{ mm}^2$  prochází proud  $I = 10 \text{ A}$ . Jaká je proudová hustota  $J$ ?

**Řešení:** Proudová hustota

$$J = \frac{I}{S} = \frac{10 \text{ A}}{4 \text{ mm}^2} = 2,5 \text{ A/mm}^2.$$

O tom, zda je tato proudová hustota dovolená, se přesvědčíme z tabulky (pro vinutí motoru by byly hodnoty v tabulce odlišné)

Trvalé zatížení měděných a hliníkových izolovaných vodičů

| Průměr [mm]               | 0,96          | 1,1     | 1,4      | 1,8      | 2,25     | 2,75     | 3,5      | 4,5      |
|---------------------------|---------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Průřez [mm <sup>2</sup> ] | 0,75          | 1,0     | 1,5      | 2,5      | 4,0      | 6,0      | 10,0     | 16,0     |
| Proud [A]                 | Cu 13<br>Al 1 | 16<br>1 | 20<br>16 | 27<br>21 | 35<br>29 | 45<br>37 | 65<br>51 | 86<br>68 |

### Příklad 2.44

D

Sběrnice proudu má obdélníkový průřez  $20 \times 80 \text{ mm}$  a prochází jí proud  $I = 1000 \text{ A}$ . Jaká je proudová hustota?

**Řešení:** Průřez  $S = 20 \times 80 = 1600 \text{ mm}^2$

Proudová hustota

$$J = \frac{I}{S} = \frac{1000 \text{ A}}{1600 \text{ mm}^2} = 0,625 \text{ A/mm}^2.$$

Průřez  $1 \text{ mm}^2$  sběrnice je zatížen proudem  $0,625 \text{ A}$ .

(Z  $1 \text{ mm}^2$  vychází proud  $I_l = 0,625 \text{ A}$ .)

(Z celého průřezu  $S$  vychází celkový proud  $I = 1000 \text{ A}$ .)

### Příklad 2.45

D

Paralelním zapojením odporu  $28 \text{ } \Omega$  se měřicí rozsah ampérmetru změní z  $5,6 \text{ A}$  na  $6 \text{ A}$ . Jak velký je jeho vnitřní odpor?

**Řešení:** Při paralelním zapojení odporu  $R = 28 \text{ } \Omega$  a vnitřního odporu ampérmetru  $R_v$  se celkový proud  $I$  rozdělí na část procházející ampérmetrem  $I_v$  a část  $I - I_v$  procházející odporem  $R$ . Napětí na obou paralelních odporech bude stejné  $U = R_v I_v = R(I - I_v)$  a proto

$$R_v = \frac{R(I - I_v)}{I_v} = \frac{28 \times 0,4}{5,6} = 2 \text{ } \Omega.$$

### Příklad 2.46

D

Ručička ampérmetru (měřiče proudu), který má vnitřní odpor  $20 \text{ } \Omega$ , dosáhne maximální výchylky při  $10 \text{ mA}$ . Jakou hodnotu musí mít bočník, aby maximální výchylka odpovídala  $50 \text{ mA}$ ?

**Řešení:** Podobně jako v předchozím příkladu bychom získali

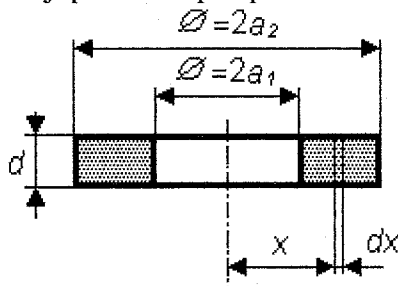
$$R = \frac{I_v R_v}{I - I_v} = 5 \text{ } \Omega.$$

### 3. MAGNETOSTATICKÉ POLE

#### Příklad 3.1

B

Vypočítejte intenzitu magnetického pole ve středu velmi tenké kotoučové cívky, která má  $N$  závitů rovnoměrně rozložených a prochází jí proud  $I$  za předpokladu  $d \ll a_1$ .



**Řešení:** Pomocí Biot-Savartova zákona dostaneme pro jeden závit ve středu  $H = I/2a$ . Cívku rozdělíme na elementární kruhové závity s poloměrem  $x$  a průřezem  $dS = dx \cdot d$ . Jedním takovým závitkem prochází proud  $dI = J dS$ , kde  $J = NI / (a_2 - a_1) d$  je hustota proudu. Integrací dostaneme

$$H = \int_{a_1}^{a_2} \frac{NI dx}{(a_2 - a_1)x} = \frac{NI}{(a_2 - a_1)} \ln \frac{a_2}{a_1} \text{ [A/m]}.$$

#### Příklad 3.2

B

Určete intenzitu magnetického pole na povrchu rozlehlé feromagnetické desky ( $\mu \rightarrow \infty$ ), nad níž je ve vzdálenosti  $h$  umístěn přímý vodič, protékaný proudem  $I$ . Jeho průměr  $d \ll h$ .

**Řešení:** Úlohu řešíme metodou zrcadlení. Feromagnetickou desku nahradíme druhým tzv. zrcadlovým vodičem ve vzdálenosti  $h$  od roviny, protéká jím proud  $I$  stejně velký a stejným směrem jako u vodiči skutečném (protože  $\mu \rightarrow \infty$ ). Intenzitu magnetického pole určíme superpozicí polí obou vodičů.

Intenzita pole vyvolaná vodičem 1 v bodě A je

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

a vodičem 2 je

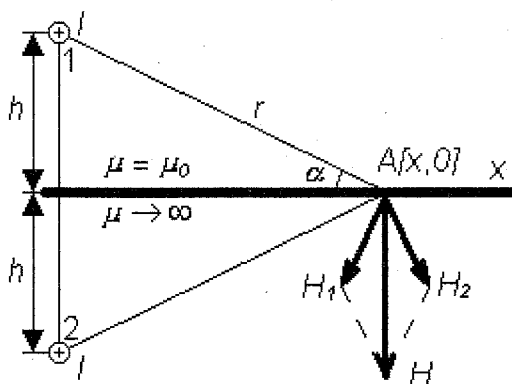
$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Výsledná intenzita v bodě A je

$$H = 2H_1 \cos \alpha = 2H_2 \cos \alpha, \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

Výsledná intenzita magnetického pole v obecném bodě A na povrchu feromagnetické desky

$$H = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + h^2)} \text{ [A/m, A, m]}$$



#### Příklad 3.3

C

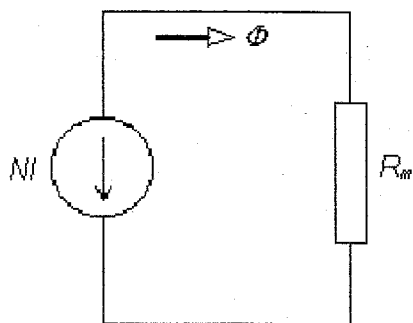
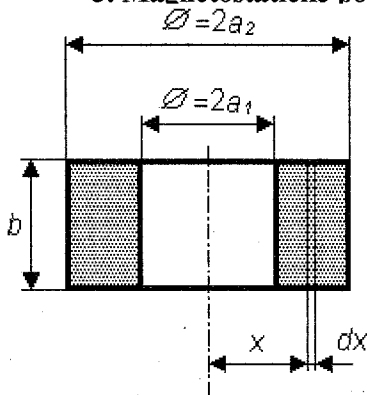
Vypočítejte reluktanci (magnetický odpor) feromagnetického prstenu. Nakreslete náhradní schéma tohoto obvodu.

**Řešení:** Při přibližném výpočtu a pokud rozdíl mezi vnějším a vnitřním poloměrem není příliš velký, můžeme reluktanci prstenu počítat jako reluktanci magnetického obvodu s konstantním průřezem  $S = b(a_2 - a_1)$  a s délkou  $l_s = \pi b(a_2 + a_1)$ , která odpovídá délce střední silové čáry, jako

### 3. Magnetostatické pole

$$R_m = \frac{l_s}{\mu S} = \frac{\pi(a_2 + a_1)}{\mu(a_2 - a_1)b}$$

Tento vztah platí pro výpočet reluktance indukční trubice s rovnoměrně rozloženým tokem po průřezu. V prstenu je intenzita pole nepřímo úměrná poloměru, intenzita pole a indukce je



větší na vnitřním obvodu a magnetický tok není rovnoměrně rozložen po průřezu. Při přesnějším výpočtu musíme prsten rozdělit na tenké prstence tloušťky  $dx$ , v jehož průřezu  $dS = bdx$  je konstantní indukce. Magnetická vodivost obvodu  $G_m = 1/R_m$  je dána součtem magnetických vodivostí  $dG_m$  jednotlivých prstenců

$$dG_m = \frac{\mu dS}{l} = \frac{\mu b dx}{2\pi x}$$

Za předpokladu  $\mu = \text{konst.}$  je

$$G_m = \frac{\mu b}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu b}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1} \quad [\text{H}, \text{H/m}, \text{m}]$$

pak magnetický odpor

$$R_m = \frac{1}{G_m} = \frac{2\pi}{\mu b \ln \frac{a_2}{a_1}} \quad [\text{H}^{-1}, \text{H/m}, \text{m}]$$

#### Příklad 3.4

D

Vypočítejte výsledný magnetický odpor feromagnetického prstenu s permeabilitou  $\mu$ , obdélníkovým průřezem o šířce  $b$ , vnitřním poloměrem  $a_1$  a vnějším poloměrem  $a_2$ , který je přerušen dvěma krátkými vzduchovými mezerami o délkách  $d_1$  a  $d_2$ , vzniklými tím, že prsten z předešlého příkladu byl rozříznut na dvě poloviny a opět složen, za předpokladu malého rozdílu poloměrů  $a_1$  a  $a_2$  a při zanedbání rozptylových toků v okolí vzduchových mezer.

**Řešení:** Celkový úbytek magnetického napětí na uzavřeném obvodu  $U_m = R_m \Phi = NI$  je dán součtem úbytků na jednotlivých úsecích  $U_m = R_m \Phi = U_{mv1} + U_{ml'e1} + U_{mv2} + U_{ml'e2} = (R_{mv1} + R_{ml'e1} + R_{mv2} + R_{ml'e2}) \Phi$ . Výsledný magnetický odpor je tedy dán součtem magnetických odporů jednotlivých sériově řazených úseků (podobně jako v případě elektrického obvodu).

Odpor ve vzduchových mezerách je

$$R_{mv} = R_{mv1} + R_{mv2} = \frac{l_s}{\mu_0 S} = \frac{d_2 + d_1}{\mu_0(a_2 - a_1)b}$$

Celkový magnetický odpor je dán odporem  $R_{ml'e} = R_{ml'e1} + R_{ml'e2}$  podle předešlého příkladu a  $R_{mv}$

$$R_m = \frac{\pi(a_2 + a_1)}{\mu(a_2 - a_1)b} + \frac{d_2 + d_1}{\mu_0(a_2 - a_1)b}$$

#### Příklad 3.5

D

Určete magnetickou indukci a magnetický tok ve všech vzduchových mezerách jádra složeného z plechů. Budicí cívka je navinuta na krajním sloupku jádra, má  $N = 500$  závitů, kterými protéká proud  $I = 100$  mA. Vrstva plechů má čistou tloušťku železa  $c$ , permeabilita materiálu  $\mu \rightarrow \infty$ .

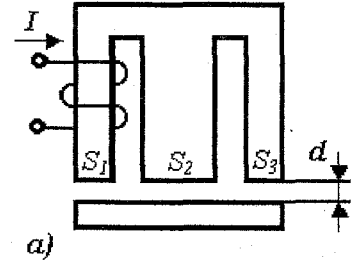
### 3. Magnetostatické pole

Zanedbejte rozptyl pole v mezeře. Rozměry jádra jsou  $S_1 = S_3 = 10 \times 10 \text{ mm}^2$  a  $S_2 = 20 \times 10 \text{ mm}^2$  a  $d = 0,5 \text{ mm}$ .

**Řešení:** Protože permeabilita plechů je velká ( $\mu \rightarrow \infty$ ), můžeme zanedbat reluktanci jádra  $R_{m\text{rel}} \rightarrow 0$ . Určíme magnetické odpory vzduchových mezer

$$R_{mv1} = \frac{d}{\mu_0 S_1} = R_{mv3} = 3,98 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{mv2} = \frac{d}{\mu_0 S_2} = 1,99 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}.$$



Magnetický obvod je analogický s proudovým obvodem a lze pro něho nakreslit náhradní schéma podle obr. b).

Podle náhradního schématu je výsledný magnetický odpor obvodu (vzhledem ke zdroji)

$$R_{mv} = R_{mv1} + \frac{R_{mv2} R_{mv3}}{R_{mv2} + R_{mv3}} = 5,3 \cdot 10^6$$

Pak tok  $\Phi_1$  vypočteme z Hopkinsonova zákona

$$\Phi_1 = NI / R_{mv} = 9,42 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}.$$

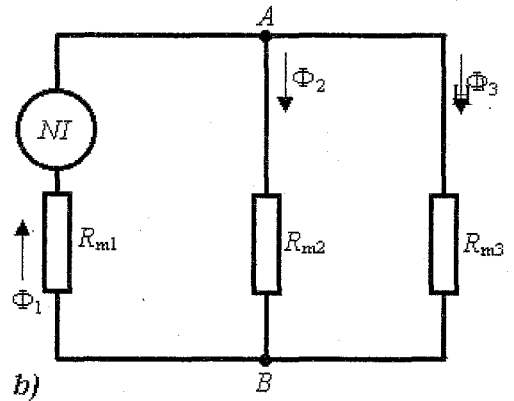
Tok  $\Phi_1$  se dělí do sloupků 2 a 3 tak, aby mezi uzly AB (v náhradním schématu) bylo stejné magnetické napětí

$$\sum U_m = 0 \Rightarrow \Phi_2 R_{m2} = \Phi_3 R_{m3},$$

$$\sum \Phi = 0 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\Phi_2 = \frac{R_{mv3}}{R_{mv2} + R_{mv3}} \Phi_1 = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$\Phi_3 = \frac{R_{mv2}}{R_{mv2} + R_{mv3}} \Phi_1 = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$



Magnetická indukce v mezerách 1,2,3 je

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = 9,42 \cdot 10^{-2} \text{ T},$$

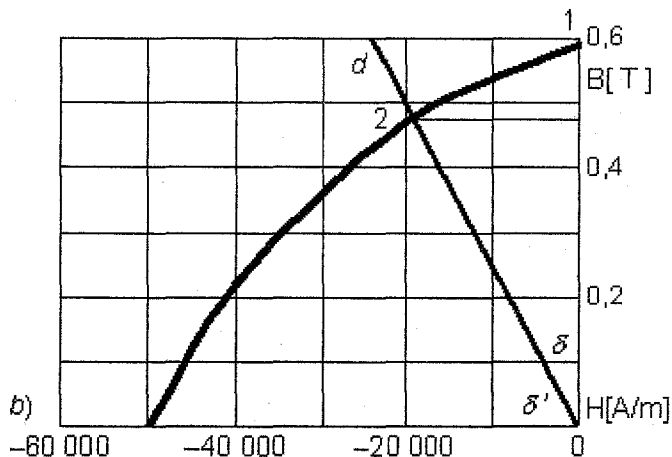
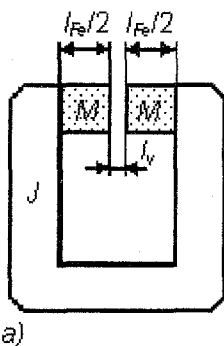
$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ T},$$

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ T}.$$

#### Příklad 3.6

C

Magnetický obvod s permanentním magnetem má vzduchovou mezeru délky  $l_v = 2 \text{ mm}$ . Permanentní magnet M je rozdělen na dvě části (na obr. a vyznačeno šrafováním). Jejich délky jsou  $l_{Fe}/2 = 20 \text{ mm}$ . Konce magnetů jsou spojeny jhem J z magneticky měkkého materiálu s velkou permeabilitou a malou reluktancí. Materiál magnetů má hysterezní smyčku podle obr. b (je kreslen jen druhý kvadrant hysterezní smyčky).



### 3. Magnetostatické pole

Který bod hysterezní smyčky definuje stav magnetů po zmagnetování a vypnutí magnetizačního proudu? Jak velká bude indukce ve vzduchové mezeře? Zanedbejte rozptylový magnetický tok a reluktanci jha.

**Řešení:** V uzavřeném homogenním obvodu by po zmagnetování a po zániku magnetujícího pole zůstala remanentní indukce  $B_r$ , odpovídající bodu 1 na smyčce podle obr. b.

V obvodu přerušeném vzduchovou mezerou se uplatní demagnetizace (vyvolaná úbytkem magnetického napětí na reluktanci mezery při průchodu magnetického toku), která způsobí zmenšení indukce a přechod do bodu 2. Vedeme-li integrační dráhu po střední silové čáře, platí  $\oint \vec{H} d\vec{s} = 0$ , neboť dráha neobepíná elektrický proud. V magnetech je intenzita pole  $H_{Fe}$  (ve směru dráhy) a ve vzduchové mezeře je intenzita  $H_v$  (ve směru dráhy). Na jhu, jehož reluktance je zanedbatelná, vzniká procházejícím magnetickým tokem jen malý úbytek magnetického napětí a je zde  $H = 0$ . Pak platí

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} l_{Fe} + H_v l_v = 0$$

a z toho

$$H_{Fe} = -H_v \frac{l_v}{l_{Fe}}$$

Zanedbáme-li rozptyl, prochází všemi průřezy magnetického obvodu stejný tok a je-li průřez všude stejný, je všude stejná indukce.

$$B_{Fe} = B_v$$

kde  $B_{Fe}$  a  $B_v$  jsou indukce v magnetu a ve vzduchové mezeře

$$\frac{B_{Fe}}{H_{Fe}} = -\frac{B_v}{H_v} \frac{l_{Fe}}{l_v} = -\mu_0 \frac{l_{Fe}}{l_v}$$

Poměr  $B_{Fe} / H_{Fe}$  musí vyhovovat této rovnici. V grafu  $B = f(H)$  leží body vyhovující rovnici na přímce  $d$ . Ta svírá s osou  $H$  úhel  $\delta' = -\arctg\left(\mu_0 \frac{l_{Fe}}{l_v}\right)$  a s osou  $B$  úhel  $\delta = -\arctg\left(\frac{l_v}{\mu_0 l_{Fe}}\right)$ .

Pracovní bod magnetu musí odpovídat této rovnici a musí přitom ležet na hysterezní smyčce. Je tedy dán průsečíkem přímky  $d$  s druhým kvadrantem hysterezní smyčky. Pro udané rozměry obvodu je sklon demagnetizační přímky  $d$  dán poměrem

$$\frac{B_{Fe}}{H_{Fe}} = -\mu_0 \frac{l_{Fe}}{l_v} = -1,256 \cdot 10^{-6} \frac{2 \cdot 20}{2} \approx -2,5 \cdot 10^{-5} \text{ H/m}$$

Sestrojením této přímky v grafu  $B = f(H)$  dostaneme průsečík se souřadnicemi  $B_{Fe} = 0,475 \text{ T}$ ,  $H_{Fe} = -20\,000 \text{ A/m}$  (intenzita magnetického pole je záporná, neboť ve druhém kvadrantu smyčky má intenzita  $H_{Fe}$  opačný směr než indukce  $B_{Fe}$ ). Sklon přímky  $d$  musíme ovšem zakreslit se zřetelem na měřítko v ose  $B$  a  $H$ .

Indukce ve vzduchové mezeře stejná jako indukce v magnetu, tzn.

$$B_v = B_{Fe} = 0,475 \text{ T}.$$

**Poznámka 1:** Uvedený výpočet je jen přibližný a slouží k prvnímu odhadu poměrů v magnetickém obvodu. Ve většině případů nelze zanedbat rozptylové magnetické toky, které zvětšují indukci v magnetu (a to různě v různých průřezích magnetu), takže indukce  $B_v$  je menší než indukce  $B_{Fe}$ . Výpočet je pak třeba opravit stanovením rozptylového toku buď odhadem (podle zkušeností s podobnými magnetickými obvody), nebo změřením na modelu.

**Poznámka 2:** Místo značně nepřesného a pracného grafického řešení je možné numerické řešení. V tabulkovém procesoru použijeme pro graf  $B(H)$  Graf, Přidat spojnicí trendu, Typ trendu Polynomický, Možnosti Zobrazit rovnici regrese, Zobrazit hodnotu spolehlivosti (stupeň volíme tak, aby se  $R$  blížilo 1). Tím získáme požadovaný polynom.

### 3. Magnetostatické pole

Do A2 vložíme libovolnou nenulovou hodnotu, do B2 vypočtený polynom, do C2 rovnici přímky  $d$  a do D2 uvedený rozdíl. Pro řešení použijeme Nástroje, Hledání řešení, Nastavená buňka D2, Cílová hodnota 0, Měněná buňka A2 (pro různé procesory se mohou názvy měnit). Výsledky udává tabulka.

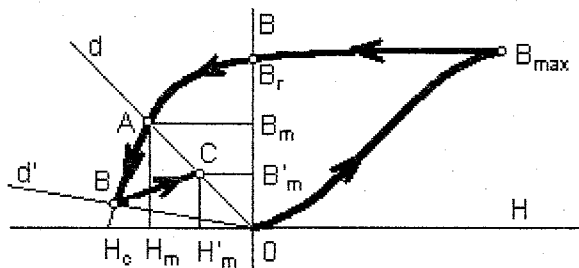
|   | A      | B    | C    | D                 |
|---|--------|------|------|-------------------|
| 1 | H      | B(H) | B(d) | B(H)-B(d)         |
| 2 | -19204 | 0,48 | 0,48 | $3 \cdot 10^{-7}$ |

#### Příklad 3.7

C

Udejte náčrtem, jak se mění pracovní bod permanentního magnetu z předcházejícího příkladu při magnetování a při zániku magnetizačního proudu. Určete, jak se mění poloha pracovního bodu, když obvod po zmagnetování rozebereme (tzn. odejmeme magnety  $M$  od jha  $J$ ) a opět jej sestavíme. Vysvětlíte, zda je výhodnější provádět magnetování na samotných permanentních magnetech (které se pak po zmagnetování vmontují do obvodu) nebo na sestaveném obvodu.

**Řešení:** Vycházíme-li z odmagnetovaného stavu, postupuje pracovní bod magnetů při vzrůstu magnetizačního proudu z bodu 0 po křivce prvotní magnetizace až do bodu  $B_{max}$  při maximu proudu. Při zániku proudu se pracovní bod pohybuje po sestupné větvi hysterezní smyčky až do průsečíku A hysterezní smyčky s demagnetizační přímkou  $d$  (jejíž poloha je dána rozměry magnetů a vzduchové mezery), viz obrázek.



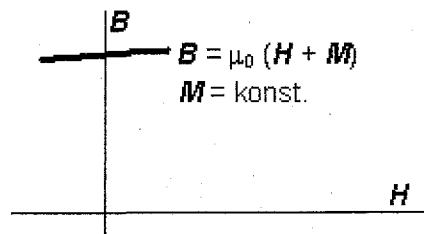
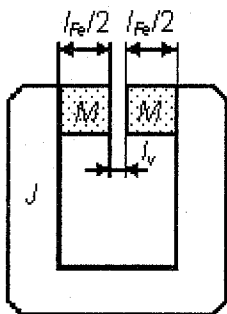
Jestliže se oddálí magnety od jha, zvětší se značně demagnetizace (zvětší se značně délka dráhy toku vzduchem  $l_v$ ) a pracovní bod se posune po hysterezní smyčce dále do bodu B na nové demagnetizační přímce  $d'$ . Po novém sestavení obvodu se demagnetizace zase zmenší na původní velikost (přímka  $d$ ), pracovní bod se však nemůže vrátit zpět po hlavní hysterezní smyčce do bodu A, ale posune se po malé hysterezní smyčce do bodu C na původní demagnetizační přímce  $d$ . Rozebíráním a opětným sestavením obvodu se permanentní magnety značně zeslabí, indukce a intenzita pole  $B_m$  a  $H_m$  pracovního bodu poklesnou na hodnotu  $B'_m$  a  $H'_m$ . Ve stejném poměru se zmenší i indukce ve vzduchové mezeře.

Kdybychom magnetovali samotné permanentní magnety a pak teprve sestavovali magnetický obvod, dostali bychom pracovní bod C, tzn. dostali bychom značně menší indukci v mezeře než při magnetování smontovaného obvodu (pracovní bod A). Smontovaný obvod lze magnetovat např. cívkou navinutou přímo na obvod (nejlépe na magnety, aby rozptylové toky byly při magnetování co nejmenší) a uzavřít vložkou z magneticky měkkého materiálu, aby se zmenšily neužitečné úbytky magnetického napětí. Cívka může mít jen malý počet závitů (musí se navíjet na smontovaný obvod provlékáním vodiče) a proto je k magnetování nutný velký proud.

#### Příklad 3.8

C

Magnetický obvod s permanentním magnetem má vzduchovou mezeru délky  $l_v$ . Permanentní magnet  $M$  je rozdělen na dvě části (na obr. a vyznačeno šrafováním). Jejich délky jsou  $l_{Fe}/2$ . Konce magnetů jsou spojeny jhem  $J$  z magneticky měkkého materiálu s velkou permeabilitou a malou reluktancí.



Předpokládejte, že vektor magnetické polarizace  $M$  je konstantní. Zanedbejte rozptylový magnetický tok.

### 3. Magnetostatické pole

**Řešení:** V uzavřeném homogenním obvodu po zmagnetování a po zániku magnetujícího pole platí obdoba 1. a 2. Kirchhoffova zákona

$$\Phi_m = \Phi_z = \Phi_v = \Phi,$$

$$B_m \cdot S_m = B_z \cdot S_z = B_v \cdot S_v = \Phi,$$

$$U_{mm} + U_{mz} + U_{mv} = \sum I = 0.$$

$$H_m \cdot l_m + H_z \cdot l_z + H_v \cdot l_v = 0 \quad \Rightarrow \quad H_m < 0.$$

V permanentním magnetu platí

$$H_m = B_m / \mu_0 - M = \Phi / (S_m \mu_0) - M.$$

V magneticky měkkém materiálu platí

$$H_z = B_z / (\mu_0 \mu_{rz}) = \Phi / (S_m \mu_0 \mu_{rz}).$$

Ve vzduchu

$$H_v = B_v / \mu_0 = \Phi / (S_m \mu_0).$$

Takže platí

$$\left( \frac{\Phi}{S_m \mu_0} - M \right) l_m + \frac{\Phi l_z}{S_z \mu_0 \mu_{rz}} + \frac{\Phi l_v}{S_v \mu_0} = 0,$$

$$B_v = \frac{\mu_0 M}{\frac{S_v}{S_m} + \frac{S_v l_z}{S_z l_m \mu_{rz}} + \frac{l_v}{l_m}}$$

#### Příklad 3.9

Určete vektorový potenciál  $A$  uvnitř velmi dlouhého magneticky velmi dobře vodivého pásového vodiče obdélníkového průřezu ( $\mu_r > 100$ ), kterým prochází proud  $I$ . Vodič je umístěn ve vzduchu.

**Řešení:** Jedná se o rovinné magnetické pole, neboť podélná magnetická indukce  $B_z$  je při zvolené soustavě souřadnic nulová. Indukční čáry tohoto pole nevystupují mimo vodič – magnetická vodivost okolního prostředí je mnohem menší než vodivost uvažovaného vodiče. Vektorový potenciál  $A$  uvnitř vodiče má, stejně jako proudová hustota  $J_z$ , pouze podélnou složku  $A_z$  (magnetický tok plochou uzavřenou libovolnou křivkou v rovině  $z = \text{konst.}$  je nulový a proto křivkový integrál vektorového potenciálu se rovná nule) a ta splňuje Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_z = -\mu J = -\mu J_z.$$

Řešení nalezneme jako superpozici řešení homogenní rovnice (pomocí metody separace proměnných) a partikulárního integrálu nehomogenní rovnice. Řešení homogenní rovnice je

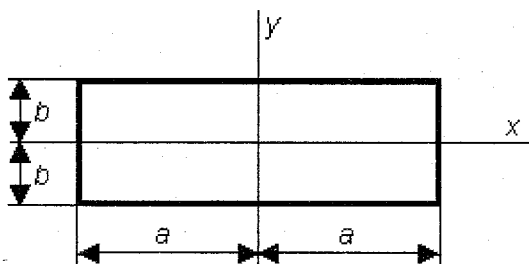
$$A_z(x, y) = \sum_k (A_k \sin kx + B_k \cos kx) (C_k \sinh ky + D_k \cosh ky) + Mxy + Nx + Sy + T,$$

stejně jako pro analogický problém v elektrostatice.

Uvažujeme v rovině  $x = \text{konst.}$  obdélník souměrný podle os  $y$  a  $z$ , pak

$$\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Z důvodu symetrie a protože siločáry  $\mathbf{B}$  jsou uzavřené platí  $B_x(x, y) = B_x(-x, y)$  a  $B_x(x, y) = -B_x(x, -y)$  a jelikož se v integrálu na levé straně objevuje pouze složka  $B_x$  je tento integrál nulový. Protože existuje



### 3. Magnetostatické pole

pouze složka  $A_z$ , bude křivkový integrál rovný  $\int [A_z(x,y) - A_z(x,-y)]$ . Volíme-li stranu obdélníka  $l$  dostatečně malou, je zřejmé, že musí platit  $A_z(x,y) = A_z(x,-y)$ . Podobně bychom ukázali, že  $A_z(x,y) = A_z(-x,y)$ . Proto musí platit  $A_k = C_k = M = N = S = T = 0$ . Takže řešení homogenní rovnice je

$$A_z(x, y) = \sum_k F_k \cos kx \cosh ky.$$

Partikulární řešení se může volit ve tvaru  $A_z = -\mu x^2 J_z / 2$  (zřejmě vyhovuje nehomogenní rovnici a je to sudá funkce), takže výsledné řešení je

$$A_z(x, y) = \sum_k F_k \cos kx \cosh ky - \mu J_z x^2 / 2.$$

Na rozhraní feromagnetikum – vzduch je magnetická indukce tečná k rozhraní a protože  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \Big|_{y=\pm b} = 0.$$

Konstanty  $F_k$  a  $k$  určíme z uvedených okrajových podmínek

$$\sum_k k F_k \cos ka \sinh ky = 0 \Rightarrow k = \frac{(2p+1)\pi}{2a},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi}{2a} F_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cosh \frac{(2k+1)\pi b}{2a} + \mu J_z x = 0.$$

Pro výpočet musíme rozvést  $x$  do Fourierovy řady s členy  $b_m \sin [m\pi/(2a)]$ . Sudé členy jsou nulové a pro liché dostaneme

$$b_{2p+1} = \frac{2}{a} \int_0^a x \sin \frac{(2p+1)\pi x}{2a} dx = \frac{(-1)^p 8a}{(2p+1)^2 \pi^2}.$$

Po dosazení za  $x$  dostaneme pro koeficienty

$$F_k = -\mu J_z \frac{(-1)^k 16a^2}{(2k+1)^3 \pi^3 \cosh \frac{(2k+1)\pi b}{2a}}$$

Vektorový potenciál  $\mathbf{A} = A_z \mathbf{z}^0$  a magnetická indukce  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  uvnitř vodiče je

$$A_z(x, y) = -\mu J_z / 2 \left[ x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 32a^2}{(2k+1)^3 \pi^3 \cosh \frac{(2k+1)\pi b}{2a}} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cosh \frac{(2k+1)\pi y}{2a} \right],$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} =$$

$$= -\mu J_z / 2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi}{2a} \frac{(-1)^k 32a^2}{(2k+1)^3 \pi^3 \cosh \frac{(2k+1)\pi b}{2a}} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \sinh \frac{(2k+1)\pi y}{2a} \right],$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} =$$

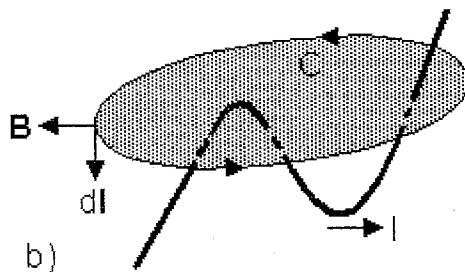
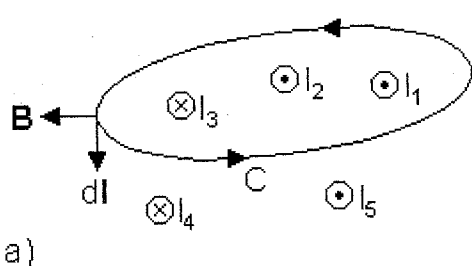
$$= \mu J_z / 2 \left[ 2x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi}{2a} \frac{(-1)^k 32a^2}{(2k+1)^3 \pi^3 \cosh \frac{(2k+1)\pi b}{2a}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cosh \frac{(2k+1)\pi y}{2a} \right].$$

### 3. Magnetostatické pole

#### Příklad 3.10

D

Určete  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  pro uzavřenou křivku  $C$  a obvody, kterými protékají proudy podle obr. a) a b).  
 $I = 10 \text{ A}$ ,  $I_1 = 6 \text{ A}$ ,  $I_2 = 9 \text{ A}$ ,  $I_3 = 5 \text{ A}$ ,  $I_4 = 6 \text{ A}$ ,  $I_5 = 8 \text{ A}$ .



**Řešení:** Platí

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

kde  $I$  je celkový proud. V případě a) je celkový proud (orientace  $I_1$  a  $I_2$  odpovídá pravidlu pravé ruky, orientace  $I_3$  je opačná,  $I_4$  a  $I_5$  jsou mimo smyčku)

$$I = I_1 + I_2 - I_3 = 6 + 9 - 5 = 10 \text{ A}.$$

a proto se uvedený integrál rovná  $\mu_0 I = 4\pi \cdot 10^{-6} \text{ T.m}$ .

V případě b) je celkový proud  $I = 10 \text{ A}$  (vodič sice prochází plochou uzavřenou křivkou  $C$  třikrát, ale dvakrát prochází tak, že orientace proudu odpovídá pravidlu pravé ruky a v jednom případě je orientace opačná a tedy výsledný proud  $I = 10 + 10 - 10 = 10 \text{ A}$ ) a proto se uvedený integrál rovná  $\mu_0 I = 4\pi \cdot 10^{-6} \text{ T.m}$ .

#### Příklad 3.11

B

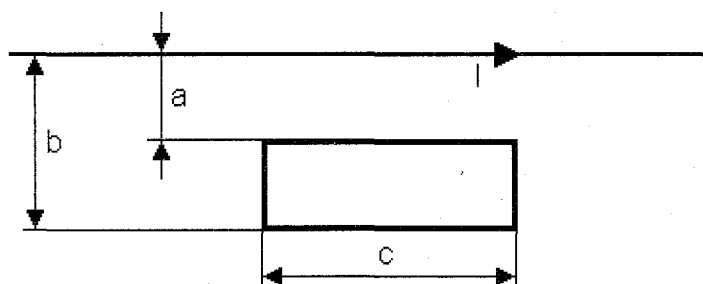
Dlouhý přímý vodič vede proud  $I$ . Určete magnetický tok pro plochu omezenou obdélníkem podle obrázku.

**Řešení:** Vodič vytváří podle Ampérova zákona ve vzdálenosti  $r$  od vodiče pole

$$2\pi rH = I$$

a tedy  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ . Magnetický tok určíme integrací přes plochu obdélníka

$$\Phi = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$



#### Příklad 3.12

B

Určete magnetický potenciál  $A$  a  $H$  pro dlouhý vodič, kterým teče proud  $I$ .

**Řešení:** Uvažujme vodič umístěný podle osy  $z$ . Protože proud teče pouze podle osy  $z$ , jsou  $dA_x$  a  $dA_y$  nulové a  $dA_z$  je rovnoběžné s  $Idz$ . Pak platí

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{Idz}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{2\mu_0}{4\pi} \int_0^L \frac{Idz}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln(z + \sqrt{z^2 + R^2}) \right]_0^L =$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln(L + \sqrt{L^2 + R^2}) - \ln R \right].$$

To ukazuje, že  $A_z$  má stejnou velikost pro konstantní hodnotu  $R$  a nezávisí na úhlu  $\phi$  (pro válcovou soustavu). Jestliže předpokládáme  $L \gg R$ , pak  $L^2 + R^2 \approx L^2$  a

### 3. Magnetostatické pole

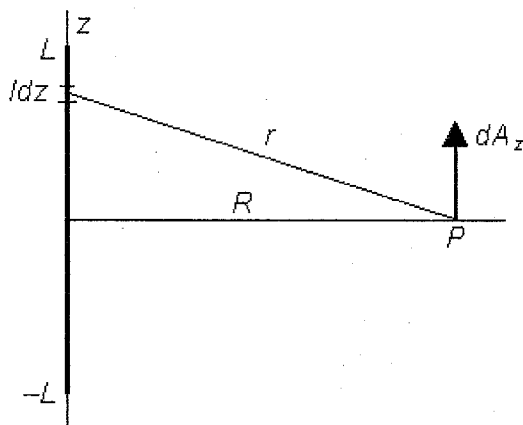
$$A_z \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} [\ln(2L) - \ln R].$$

Použitím výrazu pro rot  $A$  ve válcové soustavě (přitom využijme toho, že  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_R$ ,  $A_\phi$  a derivace  $A_z$  podle  $\phi$  jsou nulové) dostaneme

$$\mathbf{H} = H_\phi \boldsymbol{\phi}^0 = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \right] \boldsymbol{\phi}^0 = \frac{I}{2\pi R} \boldsymbol{\phi}^0,$$

což je výsledek, který lze získat pomocí Ampérova zákona.

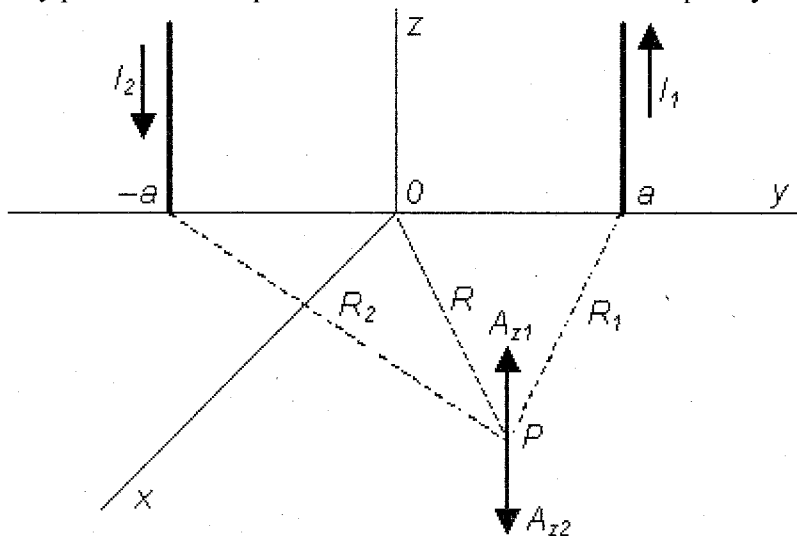
Je pozoruhodné, že  $A_z \rightarrow \infty$  pro  $L \rightarrow \infty$ , zatímco rot  $A$  je konečné. Je nutné si uvědomit, že  $A$  může být nulové, nebo se blížit nekonečnu, i když rot  $A$  je konečné.



#### Příklad 3.13

B

Určete magnetický potenciál  $A$  a  $\mathbf{H}$  pro dva rovnoběžné dlouhé vodiče s proudy  $-I$  a  $I$ .



**Řešení:** Bod  $P$  je v rovině  $xy$  a počátek je ve středu mezi oběma vodiči, které jsou rovnoběžné s osou  $z$  v rovině  $yz$ . Použijme výsledek z předchozího příkladu a pro bod  $P$  dostaneme pro potenciály

$$A_{z1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} [\ln(2L) - \ln R_1],$$

$$A_{z2} = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi} [\ln(2L) - \ln R_2].$$

Jestliže  $I_1 = I_2 = I$ , pak

$$A_z = A_{z1} + A_{z2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} [\ln R_2 - \ln R_1].$$

Protože souřadnice  $P$  jsou  $(x, y, 0)$ , dostaneme

$$R_1^2 = x^2 + (y - a)^2; \quad R_2^2 = x^2 + (y + a)^2.$$

Derivováním dostaneme

$$2R_1 \frac{\partial R_1}{\partial x} = 2x,$$

$$2R_2 \frac{\partial R_2}{\partial x} = 2x,$$

$$2R_1 \frac{\partial R_1}{\partial y} = 2(y - a),$$

$$2R_2 \frac{\partial R_2}{\partial y} = 2(y + a),$$

### 3. Magnetostatické pole

Protože  $A_x, A_y$  jsou nulové, je  $H_z$  nulové a

$$H_x x^0 = \frac{\partial A_z}{\partial y} x^0 = \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{1}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial y} \right] x^0 = \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{y+a}{R_2^2} - \frac{y-a}{R_1^2} \right] x^0,$$

$$H_y y^0 = \frac{\partial A_z}{\partial x} y^0 = \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{1}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial x} \right] y^0 = \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{x}{R_2^2} - \frac{x}{R_1^2} \right] y^0,$$

$$H_z z^0 = 0.$$

Opět se ukazuje, že i když pro  $R_1 = R_2$  v rovině  $y = 0$  je  $A_z$  a dokonce i  $H_y$  nulové, je  $H_x = Ia / (\pi R^2)$  konečné.

#### Příklad 3.14

A

Určete magnetický potenciál  $A$  uvnitř vodiče o poloměru  $R$ , který vede proud  $I$ , jestliže je  $A$  nulové ve vzdálenosti  $\rho = R$  od středu.

**Řešení:** Uvnitř vodiče s osu ve směru osy  $z$  předpokládáme rovnoměrnou hustotu  $J = I / (\pi R^2) z^0$ . Tedy

$$\nabla^2 A_z = \nabla^2 A = -\mu_0 J.$$

Uvažujme válcové souřadnice, pak (derivace podle  $\phi$  a  $z$  jsou nulové)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu_0 J,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 J,$$

Po úpravě dostaneme

$$\rho \frac{dA}{d\rho} = -\mu_0 J \int \rho d\rho = -\frac{1}{2} \mu_0 J \rho^2 + k,$$

Protože platí  $\text{rot } A = B$

$$\text{rot } A = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho^0 & \rho \phi^0 & z^0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = -\frac{\rho}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho} \phi^0 = B_\phi \phi^0$$

Uvnitř vodiče ve vzdálenosti  $\rho$  od středu (na kružnici o poloměru  $\rho$ ) je  $B$  azimutální a platí

$$B_\phi = \mu_0 [I \pi \rho^2 / (\pi R^2)] / (2\pi \rho) = \mu_0 I \rho / (2\pi R^2) = \mu_0 J \rho / 2 = \mu_0 J \rho / 2 + k/\rho.$$

Proto  $k = 0$  a

$$A = -\frac{1}{2} \mu_0 J \int \rho d\rho = -\frac{1}{4} \mu_0 J \rho^2 + K.$$

Jestliže  $A = 0$  pro  $\rho = R$ , pak

$$A = \frac{1}{4} \mu_0 J R^2 - \frac{1}{4} \mu_0 J \rho^2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( 1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right).$$

#### Příklad 3.15

S

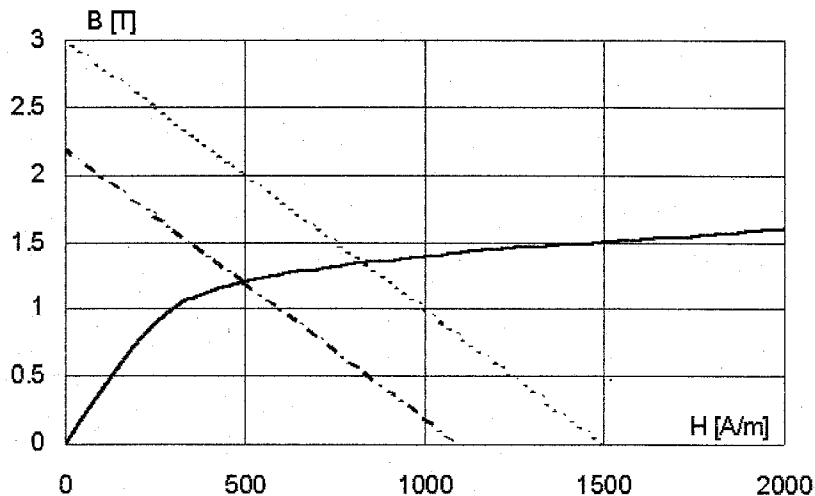
Určete magnetické pole ve feromagnetickém materiálu s velmi úzkou hysterezní smyčkou ve tvaru prstence (toroidu), který je buzen stálým proudem. Závislost mezi  $B$  a  $H$  je dána v tabulce. Na prstenci se středním průměrem 255 mm je navinuto  $N=160$  závitů vodiče, kterým protéká proud 2,5 A.

### 3. Magnetostatické pole

Vypočtete  $B$  na středním průměru. Jaký bude proud, který bude vytvářet stejnou indukci  $B$ , jestliže bude mít prstenec mezeru o šířce  $a=0,5$  mm? Jaké  $B$  bude na prstenci s mezerou pro proud 7,5 A?

|           |     |     |      |      |
|-----------|-----|-----|------|------|
| $H$ [A/m] | 250 | 500 | 1000 | 2000 |
| $B$ [T]   | 0,9 | 1,2 | 1,4  | 1,6  |

**Řešení:** Protože se jedná o magneticky měkký materiál, můžeme předpokládat, že existuje



jednoznačný, i když nelineární vztah, mezi  $B$  a  $H$ . Zřejmě platí

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_1 l = NI; \quad H_1 = NI/l = 500 \text{ A/m}$$

Odpovídající hodnotu  $B_1 = 1,2$  T získáme z tabulky (popř. grafu).

Jestliže se vyřízne mezeru, klesne indukce na hodnotu  $B_2$ , která bude stejná v prstenci i ve vzduchu. Označíme pole uvnitř materiálu  $H_{2i}$  a ve vzduchu  $H_{20} = B_2/\mu_0$ . Pak

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_{2i} l + H_{20} a = H_{2i} l + B_2 a / \mu_0 = NI,$$

což je lineární vztah mezi  $H_{2i}$  a  $B_2$ . Proto je řešení dáno průsečíkem přímky

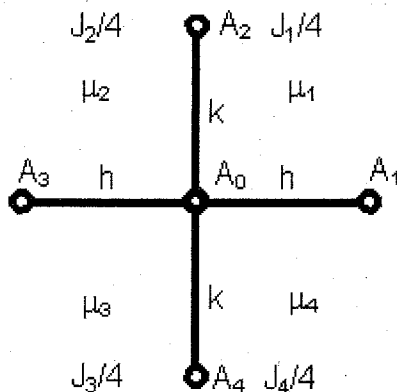
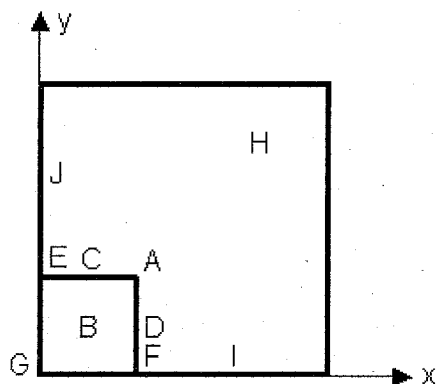
$$B = \frac{\mu_0 NI}{a} - \frac{\mu_0 H l}{a}$$

a magnetizační křivky. Abychom dostali stejnou hodnotu indukce, musíme použít proud 5,48 A, jak lze určit pomocí tabulkového procesoru (čerkovaně). Pro proud 7,5 A dostaneme pomocí tabulkového procesoru indukci 1,35 A (čárkovaně).

#### Příklad 3.16

S

Metodou sítí určete vektorový potenciál  $A$  velmi dlouhého vodiče, který má čtvercový průřez (strana čtverce  $2a = 4$  mm) permeabilitu  $\mu = 100 \mu_0$ , vede proud 16 A a je umístěn ve vzduchu.



### 3. Magnetostatické pole

**Řešení:** Zvolíme osy  $x$  a  $y$  rovnoběžně se stranami čtverce, osa  $z$  je podél osy vodiče. Vektorový potenciál  $A$  má, stejně jako proudová hustota  $J_z = 16/0,004^2 = 10^6 \text{ A/m}^2$  pouze podélnou složku  $A_z$  a ta splňuje Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_z = -\mu J = -\mu J_z.$$

Proudová hustota ve směru osy  $z$  se nemění a tedy derivace podle  $z$  je nulová, takže můžeme uvažovat dvourozměrnou úlohu. Pro metodu sítí nahrazujeme derivace diferencemi. Budou-li  $h$  a  $k$  vzdálenosti mezi uzly ve směru  $x$  a  $y$  (označení  $A_i$  se volí podle obr. – prostřední bod má index nula), pak zřejmě platí pro první a druhé derivace podle  $x$  (analogické vztahy platí pro derivace podle  $y$ )

$$\left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_0 = \frac{1}{h} (A_1 - A_0), \quad \left. \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right|_0 = \frac{1}{h^2} (A_1 + A_3 - 2A_0)$$

a tedy

$$-\left. \frac{\Delta^2 A}{\mu} \right|_0 = \frac{1}{h^2} (A_1 + A_3 - 2A_0) + \frac{1}{k^2} (A_2 + A_4 - 2A_0) = J.$$

Pokud bude prostředí homogenní, použije se tato rovnice. Pokud nebude prostředí homogenní, budeme uvažovat „průměrné“ prostředí. Např. pro dvě prostředí s  $\mu_1$  a  $\mu_2$  budeme místo  $1/\mu$  uvažovat  $(1/\mu_1 + 1/\mu_2)/2$ . Podobně si můžeme představit, že  $J$  bude rozdílná v jednotlivých buňkách, takže budeme uvažovat hustoty proudu  $J_1, J_2, J_3, J_4$  a tedy výsledná rovnice bude

$$\frac{A_0 - A_1}{\frac{2\mu_1\mu_4 h^2}{\mu_1 + \mu_4}} + \frac{A_0 - A_2}{\frac{2\mu_1\mu_2 k^2}{\mu_1 + \mu_2}} + \frac{A_0 - A_3}{\frac{2\mu_2\mu_3 h^2}{\mu_2 + \mu_3}} + \frac{A_0 - A_4}{\frac{2\mu_3\mu_4 k^2}{\mu_3 + \mu_4}} = \frac{J_1}{4} + \frac{J_2}{4} + \frac{J_3}{4} + \frac{J_4}{4}.$$

Použijeme-li tabulkový procesor, lze tuto úlohu snadno řešit (analogicky jako pro elektrostatické pole). V „dostatečné vzdálenosti“ (zvolíme 4 mm od vodiče) bude  $A$  zanedbatelné. Nemusíme uvažovat celý prostor, ale zvolíme pouze jednu čtvrtinu (např. horní pravý roh, jak je naznačeno na obr.). Tento roh má rozměr  $6 \times 6 \text{ mm}$ , takže zvolíme  $h = k = 0,5 \text{ mm}$  a použijeme tabulku se  $13 \times 13$  buňkami (každá buňka odpovídá uzlu s potenciálem  $A_i$ ). Protože se vyskytuje pouze prostředí s  $\mu$  a  $\mu_0$ , budu se vyskytovat pouze varianty  $\mu_m = 2\mu_0(100.1)/(100+1) = 2 \mu_0/1,01$ ;  $\mu = 100 \mu_0$ ;  $\mu_0$ . Lze identifikovat celkem 10 typů bodů ( $A$  až  $J$ ) a příslušně modifikovat výslednou rovnici. Typy B a H jsou uvnitř homogenního prostředí (pro H je navíc  $J \neq 0$ ). Ostatní typy se odvodí z výsledné rovnice. Např. pro typ A dostaneme (pro  $h=k$ )

$$\frac{A_0 - A_1}{\mu_0 h^2} + \frac{A_0 - A_2}{\mu_0 k^2} + \frac{A_0 - A_3}{\mu_1 h^2} + \frac{A_0 - A_4}{\mu_1 k^2} = \frac{J}{4}.$$

$$A_0 = \left[ A_1 + A_2 + 0,505(A_3 + A_4) + \frac{J\mu_0 h^2}{4} \right] / (1 + 1 + 0,505 + 0,505).$$

|   | A               | B                | C                | D                |
|---|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| 1 | 0               | 0                | 0                | 0                |
| 2 | =(A1+A3+2*B2)/4 | =(A2+B1+B3+C2)/4 | =(B2+C1+C3+D2)/4 | =(C2+D1+D3+E2)/4 |

|    |                                     |                                           |                                           |                                           |
|----|-------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 8  | =(A7+A9+2*B8)/4                     | =(A8+B7+B9+C8)/4                          | =(B8+C7+C9+D8)/4                          | =(C8+D7+D9+E8)/4                          |
| 9  | =(A0\$1*2+0.01*A10+A8+1.01*B9)/2.02 | =(A0\$1*2+0.01*B10+B8+0.505*(A9+C9))/2.02 | =(A0\$1*2+0.01*C10+C8+0.505*(B9+D9))/2.02 | =(A0\$1*2+0.01*D10+D8+0.505*(C9+E9))/2.02 |
| 10 | =(A9+A11+2*B10)/4+\$O\$1*100        | =(A10+B9+B11+C10)/4+\$O\$1*100            | =(B10+C9+C11+D10)/4+\$O\$1*100            | =(C10+D9+D11+E10)/4+\$O\$1*100            |
| 11 | =(A10+A13+2*B11)/4+\$O\$1*100       | =(A11+B10+B12+C11)/4+\$O\$1*100           | =(B11+C10+C12+D11)/4+\$O\$1*100           | =(C11+D10+D12+E11)/4+\$O\$1*100           |
| 12 | =(A11+A13+2*B12)/4+\$O\$1*100       | =(A12+B11+B13+C12)/4+\$O\$1*100           | =(B12+C11+C13+D12)/4+\$O\$1*100           | =(C12+D11+D13+E12)/4+\$O\$1*100           |
| 13 | =(2*A12+2*B13)/4+\$O\$1*100         | =(A13+2*B12+C13)/4+\$O\$1*100             | =(B13+2*C12+D13)/4+\$O\$1*100             | =(C13+2*D12+E13)/4+\$O\$1*100             |

### 3. Magnetostatické pole

Ostatní typy by se odvodily podobně. Potenciál  $A$  bude zřejmě symetrický podle os  $x$  a  $y$ . Z důvodu symetrie proto budou pro body A1 až A13 a B13 až M13 nulové normálové derivace potenciálu  $A$ . V dostatečné vzdálenosti bude  $A = 0$  a proto v buňkách A1 až M1 a M2 až M13 bude 0. V buňce O1 je uložena hodnota  $J\mu_0 h^2/4 = 7,85398 \cdot 10^{-08}$ . Vztahy pro výpočet v jednotlivých uzlech jsou ukázány v tabulce. Sloupce G až K a řádky 3 až 7 neuvádíme, neboť sloupce G až L získáme kopírováním sloupce F a řádky 3 až 8 kopírováním řádku 2

|    | E                                             | F                      | L                      | M |
|----|-----------------------------------------------|------------------------|------------------------|---|
| 1  | 0                                             | 0                      | 0                      | 0 |
| 2  | $=(D2+E1+E3+F2)/4$                            | $=(E2+F1+F3+G2)/4$     | $=(K2+L1+L3+M2)/4$     | 0 |
| 8  | $=(D8+E7+E9+F8)/4$                            | $=(E8+F7+F9+G8)/4$     | $=(K8+L7+L9+M8)/4$     | 0 |
| 9  | $=(\$O\$1+F9+E8+0.505*(D9+E10))/3.01$         | $=(E9+F8+F10+G9)/4$    | $=(K9+L8+L10+M9)/4$    | 0 |
| 10 | $=(\$O\$1+0.01*D10+F10+0.505*(E9+E11))/2.02$  | $=(E10+F9+F11+G10)/4$  | $=(K10+L9+L11+M10)/4$  | 0 |
| 11 | $=(\$O\$1+0.01*D11+F11+0.505*(E10+E12))/2.02$ | $=(E11+F10+F12+G11)/4$ | $=(K11+L10+L12+M11)/4$ | 0 |
| 12 | $=(\$O\$1+0.01*D12+F12+0.505*(E11+E13))/2.02$ | $=(E12+F11+F13+G12)/4$ | $=(K12+L11+L13+M12)/4$ | 0 |
| 13 | $=(\$O\$1+0.01*D13+F13+1.01*E12)/2.02$        | $=(E13+2*F12+G13)/4$   | $=(K13+2*L12+M13)/4$   | 0 |

Potenciál se vypočte iterací, podobně jako při řešení úloh v elektrostatice. Pro přehlednost jsou všechny uvedené hodnoty násobeny  $10^9$ . Pole bychom určili pomocí vztahu  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , kde derivace určíme pomocí diferencí. Přitom pro  $B_x = \partial A / \partial y$  a  $B_y = -\partial A / \partial x$  bychom vytvořili další tabulky. Např. hodnotu  $B_x$  v uzlu B2 bychom určili jako  $=(B1-B2)/0.0005$  a  $B_y$  jako  $=(B2-C2)/0.0005$ .

|    | A      | B      | C      | D     | E    | F    | G    | H    | I    | J    | K   | L   | M |
|----|--------|--------|--------|-------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|---|
| 1  | 0      | 0      | 0      | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0   | 0   | 0 |
| 2  | 342    | 337    | 324    | 304   | 277  | 247  | 213  | 179  | 143  | 107  | 71  | 36  | 0 |
| 3  | 693    | 683    | 656    | 613   | 559  | 496  | 428  | 358  | 287  | 215  | 143 | 71  | 0 |
| 4  | 1063   | 1047   | 1003   | 934   | 848  | 750  | 646  | 539  | 430  | 322  | 214 | 107 | 0 |
| 5  | 1463   | 1440   | 1374   | 1273  | 1149 | 1011 | 867  | 721  | 574  | 429  | 285 | 142 | 0 |
| 6  | 1909   | 1876   | 1781   | 1636  | 1462 | 1278 | 1090 | 902  | 717  | 534  | 354 | 176 | 0 |
| 7  | 2422   | 2374   | 2236   | 2029  | 1787 | 1548 | 1313 | 1082 | 857  | 636  | 421 | 209 | 0 |
| 8  | 3032   | 2962   | 2761   | 2456  | 2108 | 1815 | 1532 | 1257 | 991  | 734  | 484 | 241 | 0 |
| 9  | 3781   | 3681   | 3389   | 2926  | 2373 | 2072 | 1744 | 1423 | 1116 | 823  | 542 | 269 | 0 |
| 10 | 72974  | 69679  | 59111  | 38816 | 2785 | 2355 | 1950 | 1575 | 1227 | 900  | 591 | 293 | 0 |
| 11 | 117342 | 111535 | 93144  | 59027 | 3180 | 2612 | 2127 | 1700 | 1315 | 961  | 629 | 311 | 0 |
| 12 | 141907 | 134559 | 111487 | 69550 | 3440 | 2786 | 2246 | 1782 | 1373 | 1000 | 654 | 323 | 0 |
| 13 | 149753 | 141891 | 117278 | 72831 | 3529 | 2847 | 2287 | 1811 | 1393 | 1014 | 662 | 327 | 0 |

Vypočteme-li pro srovnání  $A$  podle příkladu 3.9 uvnitř vodiče (oblast A9 až E13) a odečteme-li tyto hodnoty od hodnot vypočtených numerickou simulací, dostaneme následující tabulku:

|    | A      | B      | C      | D      | E      |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|
| 9  | 253556 | 255351 | 256425 | 252435 | 253700 |
| 10 | 253815 | 254064 | 254002 | 253260 | 254113 |
| 11 | 253353 | 253398 | 253449 | 253648 | 254508 |
| 12 | 253047 | 253113 | 253340 | 253854 | 254767 |
| 13 | 252954 | 253038 | 253328 | 253921 | 254856 |

Je zřejmé, že dostáváme zhruba konstantní hodnoty (zatímco pro numerickou simulaci jsme zvolili, že potenciál v „nekonečnu“ bude nulový, v příkladu 3.9 byly specifikovány pouze derivace, takže se potenciál bude lišit o konstantní hodnotu).

### 3. Magnetostatické pole

#### Příklad 3.17

D

Na přímý vodič o délce  $l = 0,4$  m, kterým protéká proud  $I = 1$  A působí v homogenním magnetickém poli o indukci  $B = 0,06$  T síla  $F = 0,02$  N. Určete úhel  $\alpha$  mezi směrem proudu a indukčními čarami.

**Řešení:** Síla působící na vodič je

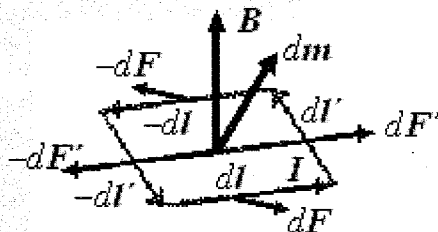
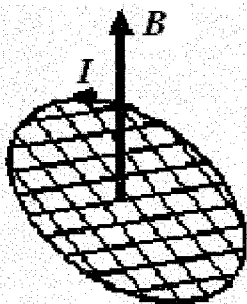
$$F = |\mathbf{F}| = I |\mathbf{l} \times \mathbf{B}| = IlB \sin \alpha$$

a tedy  $\alpha = \arcsin [F/(IlB)] = 56,4^\circ$ .

#### Příklad 3.18

B

Odvoďte výraz pro mechanický točivý moment, jímž působí pole  $\mathbf{B}$  na rovinou smyčku o ploše  $S$ , kterou protéká proud  $I$ .



**Řešení:** Předpokládejme, že vektor  $\mathbf{B}$  míří svisle vzhůru. Protněme rovinu smyčky řadou vodorovných rovin. Vzniklé vodorovné přímky doplníme soustavou spádových přímek. Tím dostaneme elementární obdélníky. Představme si, že obvod každého obdélníka obtéká proud  $I$  ve stejném smyslu, jak je ukázáno na obr. Tím se na každé straně všech vnitřních obdélníků dva stejné proudy opačného směru ruší a výsledný proud bude na vnějších stranách, které tvoří původní smyčku. Výsledný magnetický účinek pole na všechny elementární obdélníkové proudy tedy bude stejný jako účinek pole na celou smyčku. Uvažujeme elementární obdélník omezený elementy  $dl, dl', -dl, -dl'$  s kladným smyslem voleným souhlasně s oběhem proudu. Orientovaná plocha obdélníku je vektor kolmý k rovině smyčky

$$d\mathbf{S} = dl \times dl'.$$

Na kladně označené prvky působí podle předešlého příkladu síly

$$d\mathbf{F} = I dl \times \mathbf{B}, \quad d\mathbf{F}' = I dl' \times \mathbf{B}.$$

Na další dva prvky působí opačné síly. Proto se účinek sil vzájemně ruší. Navíc síly  $d\mathbf{F}'$  a  $-d\mathbf{F}$  leží v přímce. Zbývá tedy jen točivý moment dvojice sil  $d\mathbf{F}$  a  $-d\mathbf{F}$

$$d\mathbf{M} = -dl' \times d\mathbf{F} = -dl' \times I dl \times \mathbf{B} = I(dl' \cdot dl)\mathbf{B} - I(dl' \cdot \mathbf{B}) dl,$$

kde dvojný součin vektorů se převede na výraz bez vektorových násobení. Podobně upravíme

$$I(dl \times dl') \times \mathbf{B} = I\mathbf{B} \times (dl' \times dl) = I(\mathbf{B} \cdot dl) dl' - I(\mathbf{B} \cdot dl') dl.$$

Protože  $dl'$  je kolmé na  $dl$  a  $dl$  je kolmé na  $\mathbf{B}$  jsou oba poslední výrazy totožné a tedy

$$d\mathbf{M} = I(dl \times dl') \times \mathbf{B} = I d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

kde  $d\mathbf{m} = I d\mathbf{S}$  je moment magnetického dipólu elementární obdélníkové smyčky. Výsledný točivý moment získáme integrací. Je-li pole  $\mathbf{B}$  v rozsahu rovinné smyčky homogenní, působí na smyčku točivým momentem

$$\mathbf{M} = I \mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

#### Příklad 3.19

C

Vyšetřete chování smyčky o ploše  $S$ , kterou protéká proud  $I$  v homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B}$ .

**Řešení:** Na smyčku působí točivý moment podle předešlého příkladu, který se snaží otočit vektor magnetického momentu do směru pole. Stane-li se tak, točivý moment vymizí a smyčka je ve stabilní poloze, protože se při vychýlení vrací účinkem momentu  $\mathbf{M}$  do této polohy. Moment  $\mathbf{M}$  vymizí také, když jsou vektory  $\mathbf{m}$  a  $\mathbf{B}$  protisměrné, ale tato poloha je zřejmě labilní.

### 3. Magnetostatické pole

#### Příklad 3.20

C

Vyšetřete pole uvnitř příčné ploché válcové dutiny v nekonečném homogenním prostředí s osou rovnoběžnou se směrem pole  $B$ .

**Řešení:** Je-li dutina velmi plochá, je celkový ekvivalentní plošný proud na plášti válce slabý, takže jej můžeme zanedbat. Protože je pole rovnoběžné s osou válce, platí, že normálové složky  $B$  na plášti jsou nulové a na podstavách jsou stejné, tzn. ( $B_d$  je pole uvnitř dutiny,  $n^0$  je jednotkový normálový vektor)

$$\begin{aligned} (B_d - B) \cdot n^0 &= 0, & B_{dn} &= B, & B_{dn} &= B = \mu H. \\ \mu H &= \mu_0 H_{dn}, & H_{dn} &= \mu_r H. \end{aligned}$$

V příčné ploché dutině je tedy  $B$  stejné, ale intenzita pole je  $\mu_r$ -krát větší. Tento jev má velkou důležitost. Stejně se chová např. pole uvnitř tenké vzduchové mezery elektromagnetu (nepřihlížíme-li k rozptylu).

#### Příklad 3.21

C

Vyšetřete pole uvnitř štíhlé podélné válcové dutiny v nekonečném homogenním prostředí s osou rovnoběžnou se směrem pole  $B$ .

**Řešení:** Výsledné pole uvnitř dutiny je slabší, než v okolním homogenním poli. Míra zeslabení ovšem závisí na rozměrech dutiny. Protože stěny válce mají konečnou vodivost a proto je plošná hustota  $K$  rovna nule, platí pro tečné složky na plášti ( $H_d$  je intenzita pole uvnitř dutiny,  $n^0$  je jednotkový normálový vektor)

$$\begin{aligned} (H_d - H) \times n^0 &= K = 0, & H_{dt} &= H_t = H, \\ B_{dt} &= \mu_0 H = \mu_0 B / \mu = B / \mu_r. \end{aligned}$$

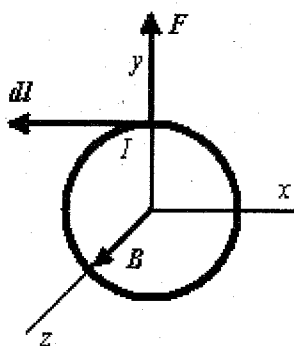
Tzn. že ve štíhlé podélné dutině je intenzita magnetického pole stejná, ale magnetické pole  $B_d$  je  $\mu_r$ -krát menší než v okolním prostředí. To lze využít např. při magnetickém stínění.

#### Příklad 3.22

D

Vyšetřete silové působení uvnitř proudové smyčky (jednoho závitu).

**Řešení:** Uvnitř jednoho izolovaného obvodu existují magnetické síly, protože proud v jedné části vytváří magnetické pole ve zbytku obvodu. Je zřejmé, že z důvodu symetrie bude výsledné pole  $B$  ve směru osy  $z$ , neboť složky kolmé na osu se budou vzájemně rušit.



Uvažujeme-li element  $dl$ , kolmý na osu  $y$ , pak síla  $F = I dl \times B$  působí ve směru osy  $y$ , jak je naznačeno na obrázku. Tzn., že v každém bodě působí tato síla radiálně a tedy má tendenci rozpínat smyčku (závit).

#### Příklad 3.23

D

Proud s konstantní hustotou  $J$  teče ve směru osy  $z$  mezi válci  $x^2 + y^2 = a^2$  a  $x^2 + y^2 = b^2$ . Určete intenzity magnetického pole v jednotlivých oblastech.

**Řešení:** Pro statické pole platí

$$\oint_C H \cdot dl = I_f.$$

### 3. Magnetostatické pole

Zvolíme-li jako křivku  $C$  kružnici o poloměru  $r$  se středem na ose  $z$ , bude integrál roven  $2\pi r H$ , kde  $H$  má azimutální směr (tečna ke křivce  $C$ ) a tedy bude pro jednotlivé oblasti platit:

- a) Pro  $r < a$  bude  $I_f = 0$  a tedy  $H = 0$ ,
- b) Pro  $a < r < b$  bude  $H = I_f / (2\pi r) = J \pi (r^2 - a^2) / (2\pi r) = J (r^2 - a^2) / (2r)$ ,
- c) Pro  $r > b$  bude  $H = I_f / (2\pi r) = J \pi (b^2 - a^2) / (2\pi r) = J (b^2 - a^2) / (2r)$ .

#### Příklad 3.24

C

Určete  $\mathbf{B}$  pro magnetický dipól.

**Řešení:** Podle definice je moment magnetického dipólu (smyčky)  $\mathbf{m} = SI \mathbf{n}^0$ , kde  $S$  je plocha smyčky,  $I$  je protékající proud a  $\mathbf{n}^0$  je jednotkový normálový vektor smyčky  $S$ . Pro vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  magnetického dipólu o poloměru  $a$  v bodě  $P$  platí (vektor  $\mathbf{r}$  směřuje ze středu smyčky do bodu  $P$ ,  $\mathbf{r}^0$  je jednotkový vektor ve směru  $\mathbf{r}$ , uvažujeme kulové souřadnice s osou  $z$  ve směru  $\mathbf{n}^0$ )

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}^0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{SI \mathbf{n}^0 \times \mathbf{r}^0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{SI \sin \theta}{r^2} \boldsymbol{\varphi}^0 \quad \text{pro } r^3 \gg a^3,$$

kde  $\theta$  je úhel mezi  $\mathbf{n}^0$  a  $\mathbf{r}^0$ . Protože  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{r}^0 & r\theta^0 & r \sin \theta \boldsymbol{\varphi}^0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{SI\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \left( \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \right) \mathbf{r}^0 + \left( \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) r\theta^0 \right] = \\ &= \frac{SI\mu_0}{4\pi r^2} (2 \cos \theta \mathbf{r}^0 + \sin \theta \theta^0) \end{aligned}$$

Tento vztah lze ovšem použít pouze v místech, kde je  $r$  mnohem větší než rozměry magnetického dipólu.

#### Příklad 3.25

C

Vysvětlete fyzikální význam vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$ .

**Řešení:** Zatímco potenciál  $\varphi$  v nějakém místě se rovná práci, kterou vykoná elektrické pole během přemístění jednotkového kladného náboje z tohoto místa do nekonečna, dostaneme pro magnetický potenciál

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

To umožní určit fyzikální význam vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$ . Z horního vztahu je zřejmé, že tok vektoru  $\mathbf{B}$  plochou  $S$  (tzv. indukční tok  $\Phi$ ) je roven cirkulaci vektoru  $\mathbf{A}$  po okrajové křivce plochy  $C$ .

Plocha  $S$  může být libovolně zakřivená. Z naznačené analogie elektrostatického a magnetostatického pole lze dále vyvodit, že obdobou ekvipotenciálů  $\varphi$  je povrch indukční trubice vedoucí určitý indukční tok  $\Phi$ .

#### Příklad 3.26

B

Vyšetřete pole uvnitř magnetické koule o  $\mu = \text{konst.}$  vložené do homogenního primárního pole  $\mathbf{B}$ .

**Řešení:** Pro řešení využijeme analogie s elektrostatickým polem (příklad 1.42). Místo intenzity  $\mathbf{E}$  budeme uvažovat intenzitu magnetického pole  $\mathbf{H}$  a pro pole  $\mathbf{H}_K$  uvnitř koule dostaneme ( $\mu = \mu_r \mu_0$ )

$$\mathbf{H}_K = \mathbf{H} \frac{3}{\mu_r + 2} = \mathbf{H} \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0}, \quad \mathbf{B}_K = \mu \mathbf{H}_K = \mu_0 \mathbf{H} \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} = \mathbf{B} \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0}$$

Pro  $\mu \gg \mu_0$  dostaneme přibližně  $\mathbf{B}_K = 3\mathbf{B}$ .

## 4. ELEKTROMAGNETIZMUS

### Příklad 4.1

D

Vypočítejte vlastní indukčnost cívky navinuté na prstenovém jádru o šířce  $b = 20$  mm s vnitřním poloměrem  $a_1 = 25$  mm a vnějším poloměrem  $a_2 = 35$  mm z materiálu s relativní permeabilitou  $\mu_r = 5\,000$ , a s počtem závitů  $N = 1\,000$ .

**Řešení:** Platí  $L = \Phi_c / I$ , kde  $\Phi_c$  je cívkový tok vyvolaný proudem  $I$ . Podle Hopkinsonova zákona je tok v jádru  $\Phi = NI / R_m$ , kde  $R_m$  je reluktance jádra.

Neuvažujeme-li rozptyl, pak magnetický tok  $\Phi$  prochází všemi závitů cívky, takže cívkový tok je  $\Phi_c = N\Phi$ . Z toho plyne

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2 I}{R_m I} = \frac{N^2}{R_m}.$$

Podle tohoto vztahu můžeme počítat indukčnosti cívek bez rozptylu toku, kde magnetický tok všech závitů je stejný a je dán reluktancí  $R_m$ . Počítáme-li reluktanci magnetického obvodu podle přibližného vzorce (tzn. za předpokladu rovnoměrného rozložení toku po průřezu prstenu), je

$$R_m = \frac{I_s}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{\pi(a_2 + a_1)}{\mu_0 \mu_r b(a_2 - a_1)} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

Indukčnost cívky je  $L = N^2 / R_m = 6,67 \text{ H}$ .

*Poznámka:* Ve skutečnosti je indukčnost o něco větší, protože vinutí zaujímá určitý objem (není soustředěno do velmi tenké vrstvy na povrchu prstenu) a jeho závitů vyvolávají a obepínají též určitý (poměrně malý) magnetický tok, jenž prochází vinutím nad povrchem prstenového feromagnetického jádra. Tento tok je různý pro různé závitů. Největší tok obepínají závitů vrchní vrstvy vinutí.

### Příklad 4.2

B

Vypočítejte indukčnost na jednotku délky dvou vodičového vedení s vodiči o poloměru  $r$  a vzdálenosti mezi středy vodičů  $a$ . Úlohu řešte za předpokladu  $a \gg r$ . Vedení je ve vzduchu.

**Řešení:** Indukčnost vedení má dvě složky. Vnější indukčnost  $L$  je dána magnetickým tokem, jehož indukční čáry se uzavírají kolem obou vodičů a vnitřní indukčnost je dána tokem, jehož indukční čáry probíhají uvnitř vodičů.

Nejprve vypočítáme vnější indukčnost. Intenzita magnetického pole v rovině mezi oběma vodiči, vyvolaná proudem  $I$  jednoho vodiče, je  $H = I / (2\pi x)$ , kde  $x$  je vzdálenost od osy uvažovaného vodiče. Vektor  $\mathbf{H}$  je kolmý k této rovině a magnetický tok procházející rovinou na délce  $l$ , vyvolaný proudem jednoho vodiče je

$$\Phi'_1 = \int_r^a B dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_r^a \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a}{r}$$

To platí přibližně pro  $a \gg r$ , neboť druhý vodič jsme nahradili proudovým vláknem v jeho ose a uvažovali jsme tok plochou, jež je touto osou ohraničena. Kdybychom respektovali to, že jednotlivá vlákna v průřezu druhého vodiče jsou vázána s různými magnetickými toky (např. u dvou blízkých vodičů), bylo by nutno počítat indukčnost z energie magnetického pole (podobně jako se dále počítá vnitřní indukčnost tohoto vinutí).

Druhý vodič má stejný proud (smyčka vedení tvoří uzavřený obvod, jímž prochází proud  $I$ ) a proto vyvolá stejný magnetický tok. Celkový tok, procházející plochou mezi vodiči vedení s délkou  $l$  je

$$\Phi' = 2\Phi'_1 = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{a}{r}$$

a vnější indukčnost na jednotku délky vedení

#### 4. Elektromagnetismus

$$\frac{L'}{l} = \frac{\Phi'}{Il} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a}{r} \quad [\text{H/m, H/m, m}].$$

Vnitřní indukčnost  $L''$ , danou magnetickým tokem ve vodičích, určíme z energie magnetického pole ve vodičích. Při značné vzdálenosti obou vodičů ( $a \gg r$ ) je magnetické pole ve vodiči dáno převážně proudem tohoto vodiče. Intenzita pole druhého, vzdáleného vodiče, se uplatní velmi málo. Pro intenzitu pole uvnitř vodiče, vyvolanou proudem tohoto vodiče, platí (uvnitř kruhu o poloměru  $\rho$  teče proud  $I\rho^2/r^2$ )

$$H = \frac{I\rho}{2\pi r^2}$$

Hustota energie magnetického pole  $w = BH/2 = \mu_0 H^2/2$  (pro neferomagnetické vodiče s relativní permeabilitou  $\mu_r = 1$ ). Ve vrstvě s poloměrem  $\rho$  tloušťkou  $d\rho$  a délkou  $l$  je obsažena energie

$$dW = \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{I\rho}{2\pi r^2} \right)^2 2\pi \rho l d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r^4} l \rho^3 d\rho$$

V obou vodičích délky  $l$  je celková energie

$$W = 2 \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r^4} l \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\mu_0 I^2 l}{8\pi} = \frac{1}{2} L'' I^2$$

Ze srovnání je vnitřní indukčnost vodičů na jednotku délky

$$\frac{L''}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad [\text{H, m, H/m}]$$

Celková indukčnost na jednotku délky

$$\frac{L}{l} = \frac{L' + L''}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ 4 \ln \frac{a}{r} + 1 \right] \quad [\text{H/m, H, m}]$$

**Poznámka:** Vnitřní indukčnost vodičů nelze počítat ze statické definice (podobně jako vnější indukčnost  $L'$ ), neboť jednotlivé indukční čáry magnetického pole uvnitř vodiče neobepínají celý proud. Vnitřní indukčnost byla počítána za předpokladu, že vodiče nejsou feromagnetické (tj. za předpokladu, že mají relativní permeabilitu  $\mu_r = 1$ ). U feromagnetických vodičů s permeabilitou  $\mu$  je vnitřní indukčnost  $\mu_r$  krát větší. Vnitřní indukčnost byla počítána pro rovnoměrné rozložení proudu po průřezu vodičů. Při nerovnoměrném rozložení proudu je samozřejmě jiná.

#### Příklad 4.3

Dvě cívky  $N_1, N_2$  jsou umístěny na sloupcích stejného jádra buď podle obr. a) nebo b). Určete (v obou případech) jejich indukčnosti  $L_1, L_2$  a vzájemnou indukčnost  $M$  za předpokladů, že  $\mu_r \rightarrow \infty$  pro feromagnetikum a že zanedbáte rozptyl.

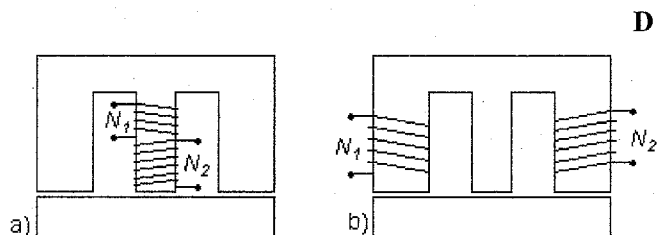
**Řešení:** V případech uspořádání cívek podle obr. a) (náhradní schéma na obr. c) je výsledný magnetický odpor magnetického obvodu

$$R_m = R_{mv2} + \frac{R_{mv1} R_{mv3}}{R_{mv1} + R_{mv3}} \quad [\text{H}^{-1}]$$

Pro první cívku bude celkový tok  $\Phi_{c1} R_m = N_1 I_1$  a pro druhou cívku  $\Phi_{c2} R_m = N_2 I_2$ . Odtud plyne vlastní indukčnost první cívky

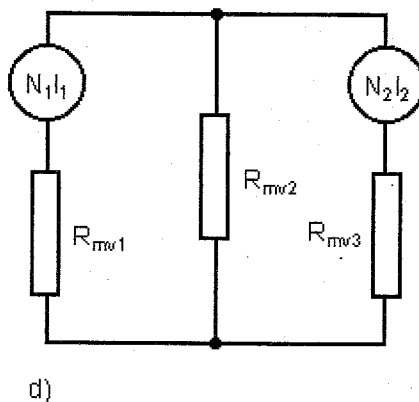
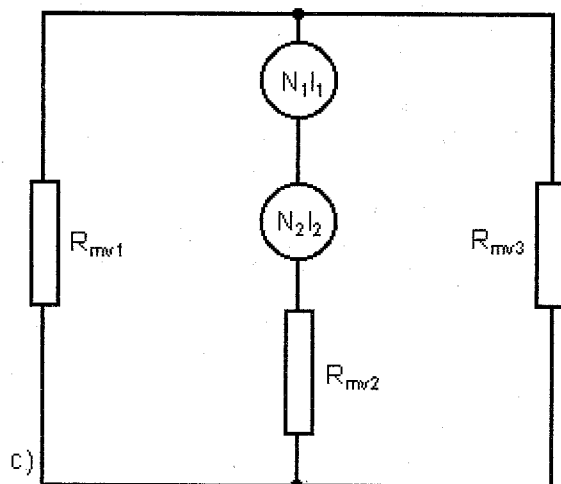
$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_m} \quad [\text{H}]$$

a druhé cívky



#### 4. Elektromagnetizmus

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_m} \text{ [H]}$$



Protože celkový tok  $\Phi_{c1}$  prochází i druhou cívkou, je vzájemná indukčnost

$$M = \frac{N_1 N_2}{R_{mv2} + R_{mv1} R_{mv3} / (R_{mv1} + R_{mv3})} \text{ [H]}$$

V případě uspořádání cívek dle obr. b (náhradní schéma obr. d) je výsledný magnetický odpor z pohledu první cívky (zdroje  $N_1 I_1$ )

$$R_{m1} = R_{mv1} + \frac{R_{mv2} R_{mv3}}{R_{mv2} + R_{mv3}} \text{ [H}^{-1}\text{]}$$

z pohledu druhé cívky (zdroje  $N_2 I_2$ )

$$R_{m2} = R_{mv3} + \frac{R_{mv1} R_{mv2}}{R_{mv1} + R_{mv2}} \text{ [H}^{-1}\text{]}$$

Pro první cívku bude celkový tok  $\Phi_{c1} R_{m1} = N_1 I_1$  a pro druhou cívku  $\Phi_{c2} R_{m2} = N_2 I_2$ . Odtud plyne vlastní indukčnost první cívky

$$L = \frac{N_1^2}{R_{m1}} \text{ [H]}$$

a druhé cívky

$$L = \frac{N_2^2}{R_{m2}} \text{ [H]}.$$

Pro druhou cívku se bude celkový tok  $\Phi_{c1}$  dělit. Pro tok druhé cívky  $\Phi_2$  platí

$$\Phi_{c1} \frac{R_{mv2} R_{mv3}}{R_{mv2} + R_{mv3}} = \Phi_2 R_{mv3}$$

$$\Phi_2 = \frac{N_1 I_1}{R_{m1} R_{mv3}} \frac{R_{mv2} R_{mv3}}{R_{mv2} + R_{mv3}} = N_1 I_1 \frac{R_{mv2}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m3}}$$

Vzájemná indukčnost je tedy

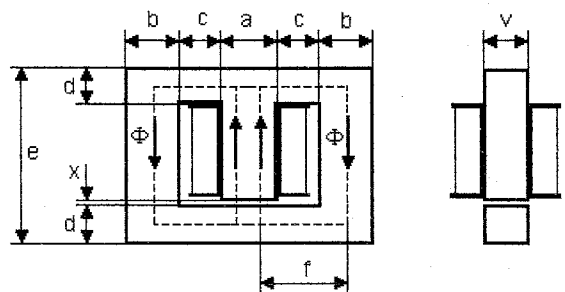
$$M = N_1 N_2 \frac{R_{mv2}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m1} R_{m3} + R_{m2} R_{m3}} \text{ [H]}$$

### Příklad 4.4

D

Magnetický obvod je složen z plechů. Na středním sloupku jsou navinuta dvě stejná vinutí s počtem závitů  $N_1 = N_2 = 500$ ,  $a = 20$  mm,  $b = 10$  mm,  $c = 15$  mm,  $d = 10$  mm,  $e = 70$  mm,  $f = 25$  mm a  $x = 0,25$  mm. Vypočítejte výslednou indukčnost pro následující zapojení obou vinutí:

- 1) do série a souhlasně (vzhledem ke společnému magnetickému toku)
- 2) do série a proti sobě
- 3) paralelně a souhlasně (vzhledem ke společnému magnetickému toku)
- 4) paralelně a proti sobě.



Úlohu řešte pro permeabilitu plechů  $\mu_r = 2\,000$ . Zanedbejte rozptyl a předpokládejte, že činitel vazby se rovná jedné.

**Řešení:** Magnetický odpor jádra je  $R_m = l / \mu_0 \mu_r S$ . Za délku  $l$  dosadíme délku střední silové čáry  $v$  uvažované části obvodu. Výpočet je přibližný (zanedbáváme rozptylový magnetický tok a závislost permeability na indukci), proto zanedbáme též zakřivení silových čar v rozích a počítáme délku dráhy v železe  $l = 2f + 2e - 2d = 0,17$  m. Průřez dráhy jedné poloviny toku v železe je  $S' = 2 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>. Délka dráhy ve vzduchové mezeře je  $x = 0,25 \cdot 10^{-3}$  m, průřez je  $S'_v S' = 2 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup> (zanedbáváme rozptyl).

Magnetický odpor  $R'_m$  dráhy jedné poloviny toku je dán součtem odporu dráhy v železe  $R_m$  a odporu dráhy ve vzduchové mezeře  $R'_{mv}$ . Tzn.  $R'_m = R_m + R'_{mv} = 1,33 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$ .

Magnetické odpory obou polovin toku jsou stejné a jsou řazeny paralelně. Magnetický odpor jádra

$$R_m = R'_m / 2 = 0,67 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}.$$

Vlastní indukčnost obou cívek  $L_1 = L_2 = L = \frac{N_1^2}{R_m} = \frac{N_2^2}{R_m} = 0,37 \text{ H}$

a jejich vzájemná indukčnost (cívky jsou umístěny na společném sloupku) při zanedbání rozptylu

$$M \rightarrow \sqrt{L_1 L_2} = L = \frac{N_1 N_2}{R_m} = 0,37 \text{ H}$$

- 1) Sériové zapojení se shodnými smysly vinutí odpovídá jednomu vinutí s dvojnásobným počtem závitů. Indukčnost je čtyřnásobná. Alternativně ji určíme podle vztahu

$$L_v = L_1 + L_2 + 2M = 4L = 1,48 \text{ H.}$$

- 2) Při sériovém zapojení s opačnými smysly vinutí působí obě vinutí proti sobě a jejich výsledné magnetické oběhové napětí je rovno nule. Zanedbáme-li rozptylové magnetické toky ( a jim odpovídající rozptylové indukčnosti), je výsledný tok roven nule a též výsledná indukčnost  $L_v = 0$ , jak plane ze vztahu  $L_v = L_1 + L_2 - 2M = 2L - 2L = 0$ .

- 3) Paralelní zapojení obou cívek se souhlasnými smysly vinutí odpovídá jednomu vinutí (s dvojnásobným průřezem drátu) s počtem závitů  $N = N_1 = N_2$ . Indukčnost je stejná jako vlastní indukčnost jednoho vinutí. Proud  $I$  se rozdělí do obou vinutí, ale magnetické oběhové napětí i cívkový tok a energie magnetického pole jsou stejné, jako kdyby celý proud procházel jen jedním vinutím  $L_v = L = 0,37 \text{ H}$ .

- 4) Při paralelním zapojení proti sobě závisí výsledná indukčnost (podle statické nebo energetické definice) na rozdělení proudů v obou vinutích. Při stejnosměrném (časově konstantním) proudu je indukčnost podle statické nebo energetické definice závislá na odporech obou vinutí. Jsou-li odpory stejné, rozdělí se proud stejným dílem do obou vinutí, magnetická oběhová napětí obou vinutí se ruší a nevzniká žádný tok (neuvažujeme-li rozptylový magnetický tok). Podle toho je pak  $L_v = 0$ . Při časově proměnném (např. střídavém) proudu závisí rozdělení proudu do obou paralelních vinutí nejen na odporech vinutí, ale i na rychlosti změn proudu. Při rychleji proměnných proudech se proudy

#### 4. Elektromagnetismus

rozdělí rovnoměrně do obou vinutí (nerovnováha proudů vyvolá v jádru střídavý magnetický tok indukující značný vyrovnávací proud v obou vinutích), takže výsledná indukčnost je  $L_v = 0$ .

##### Příklad 4.5

Vypočítejte  
přitažlivou sílu  
elektromagnetu  
 $s = a = 20 \text{ mm}$ ,  
 $b = 12 \text{ mm}$ ,  
 $x = 1 \text{ mm}$  a  
 $v = 15 \text{ mm}$ . Cívka  
elektromagnetu  
má počet závitů

$N = 500$  a teče jí proud  $I = 0,9 \text{ A}$ . Zanedbejte reluktance feromagnetických částí obvodu a rozptylové toky.

**Řešení:** Zanedbáme-li reluktanci feromagnetických částí obvodu, je indukčnost cívky

$$L = \frac{N^2}{R_{mv}},$$

kde  $R_{mv}$  je reluktance vzduchových mezer. Vzduchová mezera prostředního sloupku má reluktanci  $R_{mv2}$  a vzduchové mezery krajních sloupků mají reluktance  $R_{mv1} = R_{mv3}$ . Jak je zřejmé z náhradního schématu, je výsledná reluktance vzduchových mezer

$$R_{mv} = R_{mv2} + \frac{1}{2} R_{mv1}$$

Při zanedbání rozptylových toků je  $R_{mv2} = \frac{x}{\mu_0 a v}$  a  $R_{mv1} = \frac{x}{\mu_0 b v}$ ,  $R_{mv} = \frac{x(a+2b)}{2\mu_0 a b v}$  a

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{2\mu_0 a b v N^2}{x(a+2b)}, \quad \frac{dL}{dx} = -\frac{2\mu_0 a b v N^2}{x^2(a+2b)}.$$

Hledaná síla je  $F_x = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx} = -\frac{\mu_0 a b v N^2 I^2}{x^2(a+2b)}$  [N; A, H/m, m, A]

a po dosazení  $F_x = -20,8 \text{ N}$ . Znaménko minus znamená, že síla by zmenšovala vzdálenost  $x$ .

##### Příklad 4.6

Určete sílu a moment magnetoelektrického přístroje (s otočnou cívkou). Cívka je uložena v tenké vzduchové mezeře s homogenním magnetickým polem o intenzitě  $B = 0,1 \text{ T}$  a protékána jí proud  $10 \mu\text{A}$ . Délka vzduchové mezery (vodiče cívky)  $l = 15 \text{ mm}$ . Počet závitů cívky je  $N = 50$ . Cívka se natáčí kolem železného válečku a je navinuta na rámečku o šířce  $r = 20 \text{ mm}$ .

**Řešení:** Síla, která působí na jeden závit, kterým protéká proud  $I$  je

$$F = B I l.$$

Při průtoku maximálního proudu  $I_{max}$  platí

$$F_{max} = B I_{max} l = 0,1 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,015 = 15 \cdot 10^{-9} \text{ N} = 15 \text{ nN}.$$

Výsledný moment vlivem  $N$  závitů

$$M = N F r.$$

Při průtoku maximálního proudu  $I_{max}$  bude výsledný maximální moment

$$M_{max} = N F_{max} r = 15 \cdot 10^{-9} \cdot 0,02 \cdot 50 = 15 \cdot 10^{-9} \text{ Nm} = 15 \text{ nNm}.$$

## Příklad 4.7

C

Kruhová cívka se 75 závitů o poloměru 35 mm má osu rovnoběžnou s prostorově rovnoměrným polem. Hodnota pole  $B$  se mění konstantní rychlostí od 18 do 42 mT během 240 ms. Určete velikost napětí indukovaného v cívkě během tohoto časového intervalu.

**Řešení:** Protože magnetické pole je rovnoměrné a rovnoběžné s osou cívky, je tok každého závitu

$$\Phi_B = \pi B R^2,$$

kde  $R$  je poloměr závitu.

Napětí indukované v cívkě je

$$-N \frac{d\Phi_B}{dt} = -N \frac{d(B\pi R^2)}{dt} = -N\pi R^2 \frac{dB}{dt}.$$

Protože změna  $B$  probíhá konstantní rychlostí, platí

$$\frac{dB}{dt} = \frac{0,042 - 0,018}{0,24} = 0,1 \text{ T/s}.$$

Napětí indukované v cívkě je

$$-N\pi R^2 \frac{dB}{dt} = 0,029 \text{ V} = 29 \text{ mV}.$$

## Příklad 4.8

C

Rovnoměrné a stálé magnetické pole  $B = 0,01 \text{ T}$  směřuje podle osy  $z$  pravoúhlého systému. Hypotetická kruhová smyčka umístěná ve středu roviny  $xy$  s počátečním poloměrem  $R = 10 \text{ cm}$ , který se zmenšuje rychlostí  $100 \text{ m/s}$ . Určete indukované napětí ve smyčce, jako funkci času.

**Řešení:** Indukované napětí je

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B\pi R^2)}{dt} = -2B\pi R \frac{dR}{dt} = -0,628 \text{ V}.$$

## Příklad 4.9

C

Ve smyčce o ploše  $1 \text{ m}^2$  jsou vloženy do série odpory  $R_1 = 2 \Omega$  a  $R_2 = 1 \Omega$ . Smyčka uzavírá rovnoměrné proměnné pole, které se mění podle vztahu  $B = 0,1 t$ . Určete napětí na rezistorech.

**Řešení:** Indukované napětí je

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -0,1 \text{ V}.$$

Napětí se rozdělí v poměru odporů, neboť  $U = IR = U_1 + U_2 = IR_1 + IR_2$ . Tedy  $U_1 = -0,2/3 \text{ V}$  a  $U_2 = -0,1/3 \text{ V}$ .

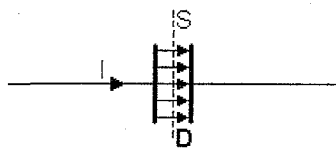
## Příklad 4.10

C

Kapacitor se nabíjí tak, že v určitém okamžiku je proud v přívodním vodiči  $0,5 \text{ mA}$  a svodový proud z jedné elektrody na druhou je  $0,04 \text{ mA}$  (je to „pronikající“ proud vlivem nedokonalého dielektrika, který by u ideálního kapacitoru neexistoval). Určete posuvný proud, který prochází plochou  $S$  ohraničenou uzavřenou křivkou  $C$ .

**Řešení:** Celkový proud procházející plochou  $S$  je  $0,5 \text{ mA}$ . Protože svodový proud je  $0,04 \text{ mA}$ , je posuvný proud  $0,46 \text{ mA}$ . Pomocí Ampérova zákona dostaneme

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \frac{d\Psi}{dt} = 0,5 \text{ mA}.$$



## Příklad 4.11

C

Vzduchový kapacitor s rovinnými rovnoběžnými elektrodami má plochu elektrod  $S = 10 \text{ cm}^2$ , které jsou oddělené vzdáleností  $d = 2 \text{ mm}$ . Určete velikost posuvného proudu při zanedbání rozptylu, je-li připojen na zdroj sinusového napětí  $U = 50 \sin(\omega t) \text{ V}$ ,  $f = 1 \text{ MHz}$ .

**Řešení:** Intenzita elektrického pole (při zanedbání rozptylu se jedná o rovnoměrné pole) je

$$E = U/d.$$

Hustota a velikost posuvného proudu jsou

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \partial U}{d \partial t} = \frac{\varepsilon_0}{d} \omega 50 \sin(\omega t) = 1,4 \text{ A}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} S = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1,4 \text{ mA}.$$

## Příklad 4.12

A

Je užitečné, abychom mohli měřit měrnou vodivost vzorku bez nutnosti připevňovat kontakty. Jedna metoda spočívá v tom, že umístíme kotouč z měřeného materiálu uvnitř solenoidu, ve kterém teče proměnný proud  $I_0 \sin(\omega t)$  tak, aby osy solenoidu a kotouče byly totožné. Kotouč má poloměr  $a$ , tloušťku  $s$  a vodivost  $\sigma$ . Zanedbejte magnetické pole vlivem indukovaných proudů a najděte vztah mezi  $\sigma$  a průměrným ztrátovým (rozptýleným) výkonem  $P$ .

**Řešení:** Magnetické pole uvnitř solenoidu bez kotouče s  $N$  závitů na metr ve směru osy  $z$  (osy solenoidu) je rovnoměrné

$$\mathbf{B} = \mu_0 N I_0 \sin(\omega t) \mathbf{z}^0 = B_0 \sin(\omega t) \mathbf{z}^0.$$

Předpokládejme, že pole vlivem indukovaných proudů v kotouči je zanedbatelné. Elektrické i magnetické pole pro dlouhý solenoid nezávisí ani na  $z$ , ani na azimutálním úhlu  $\phi$  a proto  $\text{rot } \mathbf{E}$  má pouze složku  $z$ . Proto dostaneme ( $r$  je vzdálenost od osy  $z$ )

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} \mathbf{z}^0 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -B_0 \omega \cos(\omega t) \mathbf{z}^0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} = -B_0 \omega \cos(\omega t),$$

$$\int d(rE_\phi) = -\int B_0 \omega \cos(\omega t) r dr,$$

$$rE_\phi = -\frac{r^2 B_0 \omega \cos(\omega t)}{2} + C.$$

Protože pro  $r = 0$  bude  $E_\phi = 0$  (křivka neobepíná žádné magnetické pole), je

$$E_\phi = -\frac{r B_0 \omega \cos(\omega t)}{2},$$

$$J_\phi = \sigma E_\phi = -\frac{\sigma B_0 \omega}{2} r \cos(\omega t).$$

Pro poloměru  $r$  teče proud v azimutálním směru v trubici o průřezu  $s dr$  a okamžitý ztrátový výkon v této trubici je daný

$$I^2 R = J_\phi^2 (s dr)^2 R = \left[ \frac{\sigma B_0 \omega}{2} r \cos(\omega t) \right]^2 (s dr)^2 \frac{2\pi r}{\sigma s dr}.$$

Okamžitý ztrátový výkon dostaneme integrací přes celý kotouč

$$P(t) = \int_0^a \frac{\pi \sigma}{2} [B_0 \omega \cos(\omega t)]^2 r^3 s dr = \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2}{8} s r^4 \cos^2(\omega t).$$

Celkový průměrný ztrátový výkon dostaneme jako průměr přes periodu  $T = 2\pi/\omega$

#### 4. Elektromagnetizmus

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{\pi \sigma B_0^2 \omega^2}{16} sr^4.$$

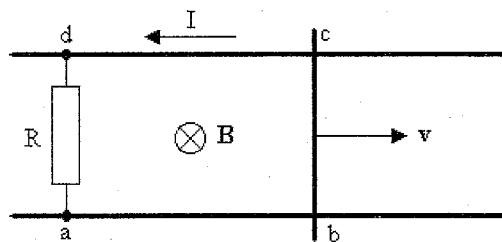
Je zřejmé, že při použití této metody je nutné, aby vířivé proudy v kotouči byly tak malé, že lze zanedbat magnetické pole vlivem indukovaných proudů, neboť jinak by byl uvedený výpočet značně nepřesný. To lze docílit volbou nízké frekvence  $\omega$ , menší tloušťky  $s$ , poloměru  $r$ , proudu  $I_0$  (a tím i  $B_0$ ), nebo volbou materiálu s menší vodivostí  $\sigma$ . Pro vyšší frekvence by navíc docházelo k povrchovému magnetickému jevu, což by způsobilo nerovnoměrné rozložení  $B$  a tedy i zvětšení nepřesnosti výpočtů. Na druhé straně je nutné volit rozumný kompromis, abychom dostali měřitelný průměrný ztrátový výkon  $P$ . Je tedy zřejmé, že tato metoda se může používat pro materiály s menší vodivostí  $\sigma$ .

#### Příklad 4.13

Vodič, který se pohybuje v konstantním magnetickém poli  $B$ , klouže svými konci  $b$  a  $c$  po nehybných rovnoběžných vodivých spojkách rychlostí  $v$ . Určete proud  $I$  (zanedbejte odpor vodičů).

**Řešení:** Pro indukované napětí platí

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Blv$$



kde uzavřená křivka  $C$  je křivka  $abcd$ ,  $S$  je plocha uzavřená touto křivkou,  $d\mathbf{S}$  má směr normály k ploše  $S$  (určíme podle pravidla pravé ruky – má opačný směr vzhledem k  $B$  a tedy  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -B dS$ ), změna toku je dána změnou plochy –  $d\Phi/dt = BdS/dt = B l dx/dt = Blv$ , kde  $l$  je délka propojky  $bc$ . Proto proud má vyznačený směr a platí

$$I = Blv/R.$$

Orientaci proudu můžeme kontrolovat také pomocí Lenzova pravidla. Prochází-li propojkou od  $b$  k  $c$  proud, pak na element vodiče  $ds$  působí síla  $d\mathbf{F} = ds \times \mathbf{B} I$ , která směřuje proti směru pohybu.

#### Příklad 4.14

Určete poloměr zakřivení dráhy pro elektron, který se pohybuje rychlostí  $v$  kolmo ke směru vektoru  $B$  v homogenním magnetickém poli.

**Řešení:** Elektron se pohybuje v rovině kolmé ke směru vektoru  $B$  a proto síla  $F$  se rovná

$$F = |\mathbf{F}| = |Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})| = FBe,$$

kde  $e$  je náboj elektronu. Síla  $F$  působí stále kolmo ke směru pohybu, proto velikost rychlosti zůstává stálá a mění se jen směr rychlosti. Elektron se v magnetickém poli pohybuje po kruhové dráze s takovým poloměrem  $r$ , aby odstředivá síla byla v rovnováze se silou vyvolanou magnetickým polem. Tedy platí

$$\frac{mv^2}{r} = vBe \quad \text{a tedy} \quad r = \frac{mv}{Be},$$

kde  $m$  je hmotnost elektronu a  $r$  je poloměr zakřivení dráhy.

**Poznámka:** Tento jev se prakticky využívá v řadě aplikací. Běžné je využití tohoto jevu v obrazovkách s magnetickým vychylováním elektronového paprsku, které se používají např. v televizních přijímačích. Pochopitelně pro praktické použití není pole homogenní (vychylovací cívky jsou obvykle velmi složité prostorově tvarované) a teoretické řešení skutečných vychylovacích cívek by bylo značně složité.

## Příklad 4.15

A

Určete točivý moment  $M$  unipolárního stroje (vodivý kotouč, který se otáčí v konstantním axiálním magnetickém poli  $B$ , s napětím na kontaktech na hřídeli a obvodu podle obr.). Moment vzniká působením magnetického pole na proud, který teče radiálně kotoučem.

**Řešení:** Unipolární motory jsou z principu nízkonapěťové s velkým proudem. Obvykle pracují se stálým proudem. Mohou dodávat vysoké točivé momenty při nízkých rychlostech. Aby existovaly radiálně tekoucí proudy, musí být kontakty kolem celého obvodu. Náboj  $Q$ , přenášený proudem, má azimutální rychlost  $\omega r$ , takže na něj působí radiální magnetická síla  $F_m = Q\omega r B$ . Současně na něj působí radiální elektrická síla  $F_e = QE$ .

Radiální rychlost  $v$  je  $\mu(E - \omega r B)$ , kde  $\mu = Qv/F$  je pohyblivost náboje. Radiální rychlost  $v$  je o mnoho řádů menší než azimutální rychlost  $\omega r$ . Tato malá radiální rychlost dává azimutální sílu  $QvB = Q\mu(E - \omega r B)B$ . Azimutální síla na jednotkový objem na poloměru  $r$  je tedy

$$F' = NQ\mu(E - \omega r B)B = \sigma(E - \omega r B)B,$$

kde  $N$  je počet přenášených nábojů v jednotkovém objemu. Tato objemová hustota síly je jednoduše  $[\mathbf{J} \times \mathbf{B}]$  a je určena pravidlem pravé ruky.

Pro kotouč o síle  $t$  je moment na jednotkový objem dán  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}'$  a celkový moment je

$$M = \int_a^b r [2\pi r \sigma (E - \omega r B) B] dr = 2\pi \sigma B \int_a^b r^2 (E - \omega r B) dr,$$

kde  $a$  a  $b$  jsou vzdálenosti od středu ukázané na obr. Je nutné najít  $E$  jako funkci  $r$ . Pokud teče proud radiálně, platí

$$I = 2\pi r t J = 2\pi r t \sigma (E - \omega r B); \quad E - \omega r B = I / (2\pi r t \sigma).$$

Takže

$$M = BI \int_a^b r dr = \frac{BI(b^2 - a^2)}{2}.$$

Toto je moment, který působí na pohybující se náboje. Je to však také moment, který působí na kotouč, protože náboje se nepřetržitě srážejí s atomy krystalové mřížky. Poznamenejme, že magnetická síla vykonává užitečnou práci, protože má azimutální složku. Skutečnost, že neovlivňuje kinetickou energii přenášených nábojů nehraje žádnou roli. Hustota náboje je (divergenci počítáme ve válcových souřadnicích)

$$\rho = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE) = 2\epsilon \omega B.$$

Hustota náboje je rovnoměrná. Napětí přiložené na hřídel o poloměru  $a$  a okraj kotouče v  $b$  je

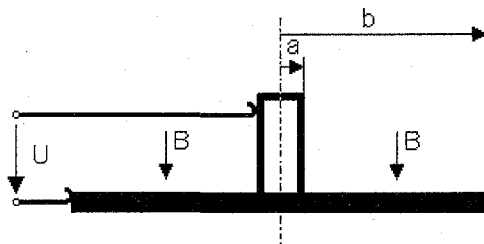
$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \left( \omega r B + \frac{I}{2\pi r \sigma} \right) dr = \omega B \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{I}{2\pi \sigma} \ln \frac{b}{a} = \omega \frac{M}{I} + IR,$$

neboť první výraz lze vyjádřit pomocí momentu  $M$  a výraz u  $I$  je odpor kotouče mezi poloměry  $a$  a  $b$ . Pro výkon zřejmě platí

$$P = UI = \omega M + I^2 R.$$

Tato rovnice jednoduše vyjadřuje, že dodávaný výkon se rovná mechanickému výkonu  $\omega M$  a tepelným ztrátám v kotouči  $I^2 R$  (ostatní ztráty jsou zanedbány). Dále ukazuje, že pro dané  $U$  je proud  $I$  maximální, když  $\omega = 0$ . Ze vztahu pro  $M$  plyne, že  $M$  je maximální, když  $I$  je maximální a proto pro  $\omega = 0$ . Pak je ovšem nulový mechanický výkon  $\omega M$ . Naopak jak  $I$ , tak  $M$  jsou nulové, když

$$\omega = \omega_{\max} = \frac{2U}{B(b^2 - a^2)}.$$



#### 4. Elektromagnetizmus

Toto je maximální úhlová rychlost. Mechanický výkon je pak také nulový. Za touto rychlostí pracuje zařízení jako generátor (viz další příklad) a dodává do zdroje proud.

Mechanický výkon je maximální pro

$$\frac{d}{dt}(\omega M) = \frac{d}{dt}(UI - I^2 R) = 0; \quad U = 2RI; \quad P = UI = 2I^2 R.$$

Pak se mechanický výkon  $\omega M$  rovná tepelným ztrátám  $I^2 R$  (tzn. účinnost je 50%) a

$$\omega_{P_{\max}} = \frac{UI}{2M} = \frac{UI}{BI(b^2 - a^2)} = \frac{U}{B(b^2 - a^2)} = \frac{\omega_{\max}}{2}.$$

Tzn. že otáčky pro maximální výkon  $\omega_{P_{\max}}$  se rovnají polovině maximálních otáček.

#### Příklad 4.16

B

Určete elektromotorické napětí, které vzniká v unipolárním generátoru (vodivém kotouči, který se otáčí v konstantním magnetickém poli  $B$  úhlovou rychlostí  $\omega$ ). Jaké bude napětí pro  $n = 3000$  otáček za minutu, snímací kontakty umístěné ve vzdálenosti  $a = 3$  mm,  $b = 60$  mm a  $B = 0,5$  T.

**Řešení:** Síla  $Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  působící na náboje způsobí, že se tyto náboje oddělí a objeví se elektrické pole (jako by existovalo pole  $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ). Pokud bychom připojili ideální voltmetr pomocí snímacích kontaktů ve vzdálenostech  $a$  a  $b$  od středu, měřili bychom stejnou hodnotu napětí jako elektromotorické napětí v uzavřeném obvodu. Protože se vodiče nepohybují, přispívá k tomuto napětí pouze kotouč, takže se integrace přes uzavřenou dráhu redukuje na integraci mezi  $a$  a  $b$ , což dá

$$\int_a^b \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \omega B \int_a^b r dr = \omega B \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

V tomto příkladě je obtížné využívat představu protínání magnetického toku. Bylo by možné si představit, že se pohybuje propojení mezi okrajem a středem a pak by protínání magnetického toku mělo smysl. Ovšem je zřejmé, že Faradayova představa není vždy snadno použitelná a je rozumnější využít Maxwellovy rovnice, které jsou vždy použitelné.

Pro dané číselné hodnoty dostaneme

$$U = \omega B \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{2\pi n}{60} B \frac{b^2 - a^2}{2} = 0,282 \text{ V}.$$

**Poznámka:** Pro výpočet lze také využít výsledky z předchozího příkladu. Magnetický moment má opačný směr proti předešlému případu a je dán stejným vztahem. Zákon zachování energie ovšem vyžaduje, aby

$$\omega M = UI + I^2 R = I^2 (R_L + R),$$

kde  $\omega M$  je mechanický výkon dodávaný do generátoru,  $UI$  je elektrický výkon dodávaný do zátěže  $R_L$  a  $I^2 R$  jsou tepelné ztráty (další ztráty jsou zanedbané). Pokud není připojena vnější zátěž je indukované napětí dáno stejným vztahem a pro proud platí po dosazení za  $M$

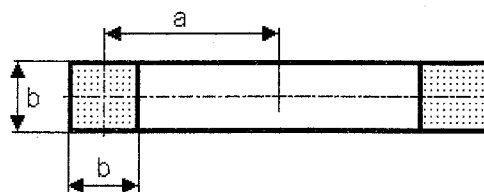
$$I = \frac{\omega B I (b^2 - a^2)}{2(R_L + R)}.$$

#### Příklad 4.17

B

Určete vlastní indukčnost prstencové cívky podle

obrázku. Cívkou protéká proud  $I$  a má  $N$  závitů.



**Řešení:** Magnetické pole cívky bez jádra získáme pomocí vztahu

#### 4. Elektromagnetismus

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi a B = \mu_0 I N.$$

Celkový magnetický tok je tedy

$$\Phi_0 = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_{a-b/2}^{a+b/2} \frac{b}{r} dr = \frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \ln \frac{2a+b}{2a-b}.$$

Jestliže relativní permeabilita jádra je  $\mu_r$ , pak vlastní indukčnost bude  $\Phi = \Phi_0 \mu_r$ .

#### Příklad 4.18

B

Určete celkový výkon vytékající z plochy  $S$ , která uzavírá malý permanentní magnet nabitý elektrickým nábojem  $Q$ .

Nápověda: Určete  $\iint_S (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b) \cdot d\mathbf{S}$ , jestliže pole  $a$  je čistě elektrické a pole  $b$  čistě magnetické.

**Řešení:** Upravíme výraz

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b) = \mathbf{H}_b \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_a - \mathbf{E}_a \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_b = -\mathbf{H}_b \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} - \mathbf{E}_a \cdot \left( \mathbf{J}_b + \frac{\partial \mathbf{D}_b}{\partial t} \right).$$

Protože  $\mathbf{E}_b$  a  $\mathbf{H}_a$  jsou obě nulové,  $\mathbf{J}_b = \sigma \mathbf{E}_b = 0$  a  $\mathbf{D}_b = \epsilon \mathbf{E}_b = 0$ , takže  $\operatorname{div}(\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b) = 0$ . Proto platí podle Gaussovy věty o divergenci  $\iint_S (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_b) \cdot d\mathbf{S} = 0$ . Tento integrál dává celkový výkon vytékající z této plochy.

Protože malý permanentní magnet nabitý elektrickým nábojem  $Q$  se skládá ze dvou polí, kde pole náboje  $Q$  je čistě elektrické a pole permanentního magnetu je čistě magnetické, bude plošný integrál Poyntingova vektoru po ploše  $S$ , uzavírající magnet a náboj  $Q$  a tedy i celkový výkon nulový.

#### Příklad 4.19

C

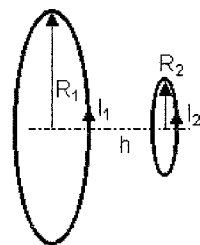
Určete vzájemnou indukčnost dvou souosých, stejně orientovaných smyček o poloměrech  $R_1 > R_2$ , jejichž roviny leží ve vzdálenosti  $h$ .

**Řešení:** Magnetická indukce vybuzená větší smyčkou se určí pomocí Biot-Savartova zákona integrací na ose smyčky ve středu druhé smyčky

$$B = \frac{\mu_0 R_1^2 I_1}{2(R_1^2 + h^2)^{3/2}}$$

a může být v průřezu této (menší) smyčky považována za konstantní, tzn.  $\Phi = BS = B\pi R_2^2$  a tedy

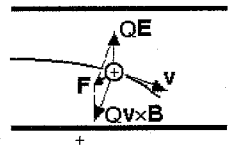
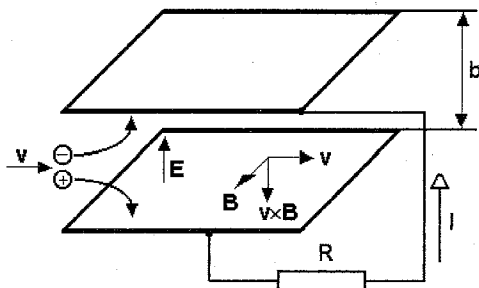
$$M_{12} = \frac{\Phi}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + h^2)^{3/2}}.$$



#### Příklad 4.20

A

Vyšetřete magnetohydrodynamický (MHD) generátor, který přeměňuje kinetickou energii horkého plynu přímo na elektrickou energii. Horký plyn vstupuje zleva rychlostí  $v$  řádově 1 000 m/s. Obsahuje sůl (např.  $K_2CO_3$ ), která se ionizuje při vysoké teplotě na kladné ionty a elektrony. Magnetické pole  $\mathbf{B}$  je vytvořeno supravodivými cívkami umístěnými vně komory (nezobrazeno). Pohybující se částice se pohybují podle polaritů buď nahoru nebo dolů. Vstupní teplota  $T_i$  je zhruba 3 000 K a měrná vodivost  $\sigma$  je asi 100 S/m (měrná vodivost mědi je  $5,8 \cdot 10^7$  S/m).



#### 4. Elektromagnetismus

**Řešení:** Kladné ionty se odchylují dolů a elektrony nahoru. Výsledný proud  $I$  teče zatěžovacím odporem  $R$ , což vytvoří elektrické pole  $E$  jak je ukázáno na obr. Zřejmá výhoda MHD generátoru je, že neobsahuje žádné pohyblivé části s výjimkou plynu. Další výhoda spočívá v tom, že pracuje s tak vysokou vstupní teplotou, takže celková termodynamická účinnost  $\eta = (T_i - T_o) / T_i$  přesahuje 50%, jestliže plyn protéká generátorem s výstupní teplotou plynu  $T_o$ . Termodynamická účinnost obvyklých tepelných zařízení je mezi 30% až 33%. Největší MHD generátory mají výkon stovky MW.

Část kinetické energie spojené s pohybem plynu se přemění na elektrickou energii. Magnetická síla, která působí na nabitě částice je kolmá na vektor rychlosti  $v$  a nemá vliv na kinetickou energii. Funkce magnetických sil je, aby se kladné částice pohybovaly ke kladné elektrodě a záporné k záporné elektrodě. Takže jak kladné, tak i záporné částice se pohybují pod vlivem sil ukázaných na obr. a zpomalují se. Protože tlak plynu je vyšší než atmosférický, jsou střední volné dráhy mezi srážkami infinitesimální a nabitě částice se vnoří do plynu. Proto zpomalení částic zpomalí i plyn a klesá kinetická energie. Ideálně by nabitě částice dopadaly na elektrody s nulovou rychlostí, ale ve skutečnosti mají konečnou rychlost a proto se elektrody zahřívají a pouze část kinetické energie částic se mění na elektrickou energii. A ještě menší část kinetické energie plynu slouží ke generování elektrické energie. Také určitá část kinetické energie spojená s příčným pohybem nabitých částic pouze zvyšuje náhodný tepelný pohyb (energii) plynu.

Předpokládejme, že  $E$ ,  $B$  a rychlost částic  $v$  jsou homogenní a vzájemně kolmé uvnitř generátoru, jak je ukázáno na obr. To je samozřejmě pouze velmi hrubý předpoklad.

Lorentzova síla  $Q(E+v \times B)$  působí na náboj  $Q$ , jako kdyby elektrické pole bylo  $E+v \times B$ . Takže pro vodivost plynu  $\sigma$

$$|J| = |\sigma(E+v \times B)| = \sigma(vB - E) = \sigma(vB - V/b), \quad I = JS = S\sigma(vB - IR/b),$$

kde  $I$  a  $R$  jsou proud a odpor podle obr. a  $S$  je ploch jedné z elektrod. Proto

$$I = \frac{vBb}{b/(\sigma S) + R}.$$

Povšimněme si, že  $vBb$  je napětí naprázdno a  $b/(\sigma S)$  je odpor plynu v příčném směru. Mohli bychom proto získat tento výsledek přímo z Théveninova teoremu. Výstupní napětí je  $IR$ . Proto

$$U = IR = vBb - Ib/(\sigma S).$$

Napětí  $U$  klesá lineárně s  $I$ .

Nyní nejsme schopni počítat účinnost se kterou se velká kinetická energie plynu mění na elektrickou energii. Ovšem můžeme porovnat Jouleovy ztráty v zatěžovacím odporu  $R$  se ztrátami plynu. Takže budeme definovat účinnost jako  $\eta = \text{Jouleovy ztráty v } R / (\text{Jouleovy ztráty v } R + \text{Jouleovy ztráty v plynu})$  a tedy

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2 R + I^2 b/(\sigma S)} = \frac{R}{R + b/(\sigma S)},$$

jak lze očekávat z Théveninova teoremu. Takže dostaneme pomocí vztahů pro  $I$  a  $IR$

$$\eta = R \frac{I}{vBb} = 1 - \frac{I}{\sigma S v B}.$$

Účinnost se tedy rovná jednotce, když  $I = 0$ , nebo když  $R \rightarrow \infty$ . Rovná se nule, když  $I = S\sigma v B$ , nebo když  $R = 0$ ,  $V = 0$ .

## 5. ČASOVĚ PROMĚNNÉ PROUDY

### Příklad 5.1

D

Vyjádřete v různých tvarech komplexní číslo  $z = x + jy$  a výrazy  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 z_2$ ,  $z_1 / z_2$ ,  $z^a$ .

**Řešení:** Komplexní číslo lze vyjádřit v různých tvarech

$$z = x + jy = r (\cos \theta + j \sin \theta) = r \exp(j\theta),$$

kde  $r = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\cos \theta = x/r$  a  $\sin \theta = y/r$ .

Při sčítání (odčítání) komplexních čísel sčítáme (odčítáme) reálné a imaginární části

$$z_1 + z_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + jy_1 - (x_2 + jy_2) = x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2),$$

Pro násobení dvou komplexních čísel platí

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \\ &= r_1 \exp(j\theta_1) r_2 \exp(j\theta_2) = r_1 r_2 \exp[j(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Obvykle se pro výpočet součinů používá poslední vztah.

Při dělení násobíme převrácenou hodnotou  $1/z_2 = (1/r_2) \exp(-j\theta_2)$ , tzn.

$$\begin{aligned} z_1 / z_2 &= (x_1 + jy_1) / (x_2 + jy_2) = (x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2) / (x_2^2 - y_2^2) = \\ &= r_1 \exp(j\theta_1) / [r_2 \exp(j\theta_2)] = (r_1/r_2) \exp[j(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Pro umocňování platí, že se obecně jedná o mnohoznačnou funkci

$$z^a = r^a \exp[ja(\theta + 2k\pi)], \text{ kde } k \text{ je celé číslo.}$$

### Příklad 5.2

D

Vyjádřete  $(4+j5) + (2-3j)$ ;  $(4+j5)^2$ ;  $1/(4+j5)$ ;  $[5 \exp(j\pi/3)] [2 \exp(j\pi/2)]$ ;  $[5 \exp(j\pi/3)] / [2 \exp(j\pi/2)]$ .

**Řešení:**  $(4+j5) + (2-3j) = 6 + 2j$ ;

$$(4+j5)^2 = (16-25) + (20+20)j = -9 + 40j;$$

$$1/(4+j5) = (4-5j) / [(4+j5)(4-5j)] = (4-5j) / (16+25) = 0,098 - 0,122j;$$

$$[5 \exp(j\pi/3)] [2 \exp(j\pi/2)] = 10 \exp(j5\pi/6);$$

$$[5 \exp(j\pi/3)] / [2 \exp(j\pi/2)] = 2,5 \exp(-j\pi/6).$$

### Příklad 5.3

D

Vyjádřete  $1+2j$ ;  $-1+2j$ ;  $-1-2j$  a  $1-2j$  v polárním tvaru.

**Řešení:**  $1+2j = \sqrt{5} \exp(1,107j)$ ;

$$-1+2j = \sqrt{5} \exp(2,034j);$$

$$-1-2j = \sqrt{5} \exp(-2,034j);$$

$$1-2j = \sqrt{5} \exp(-1,107j)$$

### Příklad 5.4

C

Určete  $\ln(a + jb)$ .

**Řešení:** Platí

$$\ln(a + jb) = \ln[r \exp(j\varphi)] = \ln\{(a^2 + b^2)^{1/2} \exp[j \arctg(b/a)]\} = \ln(a^2 + b^2)/2 + j \arctg(b/a).$$

*Poznámka:* Úhel  $\varphi = \arctg(b/a)$  nelze uvažovat pouze v 1. a 4. kvadrantu, ale pokud je  $\operatorname{Re}[a+jb] = a$  záporné, je nutné zvýšit pozornost (přičíst  $\pi$  nebo ve stupních  $180^\circ$ ).

**Příklad 5.5**

**D**

Co se stane s komplexním číslem v komplexní rovině, když se a) násobí  $j$ , b) násobí  $j^2$ , c) dělí  $j^2$ , d) dělí  $j$ ?

**Řešení:** Podle Moirovy věty představuje násobení otáčení komplexního čísla v komplexní rovině. Protože  $j^n = \exp(j n\pi/2)$  bude násobení  $j^n$  představovat otáčení o úhel  $n\pi/2$ . To znamená, že násobení  $j^3$  je totéž jako dělení  $j$  atd. Proto bude otáčení a)  $\pi/2$ , b)  $\pi$ , c)  $-\pi$  (tzn. stejné jako otočení o  $\pi$ ), d)  $-\pi/2$ . Násobení (dělení)  $j^4 = \exp(2\pi j)$  nezmění původní komplexní číslo.

**Příklad 5.6**

**D**

Určete impedanci (amplitudu a fázi) pro sériové zapojení  $R=1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$  a  $C = 2 \text{ nF}$  pro  $f = 50 \text{ Hz}$ .

**Řešení:** Pro sériové zapojení platí

$$Z = R + j\omega L - j/(\omega C) = 1 - 1,59 \cdot 10^6 j = 1,59 \cdot 10^6 \exp(-j\pi/2).$$

Tzn. amplituda impedance je  $1,59 \cdot 10^6 \Omega$  a fáze  $-\pi/2$  ( $-90^\circ$ ).

**Příklad 5.7**

**D**

Určete impedanci (amplitudu a fázi) pro paralelní zapojení  $R=1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$  a  $C = 2 \text{ nF}$  pro  $f = 50 \text{ Hz}$ .

**Řešení:** Pro paralelní zapojení platí

$$Y = 1/R + j\omega C - j/(\omega L) = 1 - 3,18 j = 3,34 \exp(-1,266j),$$

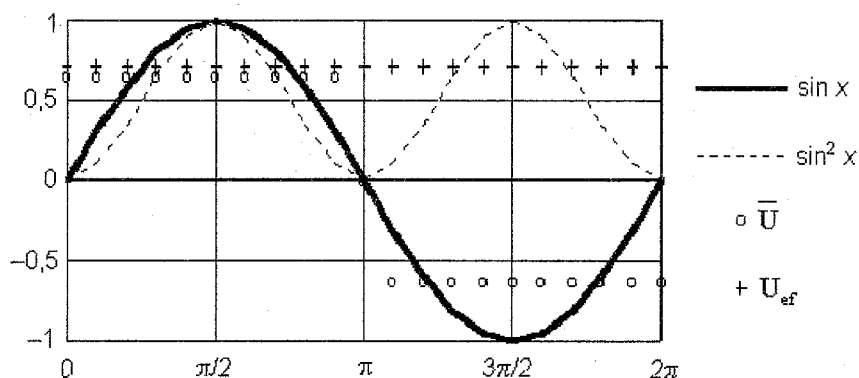
$$Z = 1/Y = (1/3,34) \exp(1,266j) = 0,3 \exp(1,266j).$$

Tzn. amplituda impedance je  $0,3 \Omega$  a fáze  $1,266$  ( $72,5^\circ$ ).

**Příklad 5.8**

**C**

Uvažujte sinusové napětí  $U = U_0 \sin(\omega t)$ . Vypočítejte a zobrazte střední a efektivní hodnotu napětí. Pro efektivní napětí sítě  $U_{ef} = 230 \text{ V}$  určete maximální napětí, střední hodnotu pro polovinu periody a napětí „špička-špička“  $U_{pp}$ .



**Řešení:** Střední hodnota je

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt = \frac{U_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t) dt = \frac{U_0}{\omega T} [1 - \cos(\omega T)]$$

Pokud je  $T$  perioda tohoto průběhu ( $T=T_0$ ), pak dostáváme  $\bar{U} = 0$ . Často uvažujeme polovinu periody ( $T=T_0/2$ ) a pak  $\bar{U} = 2U_0/\pi$ .

Efektivní hodnota je

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt} = U_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt} = U_0 \sqrt{\frac{1}{2T} \left[ T - \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega} \right]}.$$

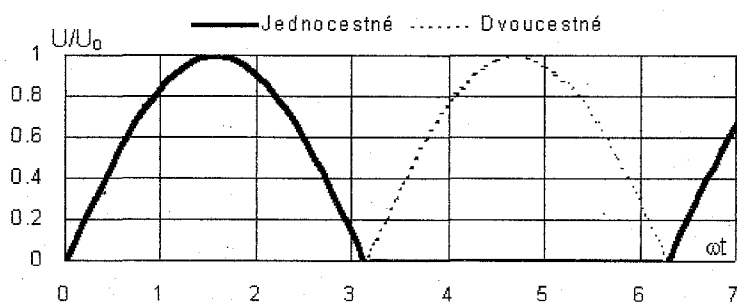
Pokud je  $T$  perioda tohoto průběhu ( $T=T_0$ ), pak dostáváme  $U_{ef} = U_0/\sqrt{2}$ . Na obr. jsou zobrazené hodnoty  $\sin x$ ,  $\sin^2 x$ ,  $\bar{U}$  a  $U_{ef}$ .

## 5. Časově proměnné proudy

Pro efektivní hodnotu napětí  $U_{ef} = 230 \text{ V}$  bude maximální hodnota  $U_0 = U_{ef} \sqrt{2} = 325 \text{ V}$ , střední hodnota pro polovinu periody  $\bar{U} = 2U_0 / \pi = 207 \text{ V}$  a napětí „špička-špička“  $U_{pp} = 2U_0 = 651 \text{ V}$ .

### Příklad 5.9

Vypočítejte střední a efektivní hodnotu napětí pro jednocestné a dvoucestné usměrnění. Pro jednocestné usměrnění předpokládejte  $U = U_0 \sin(\omega t)$  pro  $2k\pi < \omega t < (2k+1)\pi$  a  $U = 0$  pro  $(2k+1)\pi < \omega t < 2k\pi$  a pro dvoucestné  $U = |U_0 \sin(\omega t)|$  pro periodu  $T_0$ , kde  $\omega = 2\pi/T_0$ .



**Řešení:** a) Pro jednocestné usměrnění prochází proud pouze po dobu půl periody  $T_0$  a protože napětí na odporu je přímo úměrné proudu je střední hodnota pro periodu  $T_0$

$$\bar{U} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U(t) dt = \frac{U_0}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin(\omega t) dt = \frac{U_0}{\omega T_0} [1 - \cos(\omega T_0 / 2)] = \frac{U_0}{\pi}.$$

Efektivní hodnota pro periodu  $T_0$  je

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} U_0^2 \sin^2(\omega t) dt} = U_0 \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt},$$

$$U_{ef} = U_0 \sqrt{\frac{1}{4T_0} \left[ T_0 - \frac{\sin(2\omega T_0)}{\omega} \right]} = \frac{U_0}{2}.$$

b) Pro dvoucestné usměrnění prochází proud s kladnými hodnotami pro obě cesty a proto napětí na odporu by bylo  $U = |U_0 \sin(\omega t)|$ . Střední hodnota pro periodu  $T_0$  je

$$\bar{U} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U(t) dt = \frac{2U_0}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin(\omega t) dt = \frac{2U_0}{\omega T_0} [1 - \cos(\omega T_0 / 2)] = \frac{2U_0}{\pi}.$$

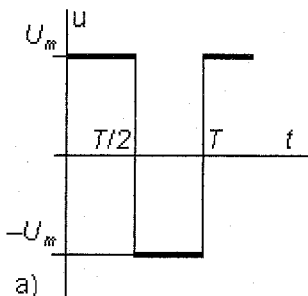
Efektivní hodnota pro periodu  $T_0$  je

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} U_0^2 \sin^2(\omega t) dt} = U_0 \sqrt{\frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

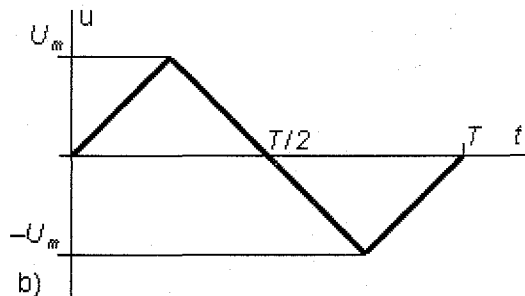
### Příklad 5.10

Určete střední hodnotu (za půl periody) a efektivní hodnotu napětí pro periodu  $T$  a maximální napětí  $U_m$  pro obdélníkový a trojúhelníkový průběh.

**Řešení:** Pro obdélníkový průběh podle obr. a stačí (z důvodů symetrie) uvažovat



a)



b)

půl periody a pro střední a efektivní hodnotu platí

$$\bar{U} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m dt = U_m,$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m^2 dt} = U_m.$$

## 5. Časově proměnné proudy

Pro trojúhelníkový průběh podle obr. b stačí (z důvodů symetrie) uvažovat čtvrt periody a pro střední a efektivní hodnotu tedy platí

$$\bar{U} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} U_m \frac{4t}{T} dt = \frac{1}{2} U_m,$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{T/4} \left( \frac{4U_m}{T} t \right)^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}.$$

### Příklad 5.11

D

Dva sinusové střídavé proudy se stejnou frekvencí  $\omega$  jsou dány svými okamžitými hodnotami

$$I_1 = 10 \sin(\omega t + \pi/4) \text{ A a } I_2 = 15 \sin(\omega t + 5\pi/12) \text{ A}.$$

Vyjádřete oba proudy pomocí fázorů, sečtěte je a stanovte okamžitou hodnotu výsledného proudu.

**Řešení:** Pomocí fázorů dostaneme

$$\mathbf{I}_1 = (10/\sqrt{2}) \exp(j\pi/4) = (10/\sqrt{2}) (\cos \pi/4 + j \sin \pi/4) = 5 + 5j \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_2 = (15/\sqrt{2}) \exp(j5\pi/12) = (15/\sqrt{2}) (\cos 5\pi/12 + j \sin 5\pi/12) = 2,75 + 10,25j \text{ A}.$$

Součtový proud je  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 7,75 + 15,25j \text{ A}$ .

$$\mathbf{I} = I \exp(j\varphi) = (7,75^2 + 15,25^2)^{1/2} \exp[j \arctg(15,25/7,75)] = 17,1 \exp(j1,1).$$

Při výpočtu úhlů je nutné uvážit příslušný kvadrant. Pokud bude reálná část záporná, bude nutné přičíst  $\pi$ .

*Poznámka:* V elektrotechnice se úhly fázového posunu udávají často ve stupních a to i tam, kde by měl být úhel správně v radiánech, takže bychom správně neměli psát  $\sin(\omega t + 45^\circ)$ , neboť  $\omega t$  je v radiánech. Tento zápis však nijak nevádí, pokud sledujeme jen vzájemné fázové posuny jednotlivých sinusově proměnných veličin. Pokud ovšem chceme vypočítat okamžitou hodnotu, nemůžeme psát  $10 \sin(\omega t + 45^\circ)$  pro určitý okamžik  $t$ , ale musíme důsledně používat buď stupně nebo radiány.

### Příklad 5.12

D

Střídavý proud a napětí spotřebiče mají okamžité hodnoty  $I = 6 \sin(\omega t + \pi/6) \text{ A}$  a  $U = 170 \sin(\omega t) \text{ V}$ . Udejte průběh okamžitých hodnot výkonu, maximální hodnotu okamžitého výkonu a okamžiky, kdy toto maximum nastává.

**Řešení:** Okamžitá hodnota výkonu je

$$\begin{aligned} P &= UI = 170 \sin(\omega t) \cdot 6 \sin(\omega t + \pi/6) = 1020 [\cos(\pi/6) - \cos(2\omega t + \pi/6)]/2 = \\ &= 442 - 510 \cos(2\omega t + \pi/6) \quad [\text{W}]. \end{aligned}$$

Maximum okamžitého výkonu zřejmě nastává v okamžiku  $t_m$ , kdy platí  $\cos(2\omega t_m + \pi/6) = -1$  a maximální hodnota je  $P_m = 442 + 510 = 952 \text{ W}$ . Pro  $t_m$  platí

$$2\omega t_m + \pi/6 = (2k-1)\pi$$

$$t_m = (2k-1)/(4f) - 1/(24f) = (12k-7)/(24f).$$

### Příklad 5.13

D

Vypočtete činný, jalový a zdánlivý výkon pro zdroj s napětím  $U = 150 \text{ V}$ , odebírá-li se proud  $\mathbf{I} = 7,07 + 7,07j \text{ A}$ .

**Řešení:** Činný, jalový a zdánlivý výkon jsou ( $\mathbf{I}^*$  je komplexně sdružené číslo)

$$P = \text{Re}[\mathbf{UI}^*] = 150 \cdot 7,07 = 1060 \text{ W},$$

$$Q = \text{Im}[\mathbf{UI}^*] = 150 \cdot (-7,07) = -1060 \text{ VAR},$$

$$S = |\mathbf{UI}^*| = 1500 \text{ VA}.$$

*Poznámka:* Proud můžeme vyjádřit též ve tvaru  $10 \exp(j\pi/4)$  a proto (volíme vhodnou variantu)

## 5. Časově proměnné proudy

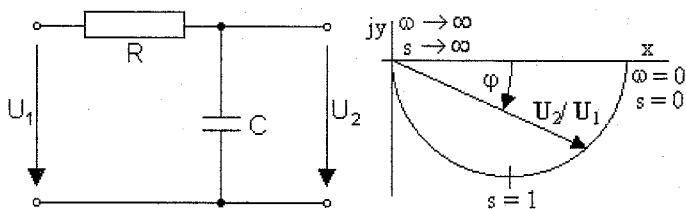
$$P = \operatorname{Re} [\mathbf{UI}^*] = 150 \cdot 10 \cos(-\pi/4) = 1\,060 \text{ W},$$

$$Q = \operatorname{Im} [\mathbf{UI}^*] = 150 \cdot 10 \sin(-\pi/4) = -1\,060 \text{ VAr},$$

$$S = |\mathbf{UI}^*| = 150 \cdot 10 [\cos(-\pi/4)^2 + \sin(-\pi/4)^2] = 1\,500 \text{ VA}.$$

### Příklad 5.14

Pro dělič  $RC$  podle obrázku určete poměr  $U_2/U_1$  a určete pro jakou frekvenci má napětí  $U_2$  fázový posun  $45^\circ$  proti napětí  $U_1$ . Určete  $|U_2/U_1|$  pro tuto frekvenci. Určete křivku, po které se pohybuje koncový bod fázoru  $U_2/U_1$ . Nakreslete amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku. Frekvenci vyjádřete poměrnou frekvencí  $s = \omega RC$  v logaritmickém měřítku.



**Řešení:** Platí

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C} I}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \exp(j\varphi) = \frac{1 - js}{1 + s^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} \exp(j\varphi),$$

kde  $\varphi = -\arctg(\omega RC) = -\arctg s$ , neboť  $1 + j\omega RC$  je ve jmenovateli. Má-li být fázový posun  $45^\circ$ , musí být  $\omega RC = s = 1$ . Potom bude  $\varphi = -45^\circ$ , tzn. napětí  $U_2$  bude zpožděné proti  $U_1$  o  $45^\circ$ . Hledaná frekvence je  $\omega = 1/(RC)$ .

Poměr  $|U_2/U_1|$  pro tuto frekvenci je

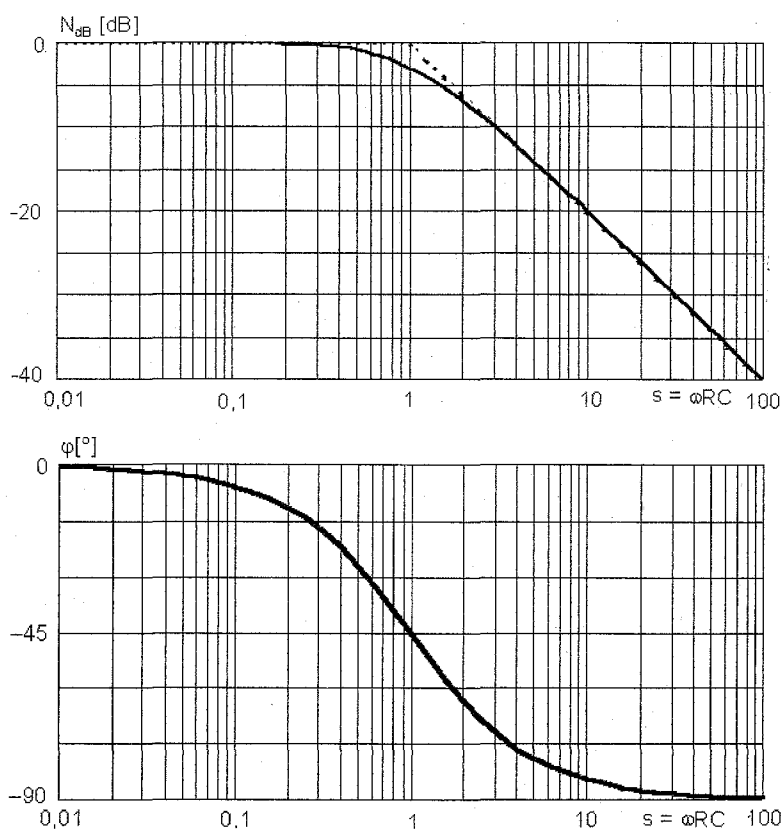
$$U_2/U_1 = |1/(1+j)| = 1/\sqrt{2}.$$

Je zřejmé, že při proměnném parametru  $\omega$  se bude koncový bod fázoru  $U_2/U_1$  pohybovat po kružnici, kdy  $\omega = s = 0$  bude odpovídat bodu  $(1,0)$  a  $\omega \rightarrow \infty$  ( $s \rightarrow \infty$ ) počátku souřadnic. Hodnota  $s=1$  odpovídá bodu  $(0,5;-0,5)$ .

Amplitudová charakteristika se většinou udává v decibelech, tzn.

$$\begin{aligned} N_{dB} &= 20 \log \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \\ &= 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ &= 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} \text{ [dB]}. \end{aligned}$$

Pro velmi nízké frekvence, kdy  $s \ll 1$  je  $U_2/U_1 \approx 1$  a tedy platí  $N_{dB} \approx 0$ . Pro vysoké frekvence, kdy  $s \gg 1$ , je  $U_2/U_1 \approx 1/s$  a proto platí  $N_{dB} = -20 \log s$ . V logaritmických souřadnicích tomu odpovídá přímka se sklonem  $-20 \text{ dB}$  na dekádu (desetinásobné zvětšení frekvence). Pro frekvenci  $s = 1$  bude rozdíl mezi těmito přibližnými hodnotami a přesnou hodnotou  $20 \log U_2/U_1 = 20 \log (1/\sqrt{2}) \approx -3 \text{ dB}$ .



## 5. Časově proměnné proudy

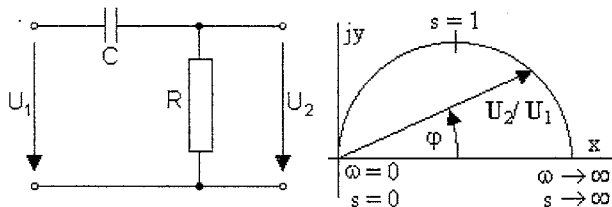
Fázová charakteristika je dána vztahem

$$\varphi = -\arctg(\omega RC) = -\arctg s.$$

Amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky se dříve kreslily pomocí speciálních grafických papírů (nyní ovšem používáme počítač – např. tabulkový procesor).

### Příklad 5.15

Pro dělič  $RC$  podle obrázku určete poměr  $U_2/U_1$  a určete pro jakou frekvenci má napětí  $U_2$  fázový posun  $45^\circ$  proti napětí  $U_1$ . Určete  $|U_2/U_1|$  pro tuto frekvenci. Určete křivku, po které se pohybuje koncový bod fázoru  $U_2/U_1$ . Nakreslete amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku. Frekvenci vyjádřete poměrnou frekvencí  $s = \omega RC$  v logaritmickém měřítku.



**Řešení:** Platí

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{RI}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \exp(j\varphi),$$

kde  $\varphi = \pi/2 - \arctg(\omega RC)$ , neboť  $1 + j\omega RC$  je ve jmenovateli. Má-li být fázový posun  $45^\circ$ , musí být  $\omega RC = s = 1$ . Potom bude  $\varphi = 45^\circ$ , tzn. napětí  $U_2$  bude předbíhat  $U_1$  o  $45^\circ$ . Hledaná frekvence je  $\omega = 1/(RC)$ .

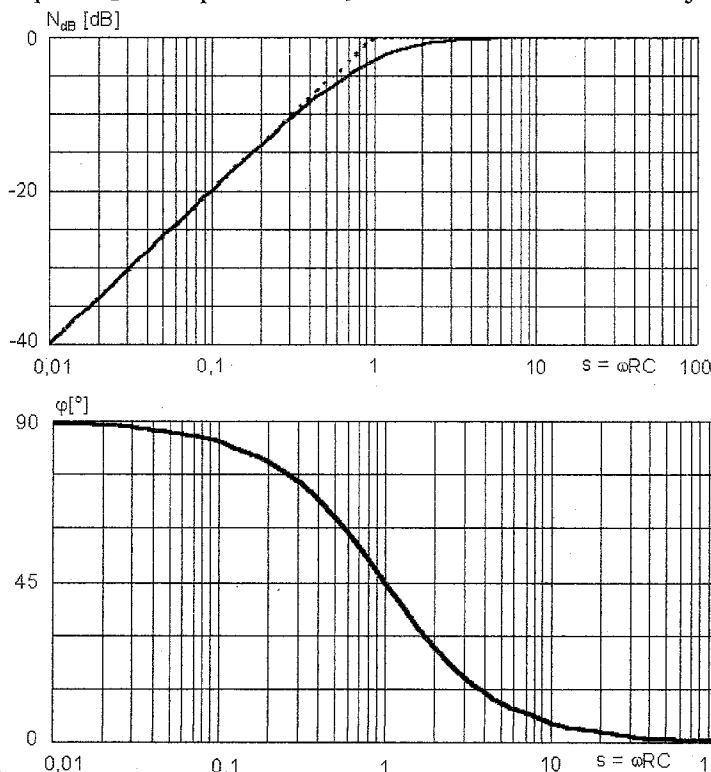
Poměr  $|U_2/U_1|$  pro tuto frekvenci je

$$U_2/U_1 = |1/(1+j)| = 1/\sqrt{2}.$$

Je zřejmé, že při proměnném parametru  $\omega$  se bude koncový bod fázoru  $U_2/U_1$  pohybovat po kružnici, kdy  $\omega = s = 0$  bude odpovídat počátku souřadnic a  $\omega \rightarrow \infty$  ( $s \rightarrow \infty$ ) bodu  $(1,0)$ . Hodnota  $s=1$  odpovídá bodu  $(0,5;0,5)$ .

Amplitudová charakteristika se většinou udává v decibelech, tzn.

$$\begin{aligned} N_{dB} &= 20 \log \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \\ &= 20 \log \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = [\text{dB}]. \\ &= 20 \log \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} [\text{dB}]. \end{aligned}$$



Pro velmi nízké frekvence, kdy  $s \ll 1$  je  $U_2/U_1 \approx s$  a proto platí  $N_{dB} = 20 \log s$ . V logaritmických souřadnicích tomu odpovídá přímka se sklonem 20 dB na dekádu (desetinásobné zvětšení frekvence). Pro vysoké frekvence, kdy  $s \gg 1$ , je  $U_2/U_1 \approx 1$  a proto platí  $N_{dB} = 0$ . Pro frekvenci  $s = 1$  bude rozdíl mezi těmito přibližnými hodnotami a přesnou hodnotou

$$20 \log U_2/U_1 = 20 \log (1/\sqrt{2}) \approx -3 \text{ dB}.$$

Fázová charakteristika je dána vztahem

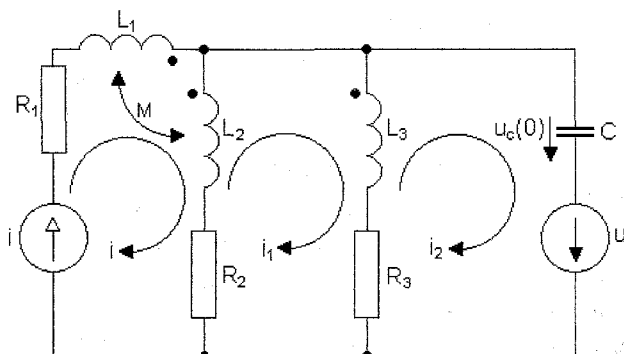
$$\varphi = \pi/2 - \arctg(\omega RC) = \pi/2 - \arctg s.$$

Amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky sestojíme např. pomocí tabulkového procesoru.

**Příklad 5.16**

Napište rovnice pro smyčkové proudy  $I_1$  a  $I_2$  na obrázku pro obecné průběhy proudů a napětí včetně počátečních podmínek.

**Řešení:** Pro smyčkové proudy musíme uvažovat dvě smyčky (smyčkový proud  $i$  je dán přímo proudovým zdrojem  $i$  a proto tuto smyčku nemusíme uvažovat)



$$L_3 \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + R_3(i_1 - i_2) +$$

$$+ R_2(i_1 - i) + L_2 \frac{d}{dt}(i_1 - i) + M \frac{di}{dt} = 0$$

$$R_3(i_2 - i_1) + L_3 \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt + u_C(0) = -u$$

**Příklad 5.17**

Napište rovnice pro proudy  $I_1$  a  $I_2$  podle předešlého příkladu na obrázku pro ustálené sinusové proudy. Je zadáno  $f=159,15$  Hz,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$ ,  $L_1 = 0,5$  H,  $L_2 = 1,00$  H,  $L_3 = 3,00$  H,  $M = 0,3$  H,  $\text{Re } U = 20$  V,  $\text{Im } U = 10$  V,  $\text{Re } I = 5$  A,  $\text{Im } I = 10$  A a  $C = 1 \mu\text{F}$ .

**Řešení:** Pro smyčkové proudy platí

$$\begin{aligned} [R_2 + R_3 + j\omega(L_2 + L_3)]I_1 - [R_3 + j\omega L_3]I_2 &= [R_2 + j\omega(L_2 - M)]I, \\ -[R_3 + j\omega L_3]I_1 + [R_3 + j(\omega L_3 - 1/\omega C)]I_2 &= -U. \end{aligned}$$

Pro řešení pomocí tabulkového procesoru lze tyto rovnice psát v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} R & -X \\ X & R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{Re} \\ I_{Im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{Re} \\ U_{Im} \end{pmatrix}.$$

V první tabulce jsou zadané matice  $R$ ,  $X$ ,  $U_{Re}$  a  $U_{Im}$ . Výpočty jednotlivých buněk provádí tabulkový procesor - např. v buňce A1 je  $=R_2+R_3$ , tzn. 8 v buňce A3 je  $=2*\pi*(L_2+L_3)$ , tzn. 4 000. S výhodou můžeme využít toho, že hodnoty jednotlivých proměnných uložíme a pak při výpočtu se odkazujeme pouze na tyto buňky, takže můžeme snadno měnit zadané proměnné.

|            |            |            |            |           |
|------------|------------|------------|------------|-----------|
| 8.000E+00  | -3.000E+00 | -4.000E+03 | 3.000E+03  | -6974.783 |
| -3.000E+00 | 3.000E+00  | 3.000E+03  | -2.000E+03 | -20.000   |
| 4.000E+03  | -3.000E+03 | 8.000E+00  | -3.000E+00 | 3549.891  |
| -3.000E+03 | 2.000E+03  | -3.000E+00 | 3.000E+00  | -10.000   |

Pomocí tabulkového procesoru užitím příkazů pro inverzi získáme inverzní matici:

|           |           |            |            |
|-----------|-----------|------------|------------|
| 2.299E-05 | 3.298E-05 | -1.999E-03 | -2.999E-03 |
| 3.298E-05 | 4.797E-05 | -2.999E-03 | -3.999E-03 |
| 1.999E-03 | 2.999E-03 | 2.299E-05  | 3.298E-05  |
| 2.999E-03 | 3.999E-03 | 3.298E-05  | 4.797E-05  |

Výsledky získáme užitím příkazů pro součin matic. Obvykle nás nezajímají reálné a imaginární části, ale amplitudy a fáze. Pokud použijeme funkci  $\arctg$  při výpočtu fáze, je nutné kontrolovat, zda reálné části nejsou záporné (použít funkci  $\text{když}$  a pro záporné reálné části připočíst hodnotu  $\pi$  k  $\arctg[\text{Im}(I)/\text{Re}(I)]$ ). Snadnější je ovšem použít funkci  $\arctg2$ , která vrací  $\arctg$  v rozsahu  $-\pi$  až  $\pi$ . Pak převedeme radiány na stupně. Řešení obsahují následující tabulky:

|          |         |
|----------|---------|
| Re $I_1$ | -7.228  |
| Re $I_2$ | -10.837 |
| Im $I_1$ | -13.923 |
| Im $I_2$ | -20.881 |

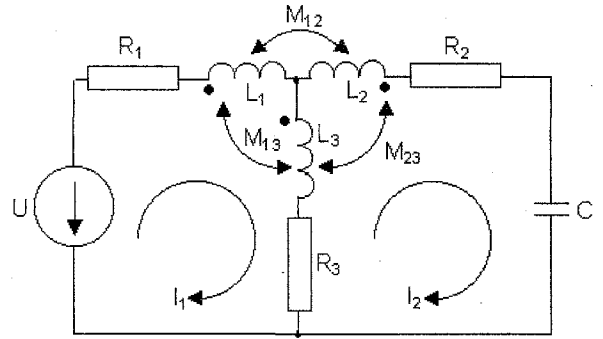
|            |          |
|------------|----------|
| Amp. $I_1$ | 15.687   |
| Amp. $I_2$ | 23.525   |
| Fáze $I_1$ | -117.436 |
| Fáze $I_2$ | -117.429 |

**Příklad 5.18**

S

Vypočtete proudy  $I_1$  a  $I_2$  v obvodu podle obrázku. Je zadáno  $f = 1,59$  Hz,  $R_1 = 1,00 \Omega$ ,  $R_2 = 2,00 \Omega$ ,  $R_3 = 3,00 \Omega$ ,  $L_1 = 2,00$  H,  $L_2 = 4,00$  H,  $L_3 = 6,00$  H,  $M_{12} = 1,00$  H,  $M_{13} = 2,00$  H,  $M_{23} = 3,00$  H,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $\text{Re } U = 20$  V a  $\text{Im } U = 10$  V.

**Řešení:** Řešení lze získat v maticovém tvaru. Pomocí tabulkového procesoru použitím příkazů pro inverzi a součin matic se získá řešení. V první tabulce jsou zadané matice  $R$ ,  $X$ ,  $U_{\text{Re}}$  a  $U_{\text{Im}}$ , které získáme stejným způsobem, jako v předešlém příkladu. Výpočty jednotlivých buněk provádí tabulkový procesor. Pro smyčkové proudy platí



$$\begin{aligned} [(R_1 + R_3) + j\omega(L_1 + L_3 + 2M_{13})] I_1 - [R_3 + j\omega(L_3 + M_{13} + M_{12} + M_{23})] I_2 &= U \\ -[R_3 + j\omega(L_3 + M_{13} + M_{12} + M_{23})] I_1 + [(R_2 + R_3) + j\omega(L_2 + L_3 + 2M_{23}) - j/\omega C] I_2 &= 0 \end{aligned}$$

a proto

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| 4.000E+00  | -3.000E+00 | -1.200E+02 | 1.200E+02  |
| -3.000E+00 | 5.000E+00  | 1.200E+02  | 9.984E+04  |
| 1.200E+02  | -1.200E+02 | 4.000E+00  | -3.000E+00 |
| -1.200E+02 | -9.984E+04 | -3.000E+00 | 5.000E+00  |

|        |
|--------|
| 20.000 |
| 0.000  |
| 10.000 |
| 0.000  |

V druhé tabulce je inverzní matice:

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| 2.773E-04  | -8.297E-08 | 8.314E-03  | -1.000E-05 |
| -8.297E-08 | 3.002E-10  | -1.000E-05 | -1.000E-05 |
| -8.314E-03 | 1.000E-05  | 2.773E-04  | -8.297E-08 |
| 1.000E-05  | 1.000E-05  | -8.297E-08 | 3.002E-10  |

Výsledky získáme užitím příkazů pro součin matic. Obvykle nás nezajímají reálné a imaginární části, ale amplitudy a fáze. Podobně jako v předchozím příkladu je při výpočtu fáze nutné kontrolovat při použití funkce  $\arctg[\text{Im}(I)/\text{Re}(I)]$ , zda reálné části nejsou záporné, či použít  $\arctg2$ . Pak převedeme radiány na stupně. Řešení obsahují následující tabulky:

|          |        |
|----------|--------|
| Re $I_1$ | 0.089  |
| Re $I_2$ | 0.000  |
| Im $I_1$ | -0.164 |
| Im $I_2$ | 0.000  |

|            |         |
|------------|---------|
| Amp $I_1$  | 0.186   |
| Amp $I_2$  | 0.000   |
| Fáze $I_1$ | 298.475 |
| Fáze $I_2$ | 117.040 |

**Příklad 5.19**

D

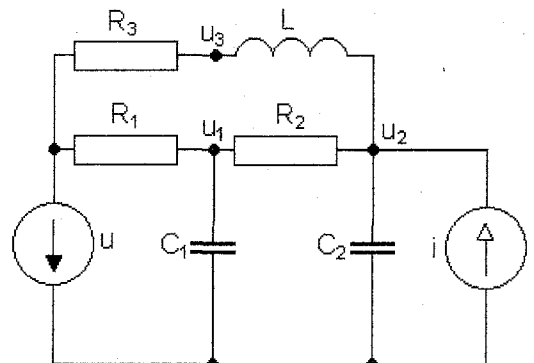
Napište rovnice pro uzlová napětí  $u_1$ ,  $u_2$  a  $u_3$  na obrázku pro ustálené sinusové proudy (fázory).

**Řešení:** Pro uzlová napětí platí

$$\frac{U_1 - U}{R_1} + jU_1\omega C_1 + \frac{U_1 - U_2}{R_2} = 0,$$

$$\frac{U_2 - U_1}{R_2} + jU_2\omega C_2 + \frac{U_2 - U_3}{j\omega L} = I,$$

$$\frac{U_3 - U_2}{j\omega L} + \frac{U_3 - U}{R_3} = 0.$$



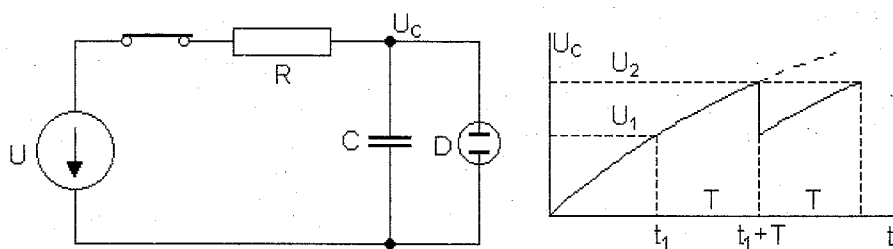
**Příklad 5.20**

C

Určete frekvenci oscilátoru s doutnavkou. Po připojení zdroje stejnosměrného napětí  $U$  se kapacitor  $C$  nabíjí přes odpor  $R$ . Doutnavka  $D$  nevede zprvu proud (má odpor  $R_d \rightarrow \infty$ ) a teprve, kdy napětí na kapacitoru dosáhne zápalného napětí doutnavky  $U_C = U_2$ , nastane výboj a kapacitor se přes doutnavku rychle vybije na napětí  $U_1 < U_2$ . Při napětí  $U_1$  (zhasací napětí) výboj zhasíná a doutnavka

## 5. Časově proměnné proudy

opět nevede. Tento děj se stále opakuje. Odpor doutnavky při výboji je velmi malý  $R_d'' < R$ , takže časová konstanta při vybíjení je mnohem menší než časová konstanta nabíjení. Proto



můžeme dobu potřebnou k vybití kondenzátoru z napětí  $U_2$  na  $U_1$  pro zjednodušení zanedbat.

**Řešení:** Použijeme metodu uzlových napětí. Pro uzel  $U_C$  platí (pro doutnavku v nevodivém stavu)

$$C \, dU_C / dt + (U_C - U) = 0.$$

Tato rovnice má řešení

$$U_C = K \exp(-t/\tau) + U,$$

kde  $\tau = RC$ . V okamžiku  $t = t_1$  se kapacitor nabije na napětí  $U_C(t_1) = U_1$

$$U_1 = K \exp(-t_1/\tau) + U$$

a v okamžiku  $t = t_1 + T$  se kapacitor nabije na napětí  $U_C(t_1 + T) = U_2$

$$U_2 = K \exp[-(t_1 + T)/\tau] + U.$$

Při dosažení napětí  $U_2$  nabíjení končí a kapacitor se velmi rychle vybití přes zapálenou doutnavku (se zanedbatelným odporem a tedy i časovou konstantou) na napětí  $U_1$ . Dále se stále opakuje nabíjení z  $U_1$  na  $U_2$  a rychlé vybíjení z  $U_2$  na  $U_1$ . Úsek nabíjení má stále stejný průběh a stejnou dobu trvání  $T$ , jak je ukázáno na obrázku. Zanedbáme-li dobu vybíjení, je doba  $T$  dobou pilového kmitu napětí. Dobu periody určíme z hořejších rovnic

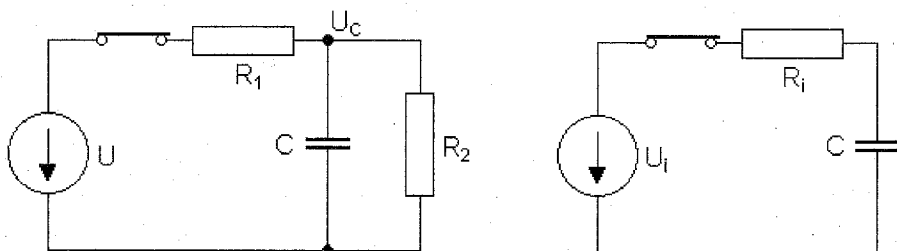
$$U - U_1 = K \exp(-t_1/\tau); \quad U - U_2 = K \exp[-(t_1 + T)/\tau]$$

$$(U - U_1) / (U - U_2) = \exp(-T/\tau); \quad T = \tau \ln[(U - U_1) / (U - U_2)].$$

Frekvence pilových kmitů je  $f = 1/T$ .

### Příklad 5.21

Ukažte, jak lze využít známého průběhu přechodného jevu v jednoduchém obvodu  $RC$  k řešení složitějšího obvodu  $R_1 R_2 C$  na levé straně obrázku.



**Řešení:** Z Théveninova teorému plyne, že obvod  $R_1 R_2 C$  nalevo lze nahradit zdrojem s napětím  $U_i = U R_2 / (R_1 + R_2)$  a vnitřním odporem  $R_i = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

Proto pro zapnutí stálého napětí můžeme uvažovat jednoduchý obvod s napětím  $U_i$  a a obvod  $R_i C$  podle obrázku napravo a tedy bude platit

$$U_C = U_i (1 - e^{-t/\tau}), \quad I = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{U_i C}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad \tau = CR_i = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

a pro zapnutí stálého napětí bude podobně platit

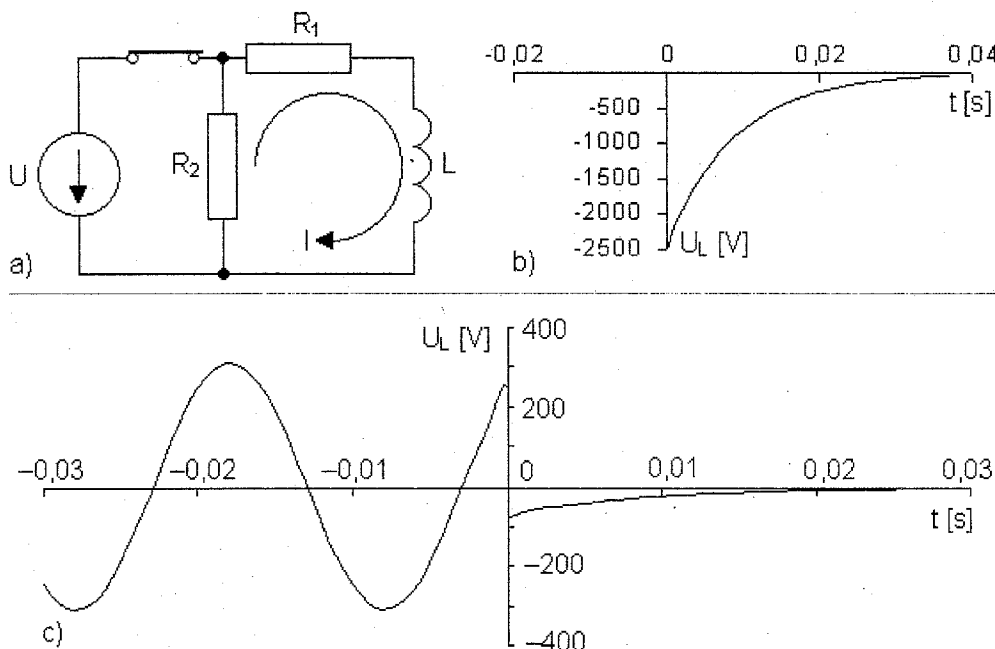
$$U_C = U_i e^{-t/\tau}, \quad I = C \frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_i C}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

**Poznámka:** Pomocí podobného postupu lze samozřejmě řešit i obvod, kdy místo kapacitoru  $C$  je zapojena indukčnost  $L$ , popř. případ kdy se připojuje zdroj harmonického napětí.

**Příklad 5.22**

**B**

Obvod na obr. a) byl v ustáleném stavu a v okamžiku  $t = 0$  se vypnul spínač. Pro  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  a napětí zdroje a)  $U = 220 \text{ V}$ , b)  $U = \sqrt{2}U_0 \sin(\omega t + \psi) = \sqrt{2} \cdot 220 \sin(314t + 0,873) \text{ V}$  určete průběh napětí  $U_L(t)$  induktoru.



**Řešení:** a) Pro  $t < 0$  a  $U = 220 \text{ V}$  je zřejmě  $U_L(t) = 0$  (induktorem protéká stejnosměrný proud). Pro  $t > 0$  určíme napětí pomocí smyčkových proudů  $(R_1 + R_2)I + U_L(t) = 0$ ,

$$(R_1 + R_2)I + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Obecné řešení je  $I = C \exp(-t/\tau)$ , kde  $\tau = L/(R_1 + R_2)$ . Počáteční podmínka je

$$I(0) = U/R_1 = 220/10 = 22 \text{ A}.$$

V ustáleném stavu je  $I(\infty) = 0$ , což je také partikulární řešení (homogenní a nehomogenní rovnice jsou stejné). Proto pro  $t > 0$  je

$$I = 22 \exp(-110 t) \text{ A},$$

$$U_L(t) = L dI/dt = -110 \cdot 22 \exp(-110 t) = -2420 \exp(-110 t) \text{ V}.$$

Je zřejmé, že  $U_L(0) = -2420 \text{ V}$ , což je jedenáctkrát větší napětí než je napětí zdroje (viz obr. b)

b) Pro  $t < 0$  a  $U = \sqrt{2} U_0 \sin(\omega t + \psi) = \sqrt{2} \cdot 220 \sin(314t + 0,873) \text{ V}$  je zřejmě ustálená hodnota

$$U_L = \frac{U}{R_1 + j\omega L} j\omega L = \frac{220 \exp(j0,873)}{10 + j314} j314 = 219,889 \exp(j0,904).$$

Okamžitá hodnota je  $U_L(t) = \sqrt{2} \cdot 219,889 \sin(314t + 0,904) \text{ V}$  a tedy  $U_L(0) = 244,4 \text{ V}$ . V původním ustáleném stavu protékal induktorem proud

$$I_L = \frac{U}{R_1 + j\omega L} = \frac{220}{10 + j314} = 0,700 \exp(-j0,666)$$

Okamžitá hodnota je  $I_L(t) = \sqrt{2} \cdot 0,700 \sin(314t - 0,666) \text{ V}$  a tedy  $I_L(0) = -0,612 \text{ V}$ . Protože obecné a partikulární řešení je stejné jako v případě a), dostaneme pro  $t > 0$

$$I = -0,612 \exp(-110 t) \text{ A},$$

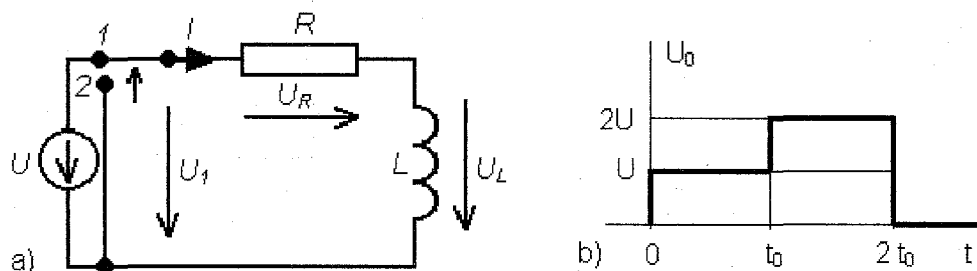
$$U_L(t) = L dI/dt = 110 \cdot 0,612 \exp(-110 t) = 67,3 \exp(-110 t) \text{ V}.$$

Průběh  $U_L(t)$  je na obr. c).

**Příklad 5.23**

**B**

Určete průběh proudu  $I$  a napětí  $U_L$  po sepnutí (přepnutí z polohy 2 do polohy 1) spínače pro obvod podle obr. a) pro průběh napětí zdroje podle obr. b) pro  $U = 100 \text{ V}$ ,  $t_0 = 0,01 \text{ s}$ ,  $R = 100 \Omega$  a  $L = 1 \text{ H}$ .



**Řešení:** Pomocí principu superpozice můžeme vyjádřit průběh napětí zdroje jako součet tří skoků

$$U_0(t) = U_{01}(t) + U_{02}(t) + U_{03}(t),$$

kde  $U_{01}(t)$  je skok v čase  $t=0$  (z 0 na  $U$ ),  $U_{02}(t)$  je skok v čase  $t=t_0$  (z 0 na  $U$ ) a  $U_{03}(t)$  je takový skok, aby výsledné napětí bylo nulové, tzn. skok v čase  $t=2t_0$  (z 0 na  $-2U$ ). Obecné řešení homogenní rovnice je  $I=k \exp(-t/\tau)$ , kde  $\tau = L/R$  je časová konstanta. Pro jednotlivé skoky dostaneme partikulární řešení (pro  $t \rightarrow \infty$ )  $I_{1p}(\infty) = U/R$ ,  $I_{2p}(\infty) = 2U/R$  a  $I_{3p}(\infty) = -2U/R$  a tedy odezvy na jednotlivé skoky  $U_{01}(t)$ ,  $U_{02}(t)$  a  $U_{03}(t)$  jsou

$$I_1 = \frac{U}{R} [1 - \exp(-t/\tau)] \quad \text{pro } t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

$$I_2 = \frac{U}{R} \{1 - \exp[-(t-t_0)/\tau]\} \quad \text{pro } t \in \langle t_0, \infty \rangle \text{ a}$$

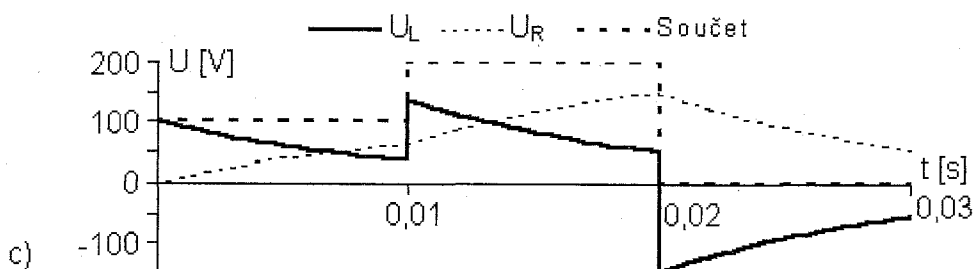
$$I_3 = \frac{-2U}{R} \{1 - \exp[-(t-2t_0)/\tau]\} \quad \text{pro } t \in \langle 2t_0, \infty \rangle.$$

Výsledný proud bude

$$I(t) = I_1 = \frac{U}{R} [1 - \exp(-t/\tau)] \quad \text{pro } t \in \langle 0, t_0 \rangle,$$

$$I(t) = I_1 + I_2 = \frac{U}{R} \{2 - [1 + \exp(t_0/\tau)] \exp(-t/\tau)\} \quad \text{pro } t \in \langle t_0, 2t_0 \rangle \text{ a}$$

$$I(t) = I_1 + I_2 = \frac{U}{R} [2 \exp(2t_0/\tau) - \exp(t_0/\tau) - 1] \exp(-t/\tau) \quad \text{pro } t \in \langle 2t_0, \infty \rangle.$$



Napětí  $U_L = L di/dt$  a proto

$$U_L(t) = U \exp(-t/\tau) \quad \text{pro } t \in \langle 0, t_0 \rangle,$$

$$U_L(t) = U [1 + \exp(t_0/\tau)] \exp(-t/\tau) \quad \text{pro } t \in \langle t_0, 2t_0 \rangle \text{ a}$$

$$U_L(t) = -U [2 \exp(2t_0/\tau) - \exp(t_0/\tau) - 1] \exp(-t/\tau) \quad \text{pro } t \in \langle 2t_0, \infty \rangle.$$

Pro dané hodnoty je  $\tau = L/R = 1/100 = 0,01$  a napětí  $U_L$ ,  $U_R = RI$  a  $U_L + U_R$  jsou ukázána na obr. c.

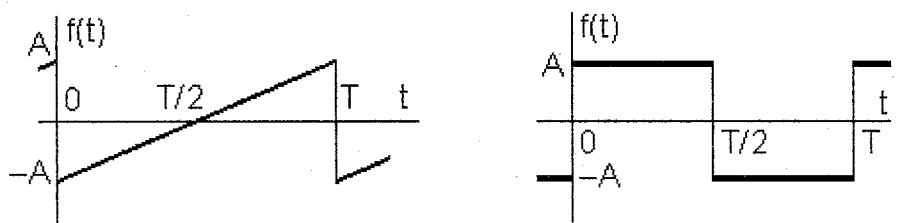
**Příklad 5.24**

**B**

Vyjádřete Fourierovou řadou periodické pilové a obdélníkové průběhy.

**Řešení:** Funkce jsou souměrné k vzhledem k počátku (liché funkce) a proto budou obsahovat jen sinusové členy, pro které platí

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$



V případě obou funkcí je součin  $f(t) \sin n\omega_0 t$  v intervalu od 0 do  $T/2$  stejný jako od  $-T/2$  do 0 (u pilového je pouze v opačném sledu). Pro pilový průběh tedy platí

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} \frac{2t-T}{T} \sin(n\omega_0 t) dt = \\ &= -\frac{4A}{Tn\omega_0} \left[ \left( \frac{2t}{T} - 1 \right) \cos(n\omega_0 t) - \frac{2}{T_0 n\omega_0} \sin(n\omega_0 t) \right]_0^{t=T/2} = -\frac{2A}{\pi n}. \end{aligned}$$

Pro obdélníkový průběh platí

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt = -\frac{4A}{Tn\omega_0} [\cos(n\omega_0 t)]_0^{t=T/2}$$

Je zřejmé, že  $n$  musí být liché a proto položíme  $n=2k-1$

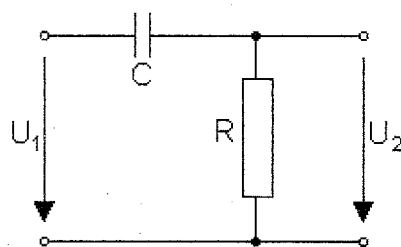
$$b_{2k-1} = \frac{4A}{\pi(2k-1)}.$$

**Příklad 5.25 S**

Určete napětí  $U_2$  pro obvod  $RC$  a vstupní obdélníkové napětí  $U_1$  podle předchozího příkladu pro  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $A = 100 \text{ V}$  a  $T = 20 \text{ ms}$ .

**Řešení:** Pro dělič platí

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{RI}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)I} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \exp(j\varphi)$$



Pro napětí  $U_1$  platí podle předchozího příkladu

$$U_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \sin[(2k-1)\omega_0 t] = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)\omega_0 t]}{(2k-1)}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

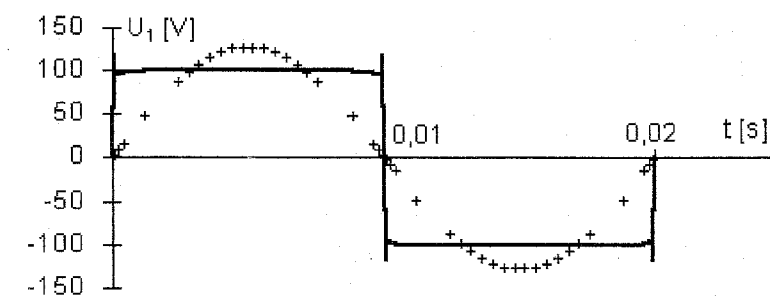
Proto

$$U_2(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)\omega_0 CR}{\sqrt{1 + [(2k-1)\omega_0 CR]^2}} \frac{\sin[(2k-1)\omega_0 t + \varphi_{2k-1}]}{(2k-1)},$$

$$\text{kde } \varphi_{2k-1} = \frac{\pi}{2} - \arctg[(2k-1)\omega_0 CR].$$

Napětí  $U_1$  a  $U_2$  lze snadno určit numericky např. pomocí tabulkového procesoru, jak je ukázáno na obrázcích, kde plnou čarou je ukázaná suma pro  $k=1, 2, \dots, 100$  a čárkovaně první harmonická ( $k=1$ ).

## 5. Časově proměnné proudy

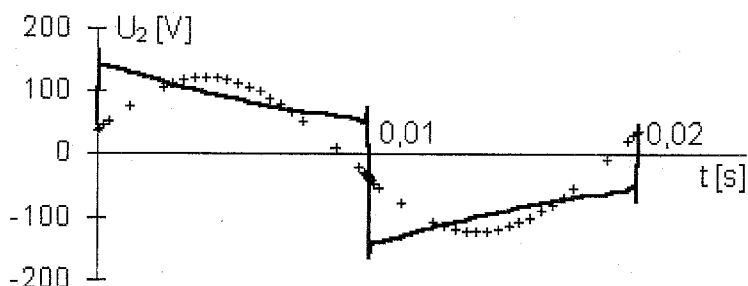


### Příklad 5.26

D

Elektrický přepadový ohřívač vody o obsahu 200 l je napájen trojfázovou elektrickou soustavou 3x230/400V, odpor jedné sekce odporového topného článku  $R = 55 \Omega$ . Články jsou spojeny do Y a nemají vyveden společný uzel. Účinnost ohřívače  $\eta = 95\%$ . Měrné teplo vody je  $G_e = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Určete jakou velikost má fázový proud, jaký příkon má ohřívač, jaká energie bude předána vodě, za jak dlouho ohřeje vodu z počáteční teploty  $20^\circ\text{C}$  na teplotu  $100^\circ\text{C}$ . Dojde-li k přerušení jedné fáze, určete, jakou velikost má fázový proud, jaký příkon má ohřívač, za jak dlouho ohřeje vodu z počáteční teploty  $20^\circ\text{C}$  na teplotu  $100^\circ\text{C}$ .



**Řešení:** Fázový proud má velikost

$$I = \frac{U_s}{\sqrt{3} \cdot R} = \frac{U_{fs}}{R} = \frac{400}{\sqrt{3} \cdot 55} = 4,1989 \text{ A}.$$

Ohřívač má příkon ( $\cos \varphi = 1$ )

$$P = \sqrt{3} U \cdot I \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 4,1989 = 2909,09 \text{ W}$$

$$P = \frac{U_s^2}{R} = \frac{(\sqrt{3} \cdot U_f)^2}{R} = \frac{400^2}{55} = \frac{160000}{55} = 2909,09 \text{ W}$$

Vodě bude předána energie

$$A = V \Delta \vartheta \cdot G_e = 200 \cdot (100 - 20) \cdot 4180 = 66880000 \text{ J} = 66,88 \text{ GJ} = 66,88 \text{ GWs}$$

$$A = 66,88 \text{ GWs} = 18577,778 \text{ Wh} = 18,578 \text{ kWh}$$

Doba potřebnou k ohřátí vody určíme pomocí následujících vztahů

$$A = P t \eta$$

$$t = \frac{A}{P \cdot \eta} = \frac{66,88 \cdot 10^6}{2909 \cdot 0,95} = 24200 \text{ sec} = 403 \text{ min} = 6,72 \text{ hod}$$

Dojde-li k přerušení jedné fáze má fázový proud velikost

$$I = \frac{U_s}{2 \cdot R} = \frac{400}{2 \cdot 55} = 3,6363 \text{ A}.$$

Ohřívač má příkon

$$P = \sqrt{3} U \cdot I \cdot \cos \varphi = U_s \cdot I = 400 \cdot 3,636 = 1454,54 \text{ W}$$

$$P = \frac{U_s^2}{2 \cdot R} = \frac{400^2}{110} = \frac{160000}{110} = 1454,54 \text{ W}$$

## 5. Časově proměnné proudy

Dobu za kterou se voda ohřeje z počáteční teploty  $20^{\circ}\text{C}$  na teplotu  $100^{\circ}\text{C}$  vypočteme pomocí vztahů

$$A = P t \eta$$

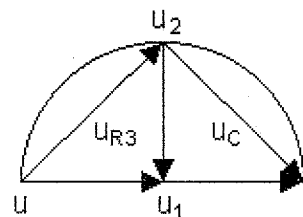
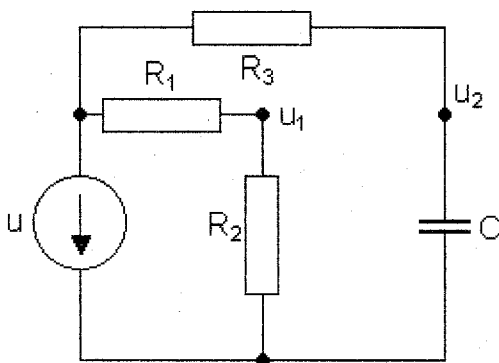
$$t = \frac{A}{P \eta} = \frac{66,88 \cdot 10^6}{1454 \cdot 0,95} = 48418 \text{ sec} = 807 \text{ min} = 13,44 \text{ hod}$$

Poměr příkonů je 3 fáze / 2 fáze =  $2909 \text{ W} / 1454 \text{ W} = 2 / 1 = 2$ .

Poměr dob ohřevu je 3 fáze / 2 fáze =  $6,72 \text{ hod} / 13,44 \text{ hod} = 1 / 2 = 0,5$ .

### Příklad 5.27

Často se vyžaduje, aby v elektrickém obvodu působilo sinusové napětí stálé amplitudy a regulovatelné fáze. Na obr. je obvod, který to umožňuje a nazývá se měnič fáze. Ukažte, že pro  $R_1 = R_2$  je amplituda napětí  $u_2 - u_1$  rovna polovině amplitudy vstupního napětí  $u$  a fázi je možné měnit změnou  $R_3$  mezi  $0^{\circ}$  až  $-180^{\circ}$ .



**Řešení:** Pro  $R_1 = R_2$  je zřejmě napětí  $u_1 = u/2$ . Proto

$$u_2 - u_1 = \frac{1/j\omega C}{R_3 + 1/j\omega C} u - u/2 = \frac{u}{2} \frac{1 - j\omega R_3 C}{1 + j\omega R_3 C} = \frac{u}{2} \exp[j/2 \arctg(-\omega R_3 C)].$$

Je zřejmé, že amplituda se rovná polovině amplitudy vstupního napětí  $u$  a fázi je možné měnit mezi  $0^{\circ}$  až  $-180^{\circ}$ , neboť arkustangens se mění při změně  $R_3$  od  $0^{\circ}$  do  $-90^{\circ}$ .

*Poznámka:* Názorně to zobrazuje vektorový diagram. Vektory  $u_{R3}$  a  $u_C$  jsou na sebe kolmé a proto při změně  $R_3$  se napětí  $u_2$  pohybuje po kružnici sestrojené nad průměrem  $u$ . Proto  $u_2 - u_1 = u/2$ , zatímco fáze se může měnit od  $0^{\circ}$  do  $-180^{\circ}$ .

### Příklad 5.28

Třífázový asynchronní motor má štítkové údaje jmenovitých hodnot:

3~ 1AP 100L-6; výkon 1,5 kW; napětí Y/D 380 / 220 V; proudy 4,1 / 7,1 A; účinník  $\cos \varphi = 0,75$ ; otáčky hřídele  $n = 935 \text{ n}^{-1}$ . Určete jmenovité hodnoty, moment zvratu  $M_k$  (maximální moment) pro poměr  $M_k / M_n = 2,5$ , jmenovitý výkon a moment pro účinnost 0,7.

**Řešení:** Výkon na hřídeli

$$P_2 = 1,5 \text{ kW}.$$

Jalový výkon na hřídeli

$$Q_2 = 0 \text{ W}.$$

Činný příkon

$$P_1 = S_1 \cos \varphi = \sqrt{3} U_s I_f \cos \varphi = 3 U_f I_f \cos \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 4,1 \cdot 0,75 = 2030 \text{ W}.$$

Zdánlivý příkon

$$S_1 = \sqrt{3} U_s I_f = 3 U_f I_f = 3 \cdot 220 \cdot 4,1 = 2706 \text{ VA}.$$

Jalový příkon

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{3} U_s I_f \sin \varphi = S_1 \sin \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 4,1 \cdot \sin \varphi = 1790 \text{ VAR}.$$

Účinnost

## 5. Časově proměnné proudy

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100 \% = \frac{1,5}{2,03} \cdot 100 \% = 74 \% .$$

Skluz (synchronní otáčky 6-ti pólového motoru jsou  $1000 \text{ n}^{-1}$ )

$$s = 1 - \frac{n_{\text{mechanické}}}{n_{\text{synchronní}}} = 1 - \frac{935}{1000} = 0,065$$

$$s = 6,5\%$$

Rychlost otáčení hřídele

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 935}{30} = 97,86 \text{ rad/sec} .$$

Jmenovitý provozní krouticí moment

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{1500}{97,86} = 15,33 \text{ Nm} .$$

Moment zvratu  $M_k$  (maximální moment) pro poměr  $M_k / M_n = 2,5$

$$M_k = 2,5 M_n = 2,5 \cdot 15,3 = 38,3 \text{ Nm} .$$

Jmenovitý výkon, který může odebírat zátěž připojená k motoru přes převodové ústrojí s účinností 0,7 je dán

$$P_z = P \cdot 0,7 = 1,5 \cdot 0,7 = 1,05 \text{ kW} .$$

Jmenovitý moment, který může odebírat zátěž připojená k motoru přes převodové ústrojí s účinností 0,7 je dán

$$M_z = M \cdot 0,7 = 15,3 \cdot 0,7 = 10,7 \text{ Nm} .$$

### Příklad 5.29

Sériový obvod  $RL$  je připojen na zdroj střídavého sinusového napětí s konstantním kmitočtem a amplitudou. Určete křivku, po níž by se pohyboval koncový bod fázoru proudu  $I$ , jestliže se mění odpor obvodu  $R$  od 0 do  $\infty$ .

**Řešení:** Pro sériový obvod  $RL$  platí

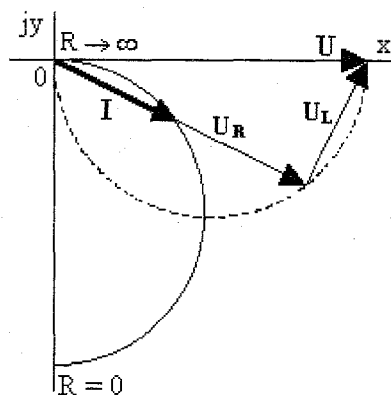
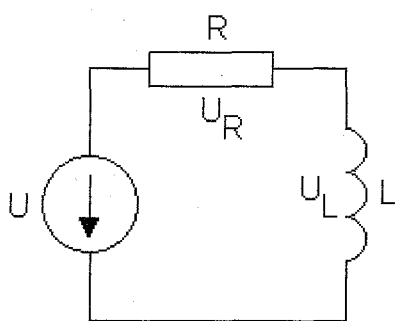
$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + j\omega L} = \frac{U(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = x + jy .$$

Zřejmě platí

$$x^2 + y^2 = \frac{U^2}{R^2 + (\omega L)^2} = -\frac{U}{\omega L} y ,$$

$$x^2 + \left( y + \frac{U}{2\omega L} \right)^2 = \left( \frac{U}{2\omega L} \right)^2 .$$

To je rovnice kružnice s poloměrem  $U/(2\omega L)$  a se středem o souřadnicích  $x_s=0$  a  $y_s=-U/(\omega L)$ . Je zřejmé, že koncový bod fázoru proudu  $I$  se pohybuje po kružnici, která pro  $R \rightarrow \infty$  prochází počátkem. Položíme-li fázor  $U$  do osy reálných čísel, tzn.  $U=U$  pak pro  $R=0$  protíná tato kružnice poloosu imaginárních čísel v bodě  $-jU/(\omega L)$ . Pro  $R=j\omega L$  svírá  $I$  s reálnou poloosou úhel  $-45^\circ$ .



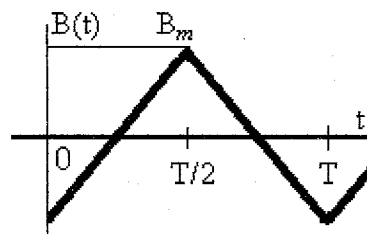
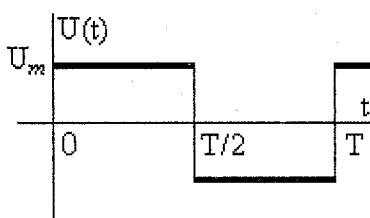
## 5. Časově proměnné proudy

To je patrné též z fázorového diagramu. Fázory  $U$ ,  $U_R$  a  $U_L$  tvoří pravoúhlý trojúhelník. Proto při změně odporu  $R$  se pohybuje koncový bod fázoru  $U_R$  po čárkovaně vyznačené kružnici (Thaletova kružnice) od počátku 0 do koncového bodu fázoru  $U$ . Koncový bod fázoru  $I$ , který má směr shodný s vektorem  $U_R$ , se pohybuje po plné kružnici. Pro  $R = 0$  je  $U_R = 0$  a  $I_{\max} = U_R / (j\omega L)$ . Pro  $R \rightarrow \infty$  bude  $U_R \rightarrow U$  a  $I_{\max} \rightarrow 0$ . Pro kladné hodnoty  $U$ ,  $R$ ,  $L$  a  $\omega$  se fázor  $I$  pohybuje po naznačené plné půlkružnici vpravo od osy imaginárních čísel.

### Příklad 5.30

B

Magnetický obvod má průřez  $S = 10 \text{ cm}^2$  a je na něm navinuta cívka s počtem závitů  $N = 200$ . Určete průběh magnetické indukce  $B(t)$  v jádře, připojí-li se cívka na



střídavé napětí s obdélníkovým průběhem. Maximální hodnota napětí  $U_m = 60 \text{ V}$ ,  $T = 0,02 \text{ s}$ . Předpokládejte, že úbytky napětí na odporu a rozptylové indukčnosti jsou zanedbatelné. Jak ze změny  $B(t)$  pro  $T = 0,002 \text{ s}$ ?

**Řešení:** Při zanedbatelných úbytcích napětí na odporu cívky a na rozptylové indukčnosti se musí napětí indukované v cívce střídavým tokem jádra rovnat napětí zdroje  $U$ . Musí tedy platit

$$U = n \frac{d\Phi}{dt} = NS \frac{dB}{dt}; \quad B = \frac{1}{NS} \int U dt.$$

Pro kladnou půlvlnu obdélníkového napětí, tzn. pro  $0 \leq t \leq T/2$  je  $U = U_m$  a platí

$$B = \frac{1}{NS} \int U dt = \frac{1}{NS} \int_0^t U_m dt + B_0 = \frac{U_m}{NS} t + B_0,$$

kde  $B_0$  je indukce v okamžiku  $t = 0$ .

Pro zápornou půlvlnu obdélníkového napětí, tzn. pro  $T/2 \leq t \leq T$  je  $U = -U_m$  a platí

$$B = -\frac{1}{NS} \int_{T/2}^t U_m dt + B_{T/2} = -\frac{U_m}{NS} \left( t - \frac{T}{2} \right) + B_{T/2},$$

kde  $B_{T/2}$  je indukce v okamžiku  $t = T/2$ . Protože průběh magnetické indukce musí být vždy spojitý (skokové změny magnetické indukce by odpovídala skoková změna energie magnetického pole, což není možné), je v okamžiku  $t = T/2$  podle první rovnice

$$B_{T/2} = \frac{U_m T}{2NS} + B_0$$

a pro druhou půlvlnu platí

$$B = -\frac{U_m}{NS} t + \frac{U_m}{NS} T + B_0.$$

Hodnotu  $B_0$  určíme z podmínky, že průběh  $B(t)$  nemá žádnou stejnosměrnou složku (protože zdroj napětí nedodává žádný stejnosměrný magnetizační proud). Střední hodnota  $B(t)$  musí být rovna 0

$$\int_0^T B(t) dt = \int_0^{T/2} \left( \frac{U_m}{NS} t + B_0 \right) dt + \int_{T/2}^T \left[ \frac{U_m}{NS} (T - t) + B_0 \right] dt = 0,$$

$$B_0 = -\frac{U_m T}{4NS}.$$

Po dosazení dostaneme

$$B = \frac{U_m}{NS} \left( t - \frac{T}{4} \right) = 300(t - 0,005) \quad \text{pro } 0 \leq t \leq T/2 = 0,01 \text{ s},$$

## 5. Časově proměnné proudy

$$B = \frac{U_m}{NS} \left( -t + \frac{3T}{4} \right) = 300(-t + 0,015) \quad \text{pro } 0,01 \leq t \leq 0,02 \text{ s.}$$

Magnetická indukce  $B(t)$  má trojúhelníkový průběh, jak je naznačeno na obrázku. Minima a maxima jsou pro  $t = 0$ ,  $t = T/2 = 0,01$  s atd. Maximum se rovná  $B_m = 300(-0,01 + 0,015) = 1,5$  T.

Pro  $T = 0,002$  s je průběh  $B(t)$  podobný, pouze doba  $T$  je desetkrát menší. Rovněž amplituda bude desetkrát menší  $B_m = 300(-0,001 + 0,0015) = 0,15$  T.

### Příklad 5.31

S

Demonstrujte pomocí tabulkového procesoru činný výkon a efektivní hodnoty napětí a proudu pro obvod, kde protéká proud  $I = 10 \sin(\omega t + \pi/3)$  A a  $U = 100 \sin(\omega t)$  V pro  $f = 50$  Hz.

**Řešení:** Příslušné integrály nahradíme sumami, např. pro efektivní hodnotu napětí dostaneme

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt} \approx \left[ \frac{\Delta t}{N \Delta t} \sum_{i=0}^N U(i \Delta t) \right]^{1/2} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N [100 \sin(2\pi i / N)]^2 \right\}^{1/2}$$

Zvolíme-li  $N = 50$ , můžeme v tabulkovém procesoru vytvořit následující tabulku:

|   | A    | B                            | C                            | AZ                            |
|---|------|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1 | t    | 0                            | 1                            | 50                            |
| 2 | U(t) | =100*SIN(2*PI()*B1/50)       | =100*SIN(2*PI()*C1/50)       | =100*SIN(2*PI()*AZ1/50)       |
| 3 | I(t) | =10*SIN(PI()* (2*B1/50+1/6)) | =10*SIN(PI()* (2*C1/50+1/6)) | =10*SIN(PI()* (2*AZ1/50+1/6)) |
| 4 | P    | =B2*B3                       | =C2*C3                       | =AZ2*AZ3                      |

To dává číselné hodnoty:

|   | A    | B     | C      | AZ    |
|---|------|-------|--------|-------|
| 1 | t    | 0     | 1      | 50    |
| 2 | U(t) | 0.000 | 12.533 | 0.000 |
| 3 | I(t) | 5.000 | 6.046  | 5.000 |
| 4 | P    | 0.000 | 75.776 | 0.000 |

Příslušné integrály nahradíme sumami pomocí tabulkového procesoru:

|          | Numer.                         | Teoret.               |
|----------|--------------------------------|-----------------------|
| U efekt. | =(SUMA.ČTVERCŮ(B2:AZ2)/50)^0.5 | =100/2^0.5            |
| I efekt. | =(SUMA.ČTVERCŮ(B3:AZ3)/50)^0.5 | =10/2^0.5             |
| P        | =SUMA(B4:AZ4)/50               | =100*10/2*COS(PI()/6) |

Numerické výpočty (Numer.) lze srovnat s teoretickými výpočty (Teoret.):

|          | Numer.  | Teoret. |
|----------|---------|---------|
| U efekt. | 70.711  | 70.711  |
| I efekt. | 7.106   | 7.071   |
| P        | 433.013 | 433.013 |

### Příklad 5.32

D

Vypočítejte jak velký proud bude odebrat elektrická lokomotiva, která vyvíjí tažnou sílu  $F = 180$  kN při rychlosti 80 km/h. a) Lokomotiva je poháněna stejnosměrnými motory s napájecím napětím 3000 V. Účinnost lokomotivy  $\eta_l = 0,89$ . b) Lokomotiva je napájena ze střídavé jednofázové sítě 25 kV, 50 Hz. Střední účinnost lokomotivy je 0,85; účiník  $\cos \varphi = 0,89$ .

**Řešení:** Pro výpočet proudu je nutno zjistit příkon lokomotivy  $P_1 = \frac{P_2}{\eta_l}$  kde  $P_2$  je trakční výkon.

Trakční výkon  $P_2 = F \cdot \frac{v}{3,6}$  [kW, kN, km/h], resp.  $P_2 = F \cdot v$  [kW, kN, m/s].

a) Stejnosměrná lokomotiva. Trakční výkon  $P_2 = F \cdot \frac{v}{3,6} = 180 \cdot \frac{80}{3,6} = 4000$  kW.

Příkon lokomotivy  $P_1 = U \cdot I$ , přičemž  $P_1 = \frac{P_2}{\eta_l} = \frac{4000}{0,89} = 4494,4$  kW.

## 5. Časově proměnné proudy

$$\text{Odebíraný proud z trakčního vedení } I = \frac{P}{U} = \frac{4494,4 \cdot 10^3}{3000} = 1498 \text{ A.}$$

b) Odběr lokomotivy napájené z jednofázové sítě 25 kV, 50 Hz.

$$\text{Příkon } P_1 = \frac{P_2}{\eta_{SL}} = \frac{4000}{0,85} = 4705 \text{ kW.}$$

Vydeme ze vztahu pro činný výkon střídavého proudu a vypočteme proud

$$P_1 = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$I = \frac{P_1}{U \cdot \cos \varphi} = \frac{4705 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3 \cdot 0,89} = 211,4 \text{ A.}$$

### Příklad 5.33

D

Vypočtete jak velké množství energie vyrobí za jeden rok malá vodní elektrárna osazena Francisovou turbínou, která pracuje s účinností 78% a pohání třífázový alternátor s účinností 89%. Do turbíny přitéká voda z výšky 3 m, průtokové množství 200 l/s. Předpokládejme, že její časové využití je 75%.

**Řešení:** U vodní elektrárny dochází k přeměně potenciální energie vody na kinetickou, která se mění v turbíně na mechanickou s účinností  $\eta_T$  a ta je předávána generátoru, který pracuje s účinností  $\eta_G = 89\%$ .

Přeměna potenciální energie za časovou jednotku 1 s je výkon – v našem případě příkon turbíny

$$\text{Příkon } \frac{W_P}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

$$\text{Vstupní příkon turbíny } P_I = \frac{m \cdot g \cdot h}{1} = \frac{200 \cdot 9,81 \cdot 3}{1} = 5886 \text{ W.}$$

$$\text{Výkon turbíny } P_T = P_I \cdot \eta_T = 5886 \cdot 0,78 = 4591 \text{ W.}$$

$$\text{Výkon generátoru } P_G = P_T \cdot \eta_G = 4591 \cdot 0,89 = 4086 \text{ W} = 4,086 \text{ kW.}$$

Vyrobená energie za uvažované období:

$$A = P_G [\text{kW}] \times \text{počet h/den} \times \text{počet dnů/rok} \times \text{využití} [\text{kWh}].$$

$$A = 4086,6 \times 24 \times 365 \times 0,75 = 26\,845,5 \text{ kWh.}$$

### Příklad 5.34

D

Určete kapacitu neznámého kapacitoru  $C$ , máte-li k dispozici odpor  $R = 10\text{k}$  (Pozn.: v praxi odpor o velikosti  $10\,000\ \Omega$  se označuje 10k, podobně např.: 3k7 představuje odpor o hodnotě  $3\,700\ \Omega$ ), novou plochou baterii o jmenovitém napětí  $U_o = 4,5\text{ V}$ , stopky a voltmetr s velmi vysokým vstupním odporem  $R_v \gg R$ .

**Řešení:** K určení neznámé kapacity  $C$  použijeme měření poklesu napětí  $u_C$  na kondenzátoru, ke kterému je paralelně připojen známý odpor  $R$ . K této soustavě připojíme na několik minut opět paralelně plochou baterii a v čase  $t = 0$  s tuto baterii odpojíme. Nastane přechodový jev, napětí na kapacitoru se bude vybíjet přes odpor  $R$ . U kondenzátoru je stavovou veličinou napětí (protože energie kondenzátoru je funkcí napětí) a tedy napětí na kondenzátoru se bude měnit spojitě. Pro hledání funkce popisující vybíjení kondenzátoru přes odpor napíšeme výraz podle prvního Kirchhoffova zákona pro rovnost proudů protékajících jak kondenzátorem  $C$ , tak odporem  $R$  (napětí na kapacitoru je vždy stejné, jako napětí na odporu):

$$C \frac{du_C}{dt} + u_C/R = 0$$

Obecným řešením této lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je

$$u_C(t) = K \exp(-t/\tau),$$

kde výraz  $\tau = RC$  se nazývá časová konstanta.

## 5. Časově proměnné proudy

V čase  $t = 0$  s je napětí na kondenzátoru  $u_C(0) = 4,5$  V. Z této podmínky určíme konstantu  $K$ :

$$u_C(0) = K \exp(-0/\tau) = 4,5 \text{ V a odtud } K = 4,5 \text{ V.}$$

V čase  $t_1 > 0$  s bude napětí na kondenzátoru menší, než 4,5 V (kondenzátor se vybíjí přes odpor  $R$ ). Čas  $t_1$  změříme stopkami, napětí  $u_C(t_1)$  určíme výše zmíněným voltmetrem, který připojíme paralelně ke kondenzátoru  $C$  a odporu  $R$ . Bude tady platit:

$$u_C(t_1) = 4,5 \exp(-t_1/\tau) \text{ a pak logaritmováním a dalšími úpravami lze vyjádřit kapacitu } C:$$

$$\ln u_C(t_1) = (\ln 4,5) - t_1/\tau, \text{ dosadíme pak za } \tau = RC \text{ a vyjádříme výraz pro hledanou kapacitu}$$

$$C = \frac{t_1}{R \{ \ln[4,5/u_C(t_1)] \}}$$

Po dosazení naměřených hodnot  $u_C(t_1) = 2$  V,  $t_1 = 10$  s a  $R = 10\,000 \, \Omega$  do shora uvedeného výrazu zjistíme, že neznámá kapacita má hodnotu  $C = 0,0012$  F (tj. 1,2 mF)

### Příklad 5.35

**D**

Napište výrazy pro amplitudu, fázi a fázor proudu v každém ze tří vinutí trojfázového elektromotoru o celkovém příkonu 1600 W, jestliže je fázový posun mezi napětím a proudem  $\varphi = 45^\circ$ . Elektromotor je připojen na trojfázovou soustavu 3-400/231 V, typ YN. Vypočítejte dále činný, jalový a zdánlivý výkon druhé větve zátěže (S).

**Řešení:** Pro příkon  $P$  trojfázového spotřebiče a tedy i trojfázového elektromotoru platí:

$$P = 3 \operatorname{Re}[U_f I_f^*] = 3 U_f I_f \cos \varphi,$$

kde indexem „f“ značíme fázové napětí (které v našem příkladě je 231 V). Kosinus fázového posuvu  $\varphi$  mezi napětím a proudem se běžně nazývá „účinník“. Účinník je v našem případě  $\cos \varphi = \cos 45^\circ = 0,707$ .

S pomocí síťového (sdruženého) napětí  $U_s$  (které v našem příkladě je 400 V) lze pro celkový příkon uvést podobnou rovnici:

$$P = \sqrt{3} U_s I_f \cos \varphi$$

Trojfázový elektromotor představuje souměrnou indukční zátěž. Absolutní hodnota proudu každou fází bude stejná. Z již uvedených rovnic pro výkon lze tedy pro absolutní hodnotu proudu jedním vinutím odvodit

$$I_f = P / (3 U_f \cos \varphi) = 1600 / [3 \cdot 231 \cdot \cos(45^\circ)] = 3,265 \text{ A}$$

U trojfázové soustavy označme jednotlivé fáze U, V a W (někdy se označují R, S a T nebo X, Y a Z). Fázová napětí v jednotlivých větvích (fázích)  $U_U$ ,  $U_V$  a  $U_W$  jsou mezi sebou vzájemně posunuta o  $120^\circ$ . Fázi napětí ve větvi U ( $U_U$ ) volíme za vzažnou (nulový úhel). Pak platí:

$$U_V = U_U \exp(-j 120^\circ) \text{ a } U_W = U_V \exp(-j 120^\circ) = U_W \exp(-j 240^\circ)$$

Vzájemný posun proudu a napětí v každé větvi daného trojfázového elektromotoru je  $45^\circ$ . Víme, že elektromotor představuje zátěž indukčního charakteru a napětí bude tedy předcházet proud.

Lze též vyjádřit matematicky komplexní impedanci každé fáze (větve)  $Z$ :

$$Z = U_f / I_f = |Z| \exp(j 45^\circ) = 231 / 3,265 \exp(j 45^\circ) = 70,75 \exp(j 45^\circ) \, \Omega$$

Pro fázory jednotlivých proudů bude tedy platit:

$$I_U = U_U / Z = 231 / [70,75 \exp(j 45^\circ)] = 3,265 \exp(-j 45^\circ) \text{ A}$$

$$I_V = [U_U / Z] \exp(-j 120^\circ) = 3,265 \exp(-j 165^\circ) \text{ A}$$

$$I_W = [U_U / Z] \exp(-j 240^\circ) = 3,265 \exp(-j 285^\circ) = 3,265 \exp(j 75^\circ) \text{ A}$$

Fáze dílčích proudů čteme v komplexním argumentu exponenciely fázoru, např. proud ve větvi V má fázi  $-165^\circ$ .

## 5. Časově proměnné proudy

Výkon ve větvi V bude dán součinem napětí, proudu a funkce fázového posuvu  $\varphi$ , tedy pro činný  $P$ , jalový  $Q$  a zdánlivý  $S$  výkon ve větvi V platí:

$$P(V) = U_f I_f \cos \varphi = 231 \text{ V} \cdot 3.265 \text{ A} \cdot \cos(45^\circ) = 533,3 \text{ W}$$

$$Q(V) = U_f I_f \sin \varphi = 231 \text{ V} \cdot 3.265 \text{ A} \cdot \sin(45^\circ) = 533,3 \text{ var}$$

$$S(V) = U_f I_f = 231 \text{ V} \cdot 3.265 \text{ A} = 754,2 \text{ VA}$$

V případě 45 stupňového fázového posuvu mezi napětím a proudem je tedy stejná velikost činného i jalového výkonu. Samozřejmě, že příslušné výkony ve větvích U a W jsou v našem případě stejné, jako ve větvi V.

### Příklad 5.36

Mějme souměrnou trojfázovou soustavu 3·400/231 V o kmitočtu 50 Hz, zdroj je zapojený do hvězdy, střední vodič není vyveden. Spotřebič je zapojený podle obrázku ( $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ). Určete fázory proudů  $I_R$ ,  $I_S$  a  $I_T$ .

**Řešení:** Z obrázku je patrné, že na induktoru  $L$  i na kapacitoru  $C$  je plné síťové (sdružené) efektivní napětí 400 V. Zvolme fázor sdruženého napětí  $U_{RS} = 400 \text{ V}$  za vztažný, tedy argument jeho fázoru je nulový.

*Poznámka:* Pokud bychom volili jako vztažné napětí fázové napětí  $U_R$  (v našem případě  $U_R = 231 \text{ V}$ ), museli bychom brát v úvahu, že  $U_{RS} = \sqrt{3} U_R \exp(j30^\circ)$ .

Pro další sdružené napětí platí  $U_{ST} = U_{RS} \exp(-j120^\circ)$ .

*Poznámka:* Pro výpočet je výhodné si uvědomit, že platí  $\exp(-j120^\circ) = -\exp(j60^\circ)$ .

Podle obrázku můžeme psát  $U_L = U_{RS}$  a pak

$$I_R = \frac{U_{RS}}{j\omega L} = \frac{400}{j 314,15 \cdot 1} = 0 - 1,2732j = 1,2732 \exp(-j 90^\circ) \text{ A}$$

Dále z obrázku platí  $U_C = -U_{ST}$  a tedy  $I_T$

$$I_T = \frac{-U_{ST}}{j\omega C} = -j\omega C U_{ST} = -j 314,15 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \cdot \exp(-j 120^\circ) =$$

$$= j 314,15 \cdot 10^{-6} 400 \cdot \exp(j 60^\circ) = -0,1088 + 0,0628j = 0,1257 \exp(j 150^\circ) \text{ A}$$

Z prvního Kirchhoffova zákona pak platí

$$I_R + I_S + I_T = 0 \text{ a odtud } I_S = -(I_R + I_T)$$

Do posledního vzorce dosadíme již vypočtené fázory proudů:

$$I_S = -(I_R + I_T) = -(0 - 1,2732j - 0,1088 + 0,0628j) = 0,1088 + 1,2104j =$$

$$= 1,2153 \cdot \exp(j 84,86^\circ) \text{ A.}$$

Nejmenší proud tedy teče kapacitorem  $C$ .

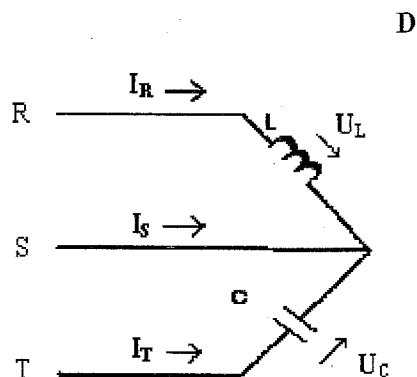
Je samozřejmé, že na rozdíl od předchozího příkladu nejsou jednotlivé proudy stejné a proto ani výkony nejsou stejné.

Výkon ve větvi S bude dán součinem napětí, proudu a funkce fázového posuvu  $\varphi$ , tedy pro činný výkon  $P$  ve větvi S platí:

$$P(S) = 3 \operatorname{Re}[U_f I_f^*] = U_f I_f \cos \varphi.$$

A podobně pro jalový výkon  $Q(S)$  ve větvi S dostaneme

$$Q(S) = 3 \operatorname{Im}[U_f I_f^*] = U_f I_f \sin \varphi.$$



## 5. Časově proměnné proudy

Pro zdánlivý výkon  $S(S)$  ve větvi S jednoduše odvodíme:

$$S(S) = U_f I_f.$$

Samozřejmě, že příslušné výkony ve větvích R a T bychom získali analogicky.

### Příklad 5.37

D

Trojfázový generátor má tři soustavy cívek dávající napětí  $U_U$ ,  $U_V = U_U a^{-1}$ ,  $U_W = U_U a^{-2}$ , kde  $a = \exp(j120^\circ)$ , spojené do hvězdy, ale vinutí fáze U je zapojena s opačnou polaritou. Určete sdružená napětí a souměrné složky soustavy.

**Řešení:** Pro fázová napětí platí

$$U_1 = -U_U, \quad U_2 = U_V = U_U a^{-1}, \quad U_3 = U_W = U_U a^{-2}$$

a pro sdružená napětí platí

$$U_{12} = U_1 - U_2 = U_U a^{-2}, \quad U_{23} = U_2 - U_3 = \sqrt{3} U_U \exp(-j90^\circ), \quad U_{31} = U_U \exp(-j60^\circ).$$

Pro stanovení sousledné (synchronní) složky  $U_{s1}$ , zpětné (inverzní)  $U_{i1}$  a nulové  $U_0$ , platí

$$U_{s1} = [U_1 + U_2 a + U_3 a^2] / 3 = U_U / 3,$$

$$U_{i1} = [U_1 + U_2 a^2 + U_3 a] / 3 = -2 U_U / 3,$$

$$U_0 = [U_1 + U_2 + U_3] / 3 = -2 U_U / 3.$$

### Příklad 5.38

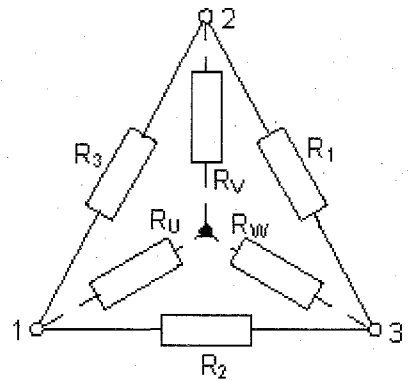
C

Odvoďte vztahy pro transfiguraci hvězdy na trojúhelník a naopak, kdy chceme nahradit odpory  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  mezi body 1, 2 a 3 jinými o velikostech  $R_U$ ,  $R_V$  a  $R_W$ , které jsou zapojené do hvězdy tak, aby výsledné odpory mezi svorkami byly stejné.

**Řešení:** Výsledné odpory mezi svorkami jsou

$$R_{12} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_U + R_V$$

$$R_{13} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_U + R_W, \quad R_{23} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_V + R_W$$



Řešením těchto rovnic dostaneme

$$R_U = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_V = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_W = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Je-li naopak dána hvězda odporů, transfigurujeme ji na trojúhelník

$$R_1 = R_V + R_W + \frac{R_V R_W}{R_U}$$

$$R_2 = R_U + R_W + \frac{R_U R_W}{R_V}$$

$$R_3 = R_U + R_V + \frac{R_U R_V}{R_W}$$

**Poznámka:** I když v tomto příkladu jsem uvažovali reálné odpory  $R$ , je zřejmé že analogické vztahy platí pro libovolné impedance  $Z$  (např.  $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 - j/\omega C_1$  apod.).

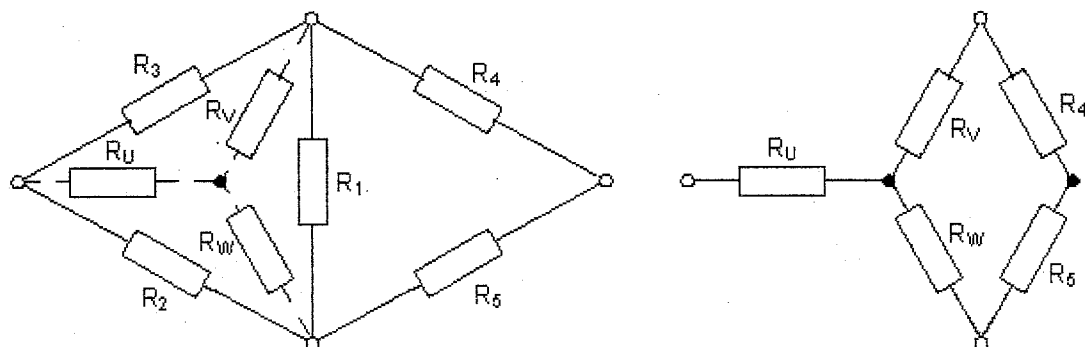
## Příklad 5.39

D

Stanovte výsledný odpor  $R$  obvodu složeného z odporů  $R_1, R_2, R_3, R_4$  a  $R_5$  podle obrázku.

**Řešení:** Odporů  $R_1, R_2$  a  $R_3$  transfigurujeme na odpory  $R_U, R_V$  a  $R_W$ , které jsou zapojené do hvězdy podle předešlého příkladu. Výsledný odpor tedy bude

$$R = R_U + \frac{(R_V + R_4)(R_W + R_5)}{R_V + R_4 + R_W + R_5}.$$



*Poznámka:* I v tomto příkladu je zřejmé, že analogické vztahy platí pro libovolné impedance  $Z$ .

## Příklad 5.40

C

Trojfázová elektrická pec má tři topná tělesa, každé s odporem  $R = 15 \Omega$ . Vypočtete proudy a příkony jednotlivých těles i celé pece, je-li pec připojena na souměrnou soustavu napětí  $3 \times 400 \text{ V}$  (sdružené napětí) a jsou-li tělesa zapojena a) do hvězdy, b) do trojúhelníka.

**Řešení:** Tři stejná topná tělesa tvoří souměrnou zátěž a tedy proudy a výkony všech tří těles jsou stejné. Takže stačí počítat proud jen jednoho topného tělesa a není nutné uvažovat fáze.

a) Při zapojení do hvězdy jsou na tělesech napětí rovná fázovému napětí sítě. Proto

$$|U_1| = |U_2| = |U_3| = |U_f| = |U_s| / \sqrt{3} = 400 / \sqrt{3} = 230,9 \text{ V}.$$

Proudy jednotlivých těles jsou dány

$$|I_1| = |I_2| = |I_3| = |U_f| / R = |U_s| / (\sqrt{3}R) = 15,4 \text{ A}.$$

Jednotlivé proudy jsou ve fázi s příslušnými fázovými napětími sítě (impedance topných těles jsou dány odpory těles). Výkon jednoho tělesa je tedy

$$P_t = |U_f|^2 / R = |U_s|^2 / (3R) = 3\,555,6 \text{ W}.$$

Celkový výkon pece při zapojení do hvězdy je

$$P_s = 3|U_f|^2 / R = |U_s|^2 / R = 10\,666,7 \text{ W} = 10,7 \text{ kW}.$$

b) Při zapojení do trojúhelníka jsou na tělesech napětí rovná sdruženému napětí sítě. Proto proudy jednotlivých těles jsou dány

$$|I_1| = |I_2| = |I_3| = |U_s| / R = 26,7 \text{ A}.$$

Jednotlivé proudy jsou ve fázi s příslušnými sdruženými napětími sítě (impedance topných těles jsou dány odpory těles). Výkon jednoho tělesa je tedy

$$P_t = |U_s|^2 / R = 10,67 \text{ kW}.$$

Celkový výkon pece při zapojení do trojúhelníka je

$$P_s = 3|U_s|^2 / R = 32 \text{ kW}.$$

Při přepojení pece z hvězdy do trojúhelníka se tedy příkon zvětší trojnásobně.

Z předchozích vztahů je ovšem zřejmé, že jak jednotlivé proudy, tak i příkony jsou nepřímo úměrné odporu  $R$  (např. zvětšíme-li třikrát odpory, klesnou proudy a jednotlivé příkony také třikrát).

## 6. ELEKTROMAGNETICKÉ VLNĚNÍ

### Příklad 6.1

D

Určete délku vlny pro následující frekvence:

a) 850 MHz, volný prostor, b) 430 MHz, Telfon ( $\epsilon_r=2,1$ ), c) 250 kHz, vzduch, d) 20 kHz, vzduch, e) 450 kHz až 1,5 MHz, vzduch (AM rádiové vysílače), f) 108 MHz, vzduch (FM rádiový vysílač), g) 1 GHz, vzduch (mikrovlnný signál sekundárního radaru pro řízení letového provozu), h) 600 MHz, skelný laminát ( $\epsilon_r=4,7$  – televizní vysílač)

**Řešení:** Vlnovou délku určíme pomocí vztahu  $\lambda = v/f$ , kde  $v = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ .

a) 353 mm, b) 481 mm, c) 1 200 m, d) 15 000 m, e) 667 m až 200 m, f) 2,78 m, g) 300 mm, h) 230 mm.

### Příklad 6.2

D

Určete následující fyzikální rozměry ve vlnových délkách:

a) Součástka o rozměru 180 mm, 120 MHz, vzduch, b) Součástka o rozměru 1,8 m, 100 MHz, vzduch, c) Součástka o rozměru 250 mm, 500 MHz, skelný laminát ( $\epsilon_r=4,7$ ), d) Kabel pro tiskárnu – 2 m dlouhý, 80 MHz, vzduch, e) 10 km vedení elektrické energie 50 Hz ve vzduchu, f) Automobil (3,6 m) na spodní frekvenci AM pásma (450 kHz)

**Řešení:** Vlnovou délku určíme pomocí vztahu  $\lambda = v/f$ , kde  $v = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  a proto délka vyjádřená ve vlnových délkách je  $l_v = l/\lambda$ .

a) 0,072  $\lambda$ , b) 0,6  $\lambda$ , c) 0,903  $\lambda$ , d) 0,533  $\lambda$ , e) 0,00167  $\lambda$ , f) 0,0054  $\lambda$

### Příklad 6.3

D

Určete následující napětí v dB $\mu$ V (vztažná úroveň  $U_I = 1 \mu$ V):

a) 23 mV, b) 670  $\mu$ V, c) 3,2 V, d) 0,1  $\mu$ V, e) 1 mV, f) 300 mV, g) 21 mV

**Řešení:** Pro převod na dB $\mu$ V platí

$$N = 20 \log (U_2 / U_I), \text{ kde } U_I = 1 \mu\text{V}.$$

Tedy

a)  $N = 20 \log (23\,000) = 87,2$  dB $\mu$ V, b) 56,5 dB $\mu$ V, c) 130 dB $\mu$ V, d) -20 dB $\mu$ V, e) 60 dB $\mu$ V, f) 110 dB $\mu$ V, g) 86,4 dB $\mu$ V

### Příklad 6.4

D

50  $\Omega$  přijímač je připojen k anténě pomocí 200 m 50  $\Omega$  koaxiálního kabelu. Přijímač ukazuje úroveň -20 dBm (vztažná úroveň  $P_I = 1$  mW) na 200 MHz. Určete napětí na výstupu antény v dB $\mu$ V, jestliže ztráty kabelem při 200 MHz jsou 26,2 dB / 100 m.

**Řešení:** Úroveň v dBm určíme ze vztahu  $10 \log (P_2 / P_I)$ . Úrovní -20 dBm odpovídá

$$P_2 = 10^{-20/10} \text{ mW} = 0,01 \text{ mW},$$

Tomu odpovídá napětí

$$U = (P_2 Z_0)^{1/2} = (0,000\,01 \cdot 50)^{0,5} = 0,022 \text{ V (87 dB}\mu\text{V)}.$$

Útlum v kabelu je 26,2 dB/100 m a pro 200 m kabel je útlum 52,4 dB.

Napětí na výstupu antény je tedy  $87 + 52,4 = 139,4$  dB $\mu$ V.

### Příklad 6.5

C

Bezeztrátové vedení s charakteristickou impedancí  $Z_0$  zakončené zatěžovací impedancí  $Z_L$  lze přizpůsobit čtvrtvlnným vedením  $\lambda/4$  s charakteristickou impedancí  $Z_T = (Z_L Z_0)^{1/2}$ . Dvouvodíčové vedení s impedancí  $Z_0 = 75 \Omega$  (uvnitř dielektrika s  $\epsilon_r = 2$ ) se má přizpůsobit pro zátěž  $Z_L = 150 \Omega$

## 6. Elektromagnetické vlnění

dvouvodičovým vedením se stejnými rozměry obou vodičů, ale jiným dielektrikem. Vypočtete  $\varepsilon_r$  a délku vedení pro  $f = 100$  MHz.

**Řešení:** Pro  $\varepsilon_r$  dostaneme  $Z_0 = Z_{0v} / \sqrt{\varepsilon_r}$ , kde  $Z_{0v}$  je charakteristická impedance pro vakuum.

$$Z_T = Z_0 \sqrt{2} = Z_{0v} \sqrt{2} / \sqrt{\varepsilon_r}.$$

Z tohoto vztahu plyne, že  $\varepsilon_r = 1$ . Tedy je nutné použít vzduchové vedení (popř. pěnové dielektrikum).

Pro 100 MHz je ve vakuu  $\lambda = c/f = 3$  m. Vedení  $\lambda/4$  tedy má délku 0,75 m.

### Příklad 6.6

C

Úsek bezetrátového koaxiálního kabelu s charakteristickou impedancí  $Z_0 = 50 \Omega$  a rychlostí šíření  $v = 2 \cdot 10^8$  m/s je zakončen zkratem a používá frekvenci 10 MHz. Určete nejkratší délku vedení tak, aby na vstupu se zkrat jevil jako kapacita 1000 pF. Určete nejkratší délku vedení tak, aby na vstupu se zkrat jevil jako indukčnost 1  $\mu$ H.

**Řešení:** Pro bezetrátové vedení platí

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}, \quad \alpha = 0, \quad Z_0 = \sqrt{L/C}, \quad v = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC}.$$

Proto

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} = j\omega/v.$$

Pro vstupní impedanci vedení zakončeného zkratem platí

$$Z(s) = Z_0 \frac{Z_0 \sinh \gamma s + Z_L \cosh \gamma s}{Z_L \sinh \gamma s + Z_0 \cosh \gamma s} = jZ_0 \operatorname{tg}(\beta s) = jZ_0 \operatorname{tg}(\omega s/v).$$

Kapacita 1000 pF se jeví jako impedance

$$Z = -j/(\omega C).$$

Proto  $\operatorname{tg}(\omega s/v) = -1/(\omega CZ_0)$  = Tedy  $s = -0,98$  m +  $n \lambda/2$ . Vlnová délka  $\lambda = v/f = 20$  m a minimální  $s = 9,02$  m. Podobně indukčnost 1  $\mu$ H se jeví jako impedance

$$Z = j\omega L.$$

Proto  $\operatorname{tg}(\omega s/v) = \omega L/Z_0$  a minimální  $s = 2,86$  m.

### Příklad 6.7

A

Určete  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  a Poyntingův vektor v kulových souřadnicích pro elementární dipól v počátku souřadnic ve směru  $\mathbf{z}^0$  o délce  $dl$  s proudovou hustotou  $\mathbf{J}_{tz} = I \mathbf{z}^0/dS$ .

**Řešení:** Vektorový potenciál je

$$A = \mu_0 \iiint_{V'} \mathbf{J}_f(x', y', z') \exp(-jkr) / (4\pi r) dV'$$

a protože platí  $\mathbf{z}^0 = r^0 \cos \theta - \theta^0 \sin \theta$ ,

$$A = \mu_0 I dl \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \mathbf{z}^0 = \mu_0 I dl \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} (\cos \theta r^0 - \sin \theta \theta^0)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} A = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} r^0 & r\theta^0 & r \sin \theta \varphi^0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix},$$

$$B_\varphi = \mu_0 I dl \frac{\exp(-jkr) \sin \theta}{4\pi r} \left( jk + \frac{1}{r} \right),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0.$$

V oblasti bez zdrojů platí

## 6. Elektromagnetické vlnění

$$j\omega\epsilon_0\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H}$$

a proto

$$\mathbf{E} = -j / (\omega\epsilon_0 \mu_0) \text{rot } \mathbf{B}.$$

Protože

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{r}^\theta & r\theta^\theta & r \sin \theta \phi^\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ B_r & rB_\theta & r \sin \theta B_\phi \end{vmatrix}$$

platí

$$E_r = -j \frac{Idl}{\omega\epsilon_0} \frac{\exp(-jkr) \cos \theta}{2\pi r^2} \left( jk + \frac{1}{r} \right),$$

$$E_\theta = -j \frac{Idl}{\omega\epsilon_0} \frac{\exp(-jkr) \sin \theta}{4\pi r} \left( -k^2 + \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right),$$

$$E_\phi = 0.$$

Poyntingův vektor je

$$\text{Re } (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) / 2 = \text{Re } (E_\theta H_\phi^* \mathbf{r}^\theta - E_r H_\phi^* \theta^\theta) / 2 = \frac{1}{2} Z_0 \left( \frac{kIdl}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \mathbf{r}^\theta.$$

To znamená, že výkon teče radiálně ven. Tyto vlny se nazývají sférické. I když jsou rozdílné od rovinných vln, lze je pro velké vzdálenosti v tečné rovině rovinnými vlnami aproximovat.

Pro velkou vzdálenost (vzdálenou zónu) platí  $kr \rightarrow \infty$  a proto získáme užitečnou aproximaci

$$H_\phi = jkIdl \frac{\exp(-jkr) \sin \theta}{4\pi r},$$

$$E_r = 0,$$

$$E_\theta = jk^2 \frac{Idl}{\omega\epsilon_0} \frac{\exp(-jkr) \sin \theta}{4\pi r} = jkZ_0 Idl \frac{\exp(-jkr) \sin \theta}{4\pi r}.$$

Proto  $E_\theta = H_\phi Z_0$ . Je zajímavé, že Poyntingův vektor vypočtený pouze pomocí této aproximace dává stejnou hodnotu jako výpočet pomocí úplných vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$ .

Celkový vyzařený výkon je

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{1}{2} \text{Re} \oint \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* d\mathbf{S} = \frac{1}{2} Z_0 \left( \frac{kIdl}{4\pi r} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \frac{4\pi r^2}{3} Z_0 \left( \frac{kIdl}{4\pi r} \right)^2. \end{aligned}$$

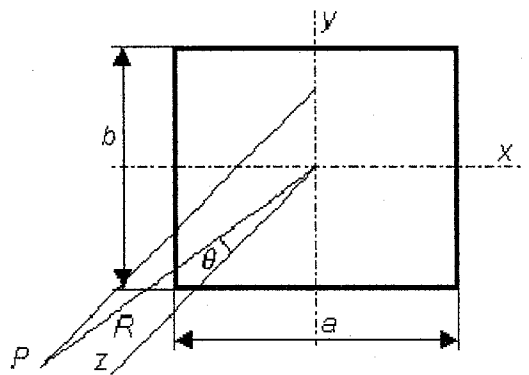
Zisk antény se definuje jako poměr výkonové hustoty v daném směru (obvykle v maximu) k výkonové hustotě antény, která by vyzařovala rovnoměrně do všech směrů (izotropní anténa). Izotropní anténu sice nejde teoreticky realizovat, ale můžeme si ji snadno představit (vypočítat), tzn. její výkonová hustota by byla  $P_T / (4\pi r^2)$  a proto je zisk

$$G = \frac{\frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)}{\frac{P_T}{4\pi r^2}} = \frac{3}{2} \frac{Z_0 \left( \frac{kIdl}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta}{Z_0 \left( \frac{kIdl}{4\pi r} \right)^2} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta.$$

## Příklad 6.8

A

Určete  $E$  a  $H$  ve velké vzdálenosti v rovině  $yz$  pro anténu s plošnou hustotou proudu  $K(x,y)=y^0$  uvnitř obdélníku.



**Řešení:** Využijeme výsledků z předchozího příkladu. Uvažujme element proudu  $dx dy y^0$ . Protože nyní je změněný souřadný systém, změní se  $\sin\theta$  na  $\cos\theta$ . Výsledné pole ve velké vzdálenosti (vzdálené zóně) získáme integrací výsledku předchozího příkladu

$$E_{\theta} = \frac{jk^2}{\omega\epsilon_0} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\exp(-jkr) \cos\theta}{4\pi r} dy dx.$$

Pro velká  $r$  bude v rovině  $yz$  přibližně platit

$$r = R - y \sin\theta.$$

Protože se změna  $r$  ve jmenovateli prakticky neuplatní, nahradíme  $r$  hodnotou  $R$ . V exponentu se změna uplatní a proto

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= \frac{jk^2}{\omega\epsilon_0} \frac{\cos\theta \exp(-j k R)}{4\pi R} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp(j k y \sin\theta) dy dx = \\ &= j Z_0 \frac{\cos\theta \exp(-j k R)}{2\lambda R} ab \frac{\sin u}{u} = Z_0 H_{\phi}, \end{aligned}$$

kde  $u = kb \sin\theta/2 = \pi b \sin\theta/\lambda$ .

Použitá metoda dává poměrně přesné výsledky pro aperturové antény s rozměry podstatně většími než je vlnová délka vyzařované vlny.

## Příklad 6.9

B

Určete šířku svazku (velkost úhlu mezi body s poklesem  $-3$  dB) a zisk antény z předešlého příkladu.

**Řešení:** Využijeme výsledků z předchozího příkladu. Pro pokles  $-3$  dB musí platit pro malé úhly  $\theta$  kdy  $\cos\theta \approx 1$

$$0,708 = \sin u/u.$$

Tuto rovnici vyřešíme numericky a dostaneme  $u = 1,389$ . Protože nás zajímá pokles mezi body s úrovní  $-3$  dB, potřebujeme znát dvojnásobnou hodnotu. Tedy

$$\pi b \sin\theta_3/\lambda = 2 \cdot 1,389$$

$$\sin\theta_3 = 0,884 \lambda/b.$$

Pro malé úhly  $\theta$  platí  $\sin\theta = \theta$  a tedy

$$\theta_{3} = 0,884 \lambda/b \text{ [rad]} = 50,7 \lambda/b \text{ [}^\circ\text{]}.$$

## 6. Elektromagnetické vlnění

Tento výsledek udává závislost mezi šířkou svazku  $\theta_3$ , vlnovou délkou  $\lambda$  a velikostí antény (apertury)  $b$ . Podobný výsledek bychom získali pro  $\theta_{x3}$  v rovině  $xz$ .

Pomocí principu ekvivalence lze uvažovat uvnitř obdélníku dokonale magneticky vodivou plochu a podle principu zrcadlení ji odejmout a nahradit zdrojem  $\mathbf{K} = 2\mathbf{n}^0 \times \mathbf{H}$  a tedy pro  $H = 0,5 \text{ A/m}$  bude celkový vyzářený výkon

$$P_T = \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)ab/2 = Z_0 ab/8.$$

Zisk dostaneme jako podíl výkonové hustoty v daném směru (obvykle v maximu) k výkonové hustotě izotropní antény

$$G(\theta) = \frac{\frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)}{\frac{P_T}{4\pi R^2}} = \frac{\frac{Z_0}{2} \left( \frac{\cos \theta}{2\lambda R} ab \frac{\sin u}{u} \right)^2}{\frac{Z_0}{32\pi R^2} ab} = \frac{4\pi ab}{\lambda^2} \left( \frac{\sin u}{u} \cos \theta \right)^2.$$

Použijeme-li vztah pro  $\theta_{x3}$  a  $\theta_{y3}$  dostaneme pro maximální zisk

$$G = \frac{4\pi ab}{\lambda^2} \approx \frac{4\pi 0,884^2}{\theta_{x3}\theta_{y3}} \approx \frac{32\,400}{\theta_{x3}[\text{°}]\theta_{y3}[\text{°}]},$$

*Poznámka:* Pokud nebude rozložení proudu rovnoměrné, změni vztah pro výpočet šířky na

$$\theta_{x3} = K\lambda / b [\text{°}],$$

kde  $K$  se přibližně rovná 50,7 až 70.

Vztah pro zisk by se modifikoval na tvar

$$G = \frac{4\pi ab}{\lambda^2} \eta = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_R \eta \approx \frac{32\,400}{\theta_{x3}[\text{°}]\theta_{y3}[\text{°}]},$$

kde  $\eta$  udává využití apertury a  $S_R$  je plocha apertury. Veličina  $S_{ef} = \eta S_R$  se nazývá efektivní plocha antény.

Zisk se často vyjadřuje v dB (popř. pro zdůraznění, že jako referenční anténu uvažujeme izotropní anténu se píše dBi, neboť je možné uvažovat i zisk k jiným anténám, např. dipólu).

### Příklad 6.10

C

Určete minimální vyzářovaný výkon, jestliže přijatý výkon musí být alespoň 1 nW. Přijímací i vysílací mikrovlnné antény mají zisk 35 dBi, frekvence je 3 GHz a jsou ve vzdálenosti 48 km.

**Řešení:** Výkonová hustota ve vzdálenosti  $R$  od antény se ziskem  $G_T$  podle předchozího příkladu je

$$\frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{P_T G_T(\theta)}{4\pi R^2}.$$

Výkon, který přijímací anténa ve vzdálenosti  $R$  přijímá, bude

$$P_R = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) S_R \eta = \frac{P_T G_T(\theta)}{4\pi R^2} S_R \eta = P_T G_T(\theta) G_R(\theta) \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2,$$

kde  $S_R$  je plocha apertury antény,  $\eta$  udává využití apertury a  $G_R$  je zisk přijímací antény. Je-li zisk antény 35 dBi pak

$$G = 10^{35/10} = 3\,162$$

Vyzářovaný výkon musí být alespoň

$$P_T = \frac{P_R}{G_T G_R} \left( \frac{4\pi R}{\lambda} \right)^2 = 3,6 \text{ mW}.$$

## Příklad 6.11

D

Určete dosahy mikrovlnného zařízení pro přenos dat, je-li vysílaný výkon 7 dBm, přijímací i vysílací mikrovlnné antény mají zisk 13 dBi, útlum v kabelech je  $A = 2$  dB a frekvence je 2,4 GHz. Požadovaný přijímaný výkon je a)  $P_R = -81$  dBm pro 11 Mb/s je a b)  $P_R = -85$  dBm pro 5,5 Mb/s.

**Řešení:** Použijeme vztah z předchozího příkladu, který lze psát (s uvažováním ztrát v kabelech)

$$10 \log P_R = 10 \log \left[ P_T G_T G_R \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 / A \right],$$

$$20 \log R = P_T [\text{dBm}] + G_T [\text{dBi}] + G_R [\text{dBi}] - A [\text{dB}] - P_R [\text{dBm}] + 20 \log \left( \frac{c}{4\pi f} \right),$$

$$R = 10^{(-9,05 - P_R)/20}.$$

Takže minimální dosahy jsou a)  $R = 4$  km a b)  $R = 6,3$  km.

## Příklad 6.12

C

Na letadle se používá anténa pro rušení nepřátelského radaru. Jestliže tato anténa má zisk 12 dB ve směru vysílání, a vysílaný výkon je 5 kW, určete  $E$  v sousedství nepřátelského radaru, který je vzdálený 3 200 m.

**Řešení:** Maximální výkonová hustota ve vzdálenosti  $R$  od antény se ziskem  $G_T$  je

$$\frac{1}{2} |\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)| = \frac{E^2}{2(\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}} = \frac{P_T G_T(\theta)}{4\pi R^2} = \frac{5\,000 \cdot 10^{12}}{4\pi \cdot 3\,200^2} = 0,616 \text{ mW}.$$

Tedy

$$E = \left[ 2(\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2} \frac{P_T G_T(\theta)}{4\pi R^2} \right]^{1/2} = 0,68 \text{ V/m}.$$

## Příklad 6.13

B

Odvoďte radarovou rovnici pro cíl ve vzdálenosti  $R$ .

**Řešení:** Maximální výkonová hustota, dopadající na cíl ve vzdálenosti  $R$  od antény se ziskem  $G_T$  je

$p_i = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2}$ . Pokud předpokládáme, že tento cíl má jakousi efektivní „zachycující“ plochu  $\sigma$  a tento

cíl bude vyzařovat rovnoměrně do všech směrů, zachytí cíl výkon  $p_i \sigma$ , takže odražená výkonová hustota v místě přijímací antény bude  $p_s = p_i \sigma / (4\pi R^2)$ . Bude-li mít přijímací anténa efektivní přijímací plochu  $\eta S_R = G_R \lambda^2 / (4\pi)$ , podle příkladu 6.9, dostaneme pro přijímací výkon  $P_R$  následující radarovou rovnici

$$P_R = \frac{P_T G_T}{(4\pi R^2)^2} \sigma S_R \eta = P_T G_T G_R \sigma \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3 R^4}.$$

V radarech se obvykle používá stejná anténa pro vysílání i příjem a pak se veličina  $\sigma$  nazývá efektivní odrazná plocha (radar cross section RCS). Pro „dostatečně“ vzdálený cíl můžeme odvodit definici

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{p_s}{p_i} = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left| \frac{E_s}{E_i} \right|^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left| \frac{H_s}{H_i} \right|^2.$$

## Příklad 6.14

B

Určete efektivní odraznou plochu pro dokonale vodivou obdélníkovou desku a dlouhý válec.

**Řešení:** Pro desku postupujeme podobně jako v příkladu 6.8. Uvažujme dopadající pole v místě cíle  $\mathbf{H} = H_x \mathbf{x}^0$ , které vzniká vyzařováním vysílací antény, která je v rovině  $yz$  a svírá úhel  $\theta$  s normálou. Protože vlna nedopadá kolmo na desku, mění se fáze na desce jako  $\exp(jky \sin \theta)$ . Pomocí podmínek

## 6. Elektromagnetické vlnění

na rozhraní získáme plošný proud na dokonale vodivé desce  $\mathbf{K} = 2\mathbf{n}^0 \times \mathbf{H} \exp(jky \sin \theta) = 2H_y^0 \exp(jky \sin \theta)$ . Výsledné pole ve velké vzdálenosti (vzdálené zóně) bude

$$E_s = \frac{jk^2 \cos \theta \exp(-jkr)}{4\pi R} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} 2H_i \exp(2jky \sin \theta) dy dx =$$

$$= jZ_0 H_i \frac{\cos \theta \exp(-jkr)}{\lambda R} ab \frac{\sin(kb \sin \theta)}{kb \sin \theta} = Z_0 H_s.$$

Pro  $\sigma$  dostaneme

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left| \frac{H_s}{H_i} \right|^2 = 4\pi \left| j \frac{\cos \theta \exp(-jkr)}{\lambda} ab \frac{\sin(kb \sin \theta)}{kb \sin \theta} \right|^2 = 4\pi \left( \frac{ab}{\lambda} \right)^2 \left| \frac{\sin(kb \sin \theta)}{kb \sin \theta} \cos \theta \right|^2,$$

kde člen v absolutní hodnotě vyjadřuje změnu  $\sigma$  vlivem úhel  $\theta$  a rozměru desky (ve srovnání s obdélníkovou aperturou je tato změna dvakrát rychlejší).

Podobným postupem pro dlouhý válec o délce  $l$  a poloměru  $a$  získáme (na plášti válce je  $dS = a d\varphi dz$ )

$$\sigma = 4\pi \left| \frac{jk^2 \cos \theta \exp(-jkr)}{4\pi\omega\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[j(2kz \sin \theta + 2ka \cos \varphi)] a d\varphi dz \right|^2 = ka l^2 \left| \cos \theta \frac{\sin(kl \sin \theta)}{kl \sin \theta} \right|^2,$$

kde úhel  $\theta$  se měří od normály válce. Přitom pro vyjádření integrálu podle  $\varphi$  se použije princip stacionární fáze, tzn. rozvineme fázi pomocí Taylorovy řady a použijeme pouze kvadratický člen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\gamma x^2) dx = \sqrt{\pi/\gamma} \exp(j\pi/4)$$

*Poznámka:* Analogicky pro kouli o poloměru  $a$  získáme  $\sigma = \pi a^2$ , což dává názornou definici efektivní odrazné plochy cíle jako průmět plochy kovové koule, která by odrážela stejný výkon ve stejném směru. Použitá metoda dává poměrně přesné výsledky pro předměty s rozměry podstatně většími než je vlnová délka vyzařované vlny.

### Příklad 6.15

A

Odvoďte obecné vlastnosti vln na vedení separací proměnných. Pro zjednodušení předpokládejte:

1. Prostředí šíření je homogenní, izotropní, lineární a stacionární.
2. Je nevodivé. To *nevylučuje* kovová vedení, vlny se šíří *podél* kovového vedení.
3. Hustota volných nábojů je nulová. Proto  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ .
4. Vlny se šíří podle přímký v kladném směru osy  $z$ . Žádné vlny se neodráží ve směru  $-z$ .
5. Harmonické vlnění  $\exp(j\omega t)$ .
6. Útlum je nulový, tzn.  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$

**Řešení:** Nehomogenní vlnové rovnice můžeme psát použitím fázorů pro  $\rho_f = 0$  a  $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$  jako

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{J}_f = (\nabla^2 + \omega^2 \epsilon \mu - j\omega \sigma \mu) \mathbf{E} = (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{B} = -\mu \text{rot } \mathbf{J}_f = -\mu \sigma \text{rot } \mathbf{E} = j\omega \mu \sigma \mathbf{B},$$

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{H} = 0.$$

Podél vedení uvažujeme vlny

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp[j(\omega t - k_z z)] = (E_{mx} \mathbf{x}^0 + E_{my} \mathbf{y}^0 + E_{mz} \mathbf{z}^0) \exp[j(\omega t - k_z z)],$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \exp[j(\omega t - k_z z)] = (H_{mx} \mathbf{x}^0 + H_{my} \mathbf{y}^0 + H_{mz} \mathbf{z}^0) \exp[j(\omega t - k_z z)],$$

kde  $E_{mx}$ ,  $E_{my}$ ,  $E_{mz}$  a  $H_{mx}$ ,  $H_{my}$ ,  $H_{mz}$  jsou funkce  $x$  a  $y$ , vlnové číslo  $k_z = 2\pi/\lambda_z$  je reálné, protože předpokládáme nulový útlum,  $\lambda_z$  je vlnová délka na vedení.

## 6. Elektromagnetické vlnění

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  a  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  plyne

$$\frac{\partial E_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial E_{my}}{\partial y} - jk_z E_{mz} = 0, \quad \frac{\partial H_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{my}}{\partial y} - jk_z H_{mz} = 0.$$

$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$  plyne

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{mz}}{\partial y} + jk_z E_{my} &= -j\omega\mu H_{mx}, & -jk_z E_{mx} - \frac{\partial E_{mz}}{\partial x} &= -j\omega\mu H_{my}, \\ \frac{\partial E_{my}}{\partial x} - \frac{\partial E_{mx}}{\partial y} &= -j\omega\mu H_{mz}. \end{aligned}$$

$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$  plyne

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} + jk_z H_{my} &= j\omega\varepsilon E_{mx}, & -jk_z H_{mx} - \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} &= j\omega\varepsilon E_{my}, \\ \frac{\partial H_{my}}{\partial x} - \frac{\partial H_{mx}}{\partial y} &= j\omega\varepsilon E_{mz}. \end{aligned}$$

Pokud  $k_z \neq k$

$$\begin{aligned} E_{mx} &= \frac{j}{k_z^2 - k^2} \left( k_z \frac{\partial E_{mz}}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} \right), & E_{my} &= \frac{j}{k_z^2 - k^2} \left( k_z \frac{\partial E_{mz}}{\partial y} - \omega\mu \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} \right), \\ H_{mx} &= \frac{j}{k_z^2 - k^2} \left( -\omega\varepsilon \frac{\partial E_{mz}}{\partial y} + k_z \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} \right), & H_{my} &= \frac{j}{k_z^2 - k^2} \left( \omega\varepsilon \frac{\partial E_{mz}}{\partial x} + k_z \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Jestliže  $k_z = k$  pak výrazy v závorce musí být nulové. To se splní nejjednodušeji tím, že jak  $E_{mz}$ , tak  $H_{mz}$  jsou nulové.

Použijeme index  $\perp$ , abychom identifikovali složky, které jsou kolmé na směr šíření. Tedy

$$E_{m\perp} = E_{mx}x^0 + E_{my}y^0, \quad H_{m\perp} = H_{mx}x^0 + H_{my}y^0,$$

$$E_{m\perp} = \frac{j}{k_z^2 - k^2} \left[ k_z \operatorname{div}_{\perp} E_{mz} + \omega\mu \operatorname{rot}(H_{mz}z^0) \right],$$

$$H_{m\perp} = \frac{j}{k_z^2 - k^2} \left[ k_z \operatorname{div}_{\perp} H_{mz} + \omega\varepsilon \operatorname{rot}(E_{mz}z^0) \right].$$

Protože podélné složky  $E$  a  $H$  splňují vlnové rovnice, platí

$$\frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial y^2} - k_z^2 E_{mz} + k^2 E_{mz} = 0, \quad (\nabla_{\perp}^2 + k^2 - k_z^2) E_{mz} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{mz}}{\partial y^2} - k_z^2 H_{mz} + k^2 H_{mz} = 0, \quad (\nabla_{\perp}^2 + k^2 - k_z^2) H_{mz} = 0.$$

Pomocí vhodných okrajových podmínek dostaneme hodnotu  $k_z$

Je vhodné uvažovat zvlášť vlny

- a) transverzálně (příčně) elektrické (TE), kdy  $E_{mz} = 0$
- b) transverzálně (příčně) magnetické (TM), kdy  $H_{mz} = 0$
- c) transverzálně (příčně) elektromagnetické (TEM), kdy  $E_{mz} = 0$  a  $H_{mz} = 0$

**TEM vlny**

Případ  $k_z = k$  se splní nejjednodušeji tím, že jak  $E_{mz}$ , tak  $H_{mz}$  jsou nulové, což jsou TEM vlny. Pro TEM je délka vlny na vedení  $\lambda_z$  stejná jako délka vlny ve volném prostředí  $\lambda$ , tzn.

$$\lambda = \lambda_z, \quad k_z = k = \beta = \omega(\varepsilon\mu)^{1/2}, \quad v = \omega / \beta = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$$

## 6. Elektromagnetické vlnění

$$Z_{TEM} = \frac{E_{mx}}{H_{my}} = -\frac{E_{my}}{H_{mx}} = \frac{(E_{mx}^2 + E_{my}^2)^{1/2}}{(H_{mx}^2 + H_{my}^2)^{1/2}} = \frac{E_m}{H_m} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2},$$

kde  $v$  je rychlost šíření (fázová rychlost) a  $Z_{TEM}$  je charakteristická impedance prostředí. Hustoty elektrické a magnetické energie jsou stejné  $\varepsilon E^2/2 = \mu H^2/2$ . Střední hodnota Poyntingova vektoru je

$$\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)/2 = E_m^2/(2Z_{TEM}) \mathbf{z}^0 = E_{ef}^2/Z_{TEM} \mathbf{z}^0 = v\varepsilon E_{ef}^2 \mathbf{z}^0 = v\mu H_{ef}^2 \mathbf{z}^0$$

Uvnitř vodičů s nekonečnou vodivostí platí  $\mathbf{E} = 0$ , neboť jinak by bylo  $\mathbf{J}$  nekonečné. Rovněž  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$  jsou uvnitř vodiče nulové, protože  $\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}$ . Uvažujme libovolnou uzavřenou křivku  $C$ , která leží v rovině kolmé na směr šíření (osu  $z$ ). Protože  $\mathbf{H}$  je kolmé na směr šíření a nulové uvnitř vodiče, je  $H_z=0$  a proto

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \exp[j(\omega t - k_z z)] \oint_C \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = 0$$

a tedy  $\mathbf{E}$  lze odvodit pomocí potenciálu  $\varphi = \varphi_m \exp[j(\omega t - k_z z)]$

$$\mathbf{E} = -\text{div } \varphi = -\text{div } \varphi_m \exp[j(\omega t - k_z z)].$$

Jestliže uvažujeme dutou trubici, je tečná složka  $E$  na jejím povrch nulová a  $\varphi_m$  je konstantní na povrchu trubice a jediné možné řešení je, že uvnitř trubice je  $\varphi_m$  konstantní. Protože je  $\varphi_m$  konstantní uvnitř trubice, je  $E_m$  nulové,  $E=0$  a proto jsou nulové i  $B$  a  $H$ . Proto nemohou existovat uvnitř duté vodivé trubky vlny TEM. To není zcela pravda, protože vlny TEM mohou existovat, když je vlnová délka mnohem menší než průřez. Např. světlo prochází přímou vodivou trubicí. Dále uvidíme, že TEM je limitním případem vlny TE. Naproti tomu jednotlivé vodiče stíněných párů, rovnoběžných vodičů, nebo koaxiálních vedení nemusí mít stejný potenciál, a proto se zde mohou šířit vlny TEM.

Z posledního vztahu plyne, že pro dané  $t$  a  $z$  se  $\mathbf{E}$  mění podle  $x$  a  $y$  přesně stejně jako pro statické pole. To se může s výhodou využít jak pro výpočty, tak pro měření (testování) vedení (např. měření průrazného napětí pro dielektrikum koaxiálního kabelu).

**TE a TM vlny**

Jak pro TE, tak pro TM vlny platí

$$\frac{E_{mx}}{H_{my}} = -\frac{E_{my}}{H_{mx}}$$

Je-li  $k_z$  reálné a kladné, jsou tyto poměry také reálné a kladné. Takže složky  $E_x$  a  $H_y$  jsou ve fázi stejně jako  $E_y$  a  $-H_x$ . Proto jsou reálné složky  $E_{\perp}$  a  $H_{\perp}$  vzájemně kolmé jak pro TE, tak i TM vlny. Poměr  $E_{m\perp}/H_{m\perp}$  se nazývá charakteristická impedance

$$Z_{TE} = \frac{E_{m\perp}}{H_{m\perp}} = \frac{\omega\mu}{k_z} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{\lambda_z}{\lambda}, \quad Z_{TM} = \frac{E_{m\perp}}{H_{m\perp}} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{\lambda}{\lambda_z}.$$

Abychom získali řešení musíme uvažovat příslušné okrajové podmínky, které budou záviset na konkrétním typu vedení.

### Příklad 6.16

**B**

Vyšetřete vlny v obdélníkovém vlnovodu.

**Řešení:** Použijeme výsledky předešlého příkladu. Budeme uvažovat nejjednodušší a nejvíce používané vlnovody s obdélníkovým průřezem. Jsou-li stěny nekonečně vodivé, pak tečné složky  $E_t$  musí být nulové. Bude-li vlnovod podle osy  $z$  nekonečný a je-li průřez vlnovod tvořený stěnami  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$ ,  $y=b$ , lze vlnovod řešit separací proměnných. Platí

$$H_z = M \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-jk_z z),$$

neboť jinak by nemohly být splněny okrajové podmínky, které plynou pro tečné složky  $E$ , tzn.

$$\partial H_{mz}/\partial x = 0 \text{ pro } x=0, x=a \text{ a } \partial H_{mz}/\partial y = 0 \text{ pro } y=0, y=b.$$

Zřejmě  $k_x a = m\pi$  a  $k_y b = n\pi$  a pro složky  $E$  platí

## 6. Elektromagnetické vlnění

$$Z_{TEM} = \frac{E_{mx}}{H_{my}} = -\frac{E_{my}}{H_{mx}} = \frac{(E_{mx}^2 + E_{my}^2)^{1/2}}{(H_{mx}^2 + H_{my}^2)^{1/2}} = \frac{E_m}{H_m} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2},$$

kde  $v$  je rychlost šíření (fázová rychlost) a  $Z_{TEM}$  je charakteristická impedance prostředí. Hustoty elektrické a magnetické energie jsou stejné  $\varepsilon E^2/2 = \mu H^2/2$ . Střední hodnota Poyntingova vektoru je

$$\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)/2 = E_m^2/(2Z_{TEM}) \mathbf{z}^0 = E_{ef}^2/Z_{TEM} \mathbf{z}^0 = v\varepsilon E_{ef}^2 \mathbf{z}^0 = v\mu H_{ef}^2 \mathbf{z}^0$$

Uvnitř vodičů s nekonečnou vodivostí platí  $\mathbf{E} = 0$ , neboť jinak by bylo  $\mathbf{J}$  nekonečné. Rovněž  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$  jsou uvnitř vodiče nulové, protože  $\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}$ . Uvažujme libovolnou uzavřenou křivku  $C$ , která leží v rovině kolmé na směr šíření (osu  $z$ ). Protože  $\mathbf{H}$  je kolmé na směr šíření a nulové uvnitř vodiče, je  $H_z = 0$  a proto

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \exp[j(\omega t - k_z z)] \oint_C \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = 0$$

a tedy  $\mathbf{E}$  lze odvodit pomocí potenciálu  $\varphi = \varphi_m \exp[j(\omega t - k_z z)]$

$$\mathbf{E} = -\text{div } \varphi = -\text{div } \varphi_m \exp[j(\omega t - k_z z)].$$

Jestliže uvažujeme dutou trubici, je tečná složka  $E$  na jejím povrch nulová a  $\varphi_m$  je konstantní na povrchu trubice a jediné možné řešení je, že uvnitř trubice je  $\varphi_m$  konstantní. Protože je  $\varphi_m$  konstantní uvnitř trubice, je  $E_m$  nulové,  $E=0$  a proto jsou nulové i  $B$  a  $H$ . Proto nemohou existovat uvnitř duté vodivé trubky vlny TEM. To není zcela pravda, protože vlny TEM mohou existovat, když je vlnová délka mnohem menší než průřez. Např. světlo prochází přímou vodivou trubicí. Dále uvidíme, že TEM je limitním případem vlny TE. Naproti tomu jednotlivé vodiče stíněných párů, rovnoběžných vodičů, nebo koaxiálních vedení nemusí mít stejný potenciál, a proto se zde mohou šířit vlny TEM.

Z posledního vztahu plyne, že pro dané  $t$  a  $z$  se  $E$  mění podle  $x$  a  $y$  přesně stejně jako pro statické pole. To se může s výhodou využít jak pro výpočty, tak pro měření (testování) vedení (např. měření průrazného napětí pro dielektrikum koaxiálního kabelu).

**TE a TM vlny**

Jak pro TE, tak pro TM vlny platí

$$\frac{E_{mx}}{H_{my}} = -\frac{E_{my}}{H_{mx}}$$

Je-li  $k_z$  reálné a kladné, jsou tyto poměry také reálné a kladné. Takže složky  $E_x$  a  $H_y$  jsou ve fázi stejně jako  $E_y$  a  $-H_x$ . Proto jsou reálné složky  $E_{\perp}$  a  $H_{\perp}$  vzájemně kolmé jak pro TE, tak i TM vlny. Poměr  $E_{m\perp}/H_{m\perp}$  se nazývá charakteristická impedance

$$Z_{TE} = \frac{E_{m\perp}}{H_{m\perp}} = \frac{\omega\mu}{k_z} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{\lambda_z}{\lambda}, \quad Z_{TM} = \frac{E_{m\perp}}{H_{m\perp}} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{\lambda}{\lambda_z}.$$

Abychom získali řešení musíme uvažovat příslušné okrajové podmínky, které budou záviset na konkrétním typu vedení.

### Příklad 6.16

**B**

Vyšetřete vlny v obdélníkovém vlnovodu.

**Řešení:** Použijeme výsledky předešlého příkladu. Budeme uvažovat nejjednodušší a nejvíce používané vlnovody s obdélníkovým průřezem. Jsou-li stěny nekonečně vodivé, pak tečné složky  $E_t$  musí být nulové. Bude-li vlnovod podle osy  $z$  nekonečný a je-li průřez vlnovodu tvořen stěnami  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$ ,  $y=b$ , lze vlnovod řešit separací proměnných. Platí

$$H_z = M \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-jk_z z),$$

neboť jinak by nemohly být splněny okrajové podmínky, které plynou pro tečné složky  $E$ , tzn.

$$\partial H_{mz}/\partial x = 0 \text{ pro } x=0, x=a \text{ a } \partial H_{mz}/\partial y = 0 \text{ pro } y=0, y=b.$$

Zřejmě  $k_x a = m\pi$  a  $k_y b = n\pi$  a pro složky  $E$  platí

## 6. Elektromagnetické vlnění

$$E_x = E_{xm} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \exp(-jk_z z),$$

$$E_y = E_{ym} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-jk_z z),$$

$$E_z = E_{zm} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \exp(-jk_z z).$$

Uvedené vztahy platí jak pro TE, tak i pro TM vlny. Příslušné konstanty  $M$ ,  $E_{xm}$  atd. lze určit pomocí vztahů, uvedených v předešlém příkladu. V případě TE vln je ovšem  $H_z \neq 0$  a  $E_z = 0$  a v případě TM vln platí  $H_z = 0$  a  $E_z \neq 0$ .

Pro konstanty  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  musí platit

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 + k_z^2 = k_c^2 + k_z^2 = k^2,$$

kde  $k_c^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$  je kritické vlnové číslo, které je stejné jak pro vlny TM, tak i pro TE. Ovšem obecně nemají vlny TE a TM stejná kritická vlnová čísla (např. pro kruhový vlnovod). Zatímco vlny TE s jedním nulovým indexem existují, neboť  $H_z$  je nenulové (pro  $n=m=0$  by muselo být  $H_z$  konstantní a proto by nemohly být splněné okrajové podmínky), vlny  $TM_{10}$  s nulovými indexy neexistují, neboť jak  $H_z$ , tak  $E_z$  by byly nulové a to pro vlnovod není možné. Kritická vlnová délka je  $\lambda_c = 2\pi/k_c$ . Pokud je

$$k_z^2 = k^2 - k_c^2$$

nezáporné, je zřejmé, že se vlny šíří ve směru  $z$ . Pokud je  $k_z^2$  záporné (frekvence jsou nižší než frekvence odpovídající kritickému vlnovému číslu), je  $k_z$  imaginární a vlny se velice rychle utlumí, takže se nemohou šířit.

Délka vlny ve vlnovodu

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - (k_c/k)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}.$$

Je zřejmé, že délka vlny ve vlnovodu  $\lambda_z \geq \lambda$ . Pokud  $\lambda_c \gg \lambda$  platí  $\lambda_z = \lambda$ , takže TEM je mezním případem TE.

Fázová rychlost

$$v_p = f\lambda_z$$

je větší než rychlost šíření  $c$  ve volném prostoru, ale šíření energie (skupinová rychlost šíření  $v_s$ ) je menší a platí

$$v_p v_s = c^2.$$

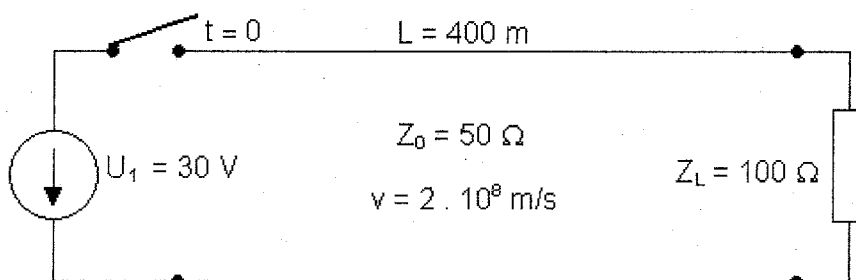
Základním typem pro  $a > b$  jsou vlny  $TE_{10}$  (dominantní vlny), kdy

$$\lambda_z = \frac{\lambda}{\left\{1 - [\lambda/(2a)]^2\right\}^{1/2}}.$$

### Příklad 6.17

C

Vyšetřete vedení, které má celkovou délku  $L = 400$  m, rychlost šíření  $v = 2 \cdot 10^8$  m/s, charakteristickou impedanci  $Z_0 = 50 \Omega$  a připojí se v čase  $t = 0$  k baterii  $U_1 = 30$  V s nulovým vnitřním odporem  $Z_i = 0 \Omega$ . Vedení je zakončené rezistorem  $Z_L = 100 \Omega$ .



**Řešení:** Činitel odrazu zátěže je

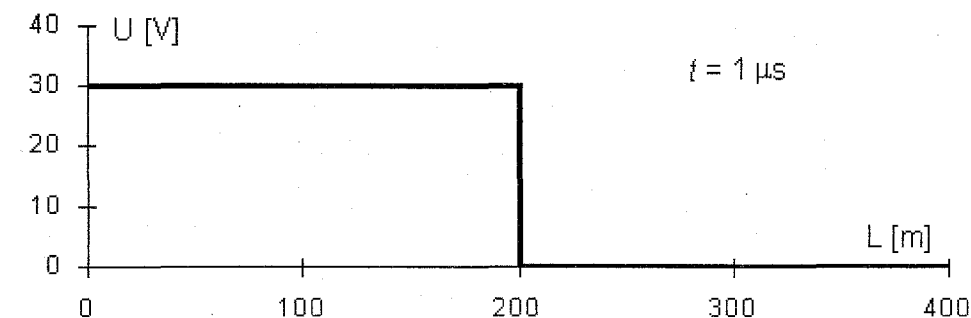
## 6. Elektromagnetické vlnění

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}.$$

Činitel odrazu zdroje

$$\rho_i = \frac{Z_i - Z_0}{Z_i + Z_0} = \frac{0 - 50}{0 + 50} = -1.$$

Doba pro jeden průchod vedením je  $T = L/v = 2 \mu\text{s}$ . V čase  $t = 1 \mu\text{s}$  se impuls dostane do vzdálenosti 200 m, jak je ukázáno na obrázku.



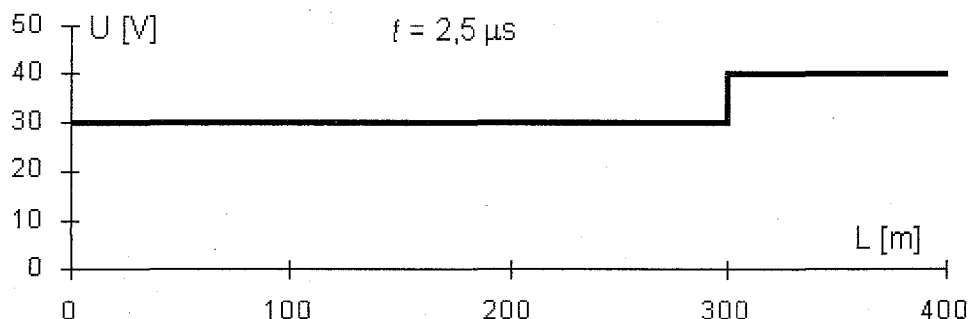
V čase  $t = 2 \mu\text{s}$  se impuls dostane na konec vedení a odrazí se napětí  $U_2 = U_1 \rho_L = 30/3 = 10$  V. V čase  $t = 2,5 \mu\text{s}$  se impuls dostane do vzdálenosti 100 m od konce vedení, jak je ukázáno na obrázku. Tedy výsledné napětí na konci vedení je  $U_1 + U_2 = 30 + 10 = 40$  V.

V čase  $t = 4 \mu\text{s}$  se impuls dostane na počátek vedení a odrazí se napětí  $U_4 = U_1 \rho_i \rho_L = -10$  V. V čase  $t = 4,5 \mu\text{s}$  se impuls dostane do vzdálenosti 100 m od počátku vedení, jak je ukázáno na obrázku. Proto výsledné napětí na počátku vedení je  $40 - 10 = 30$  V. V čase  $t = 6 \mu\text{s}$  se impuls dostane na konec vedení a odrazí se napětí  $U_6 = U_1 \rho_L \rho_i \rho_L = -3,33$  V. V čase  $t = 6,5 \mu\text{s}$  se impuls dostane do vzdálenosti 100 m od konce vedení, jak je ukázáno na obrázku. Proto výsledné napětí na konci vedení je  $30 - 3,33 = 26,67$  V.

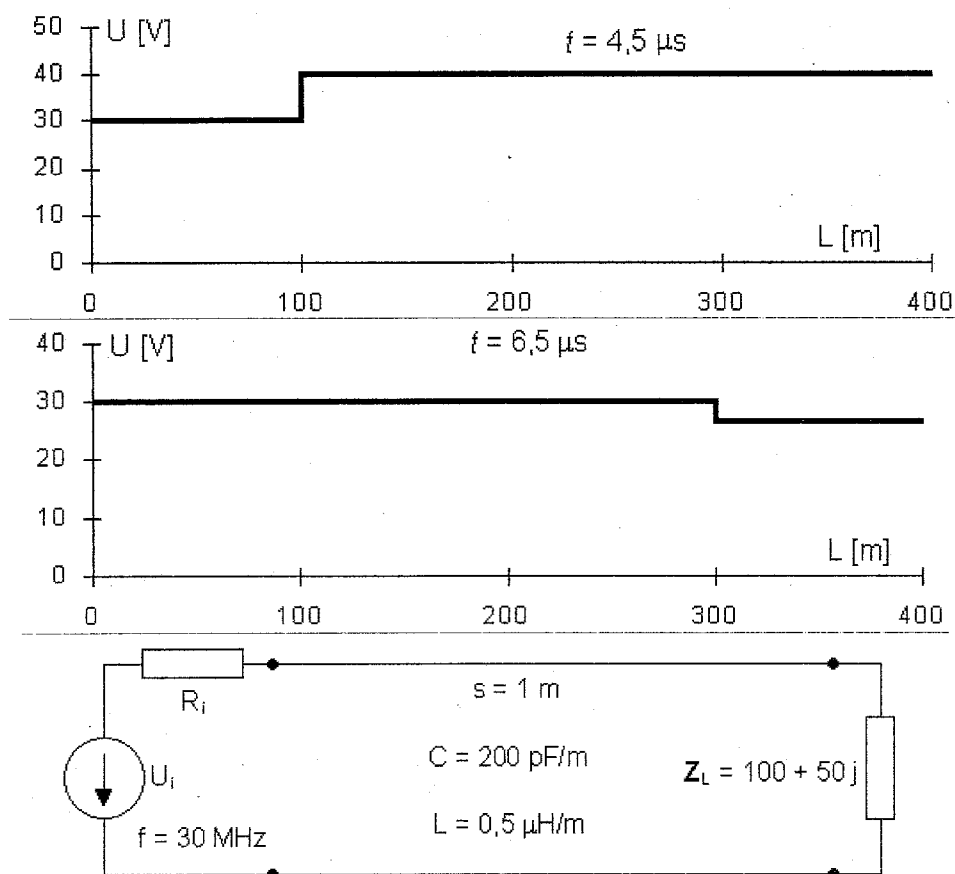
### Příklad 6.18

C

Pro dvou vodičové bezztrátové vedení s parametry  $L = 0,5 \mu\text{H/m}$ ,  $C = 200 \text{ pF/m}$ , napájené generátorem, který má napětí  $U_i = \sin(\omega t)$  V, vnitřní odpor  $R_i = 10 \Omega$  a frekvenci  $f = 30 \text{ MHz}$ , zakončené impedancí  $Z_L = 100 + 50 j \Omega$  pro tuto frekvenci, určete činitel odrazu v místě zátěže  $\rho_L$ . Určete vstupní činitel odrazu, impedanci, proud, napětí a činný výkon (v místě generátoru, který je vzdálený  $s = 1$  m od zátěže).



## 6. Elektromagnetické vlnění



**Řešení:** Charakteristická impedance a rychlost šíření tohoto vedení jsou

$$Z_0 = (L/C)^{1/2} = 50 \, \Omega,$$

$$v = \omega/\beta = (LC)^{-1/2} = 10^8 \, \text{m/s}.$$

Činitel odrazu je

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 + 50j - 50}{100 + 50j + 50} = 0,447 \exp(j0,464).$$

Činitel odrazu ve vzdálenosti 1 m (na vstupu) je

$$\begin{aligned} \rho_L(s) &= \frac{U_z \exp(-j\beta s)}{U_p \exp(j\beta s)} = \rho_L \exp(-j2\beta s) = \rho_L \exp(-j2\omega\sqrt{LC}s) = \\ &= 0,447 \exp(j0,464 - j1,2\pi) = 0,447 \exp(-j3,306). \end{aligned}$$

Vstupní impedance je

$$Z(s) = Z_0 \frac{1 + \rho_L(s)}{1 - \rho_L(s)} = 19,54 \exp(j0,18) \, \Omega.$$

Vstupní napětí  $U(s)$  (napětí v místě  $s$ ) určíme pomocí děliče složeného z  $Z(s)$  a  $Z_i$  a proud se určí pomocí vstupního napětí  $U(s)$  a impedance  $Z(s)$

$$U(s) = U_i \frac{Z(s)}{Z(s) + Z_i} = 0,664 \exp(j0,061) \, \text{V},$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = 34 \exp(-j0,119) \, \text{mA}.$$

Protože vypočítané napětí i proud jsou maximální hodnoty, je činný výkon dodávaný na vstup vedení

$$P = \text{Re}[U(s) \cdot I^*(s)]/2 = 0,664 \cdot 0,034 \cdot \cos(0,061 + 0,119)/2 = 11,1 \, \text{mW}.$$

Protože se předpokládá bezztrátové vedení, je to i výkon na zátěži.

**Příklad 6.19**

C

Určete rychlost šíření a charakteristickou impedanci pro následující vedení: a)  $L = 0,25 \mu \text{ H/m}$ ,  $C = 100 \text{ pF/m}$ ; b) koaxiální kabel  $C = 50 \text{ pF/m}$ ,  $\epsilon_r = 2,1$ ; c) dvou vodičové vedení s poloměrem  $a = 0,16 \text{ mm}$  a vzdáleností mezi středy  $D = 2,54 \text{ mm}$ .

**Řešení:** Pro bezztrátové vedení s TEM vlnou platí obecně  $k_z = k = \beta = \omega (\epsilon \mu)^{1/2}$  a pro rychlost šíření  $v = (\epsilon \mu)^{-1/2} = c (\epsilon_r \mu_r)^{-1/2} = \omega / \beta = (LC)^{-1/2}$ , kde  $c$  je rychlost šíření ve volném prostoru  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  a tedy  $LC = \mu \epsilon$ . Charakteristická impedance a rychlost šíření jsou

$$\text{a) } Z_0 = (L/C)^{1/2} = 50 \Omega,$$

$$v = (LC)^{-1/2} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s};$$

b) Parametry koaxiálního vedení jsou ( $L$  a  $C$  jsou parametry na jednotku délky)

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad C = 2\pi \epsilon / \ln(R_2 / R_1).$$

Povšimněme si, že vztah  $LC = \mu \epsilon$  je splněn.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{C^2}} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{C} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{cC} = 96,7 \Omega,$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} = c \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}} = 2,07 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

c) Parametry dvou vodičového vedení jsou ( $L$  a  $C$  jsou parametry na jednotku délky)

$$L = \mu \ln(D/a) / \pi, \quad C = \pi \epsilon / \ln(D/a).$$

Proto platí  $LC = \mu \epsilon$  a tedy

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{D}{a}\right) = 331,8 \Omega,$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

**Příklad 6.20**

C

Anténa se vstupní impedancí  $72 + j 40 \Omega$  na  $100 \text{ MHz}$  je připojená ke  $100 \text{ MHz}$  generátoru úsekem  $300 \Omega$  vedení o délce  $1,75 \text{ m}$ . Jestliže má generátor napětí  $10 \sin \omega t \text{ V}$  a vnitřní odpor  $50 \Omega$ , určete činný výkon, dodávaný na anténu.

**Řešení:** Činitel odrazu na vstupu antény je

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{300 - 72 - j40}{300 + 72 + j40} = 0,6187 \exp(-j0,281).$$

Činitel odrazu ve vzdálenosti  $s = 1,75 \text{ m}$  (na začátku vedení) pro  $\beta = \omega/c = 2,096$  je

$$\begin{aligned} \rho_L(s) &= \rho_L \exp(-j2\beta s) = \rho_L \exp(-j2s\omega/c) = \\ &= 0,6187 \exp(-j0,281 - j7,335) = 0,6187 \exp(-j7,616). \end{aligned}$$

Vstupní impedance je

$$Z(s) = Z_0 \frac{1 + \rho_L(s)}{1 - \rho_L(s)} = 371,75 \exp(-j1,096) \Omega.$$

## 6. Elektromagnetické vlnění

Vstupní napětí  $U(s)$  (napětí v místě  $s$ ) určíme pomocí děliče složeného z  $Z(s)$  a  $Z_i$  a proud se určí pomocí vstupního napětí  $U(s)$  a impedance  $Z(s)$

$$U(s) = U_i \frac{Z(s)}{Z(s) + Z_i} = 9,36 \exp(-j0,112) \text{ V},$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = 0,025 \exp(-j0,984) \text{ mA}.$$

Protože vypočítané napětí i proud jsou maximální hodnoty, je činný výkon dodávaný na vstup vedení

$$P = \operatorname{Re}[U(s) \cdot I^*(s)]/2 = 9,36 \cdot 0,025 \cdot \cos(-0,112 + 0,984)/2 = 75 \text{ mW}.$$

Protože se předpokládá bezeztrátové vedení, je to i výkon na vstupu antény.

### Příklad 6.21

C

Bezeztrátové vedení s charakteristickou impedancí  $Z_0$  zakončené reálnou impedancí  $R_L$  lze přizpůsobit čtvrtvlnným vedením  $\lambda/4$ . Určete charakteristickou impedanci  $Z_T$  čtvrtvlnného vedení.

**Řešení:** Pro přizpůsobení musí platit  $Z_0 = Z(s)^*$ . Pokud budou charakteristické impedance reálné (což je obvyklý případ), musí pro bezeztrátové čtvrtvlnné vedení ( $\beta s = \pi/2$ ) platit

$$Z(s) = \left[ Z_T \frac{Z_L \cos(j\beta s) + jZ_T \sin(j\beta s)}{Z_T \cos(j\beta s) + jZ_L \sin(j\beta s)} \right] = \left[ \frac{Z_T^2}{Z_L} \right] = Z_0.$$

$$\text{Proto } Z_T = (Z_0 R_L)^{1/2}.$$

### Příklad 6.22

C

Rovinná homogenní vlna dopadá kolmo na plochu dokonalého vodiče (s nekonečnou vodivostí). Jestliže je ve vzdálenosti 1 m od plochy dokonalého vodiče výsledné pole nulové, určete nejnižší možnou frekvenci dopadající vlny.

**Řešení:** Budeme-li uvažovat rozhraní vzduch dokonalý vodič, bude  $Z_I = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}$  a pro dokonalý vodič

$$Z_2 = \left( \frac{2\omega\mu}{\sigma} \right)^{1/2} \frac{(1+j)}{2} = 0.$$

Pro kolmý dopad (pro kolmou polarizaci – pro rovnoběžnou dostaneme stejný výsledek)

$$\left( \frac{E_R}{E_I} \right)_k = \frac{Z_2 \cos \theta_I - Z_1 \cos \theta_T}{Z_2 \cos \theta_I + Z_1 \cos \theta_T} = -1.$$

Výsledné pole bude (dopadající pole se šíří ve směru osy  $z$ )

$$E = E_I [\exp j(\omega t - kz) - \exp j(\omega t + kz)] = E_I \exp j(\omega t) [\exp(-jkz) - \exp(jkz)] = -2j E_I \exp j(\omega t) \sin(kz).$$

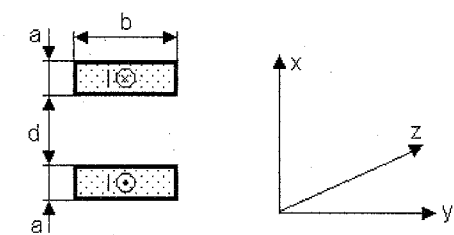
To znamená, že na rozhraní bude výsledné pole nulové a to se bude opakovat pro  $kz = (2\pi/\lambda)z = n\pi$ . Proto výsledné nulové pole bude pro  $z = n\lambda/2$ . Nejnižší frekvence odpovídá  $z = \lambda/2 = 1 \text{ m}$  a tedy  $\lambda = 2 \text{ m}$ . Nejnižší možná frekvence  $f = c/\lambda = c/2 = 150 \text{ MHz}$ .

### Příklad 6.23

B

Vyšetřete pole dvouvodičového vedení pro stálý proud.

## 6. Elektromagnetické vlnění



**Řešení:** Příčné rozměry jsou zvolené tak, aby se snadno počítalo pole. Můžeme uvažovat, že elektrické i magnetické pole mezi vodiči je konstantní a nulové mimo tento prostor

$$E = E_x x^0 = U / d x^0; \quad H = H_y y^0 = I / b y^0.$$

Proto je Poyntingův vektor

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = UI / (bd) \mathbf{z}^0.$$

Z této rovnice je vidět, že energie teče podle vedení ve směru osy  $z$ . Celkový výkon dostaneme integrací uvnitř prostoru mezi

$$P = \iint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_0^b \frac{UI}{bd} dx dz = UI.$$

Poyntingův vektor je umístěn v prostoru mezi vodiči. Takže energie přenášená vedením se šíří volným prostředím a ne ve vodičích. Jsou tedy vodiče vůbec nutné? Vyšetřeme, co se děje ve vodičích. Vlivem konečné vodivosti vodičů existuje ve vodiči pole  $E$

$$E_z = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{ab\sigma}.$$

Stále máme energii, která teče ve směru  $z$ , ale také další složku Poyntingova vektoru  $-E_z H_y$  uvnitř vodiče ve směru osy  $x$ . Integrací pro vodič délky  $l$  dostaneme pro celkový výkon

$$P_L = \iint_V \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^l \int_0^b E_z H_y dy dz = \frac{I}{ab\sigma} \frac{I}{b} lb = I^2 \frac{l}{ab\sigma} = I^2 R,$$

kde  $R$  je odpor materiálu. To je skučně zajímavé, neboť vidíme, že vlivem vodičů se rozptyluje velká část energie (mění se na teplo), takže vodiče mají vysloveně škodlivý účinek na vedení energie. Ovšem vodiče jsou nutné, abychom dostali směr ve kterém se bude energie šířit. Matematicky řečeno, vodiče existují proto, aby vytvářely okrajové podmínky. Takže sice mají užitečnou roli, ale za cenu, že se část energie ztrácí. Tato energie je právě  $I^2 R$  pro každý vodič, což se shoduje s teorií obvodů. To ovšem znamená, že z hlediska šíření energie nepoužívá teorie obvodů naprosto přesné formulace a proto pohled z hlediska teorie obvodů je mnohem jednodušší. Pokud ovšem uvažujeme z hlediska šíření vln, dostaneme mnohem obecnější pohled.

### Příklad 6.24

A

Vyšetřete pole dvouvodičového vedení podle předchozího příkladu pro harmonický průběh.

**Řešení:** V prostoru mezi vodiči se šíří vlna TEM. Elektrické pole  $E$  se mění podle  $x$  a  $y$  přesně stejně jako pro statické pole. Proto  $E$ ,  $H$  a přenášený výkon jsou

$$\mathbf{E} = E_x \exp [j (\omega t - k_z z)] \mathbf{x}^0 = U / d \exp [j (\omega t - k_z z)] \mathbf{x}^0,$$

$$\mathbf{H} = H_y \exp [j (\omega t - k_z z)] \mathbf{y}^0 = I / b \exp [j (\omega t - k_z z)] \mathbf{y}^0$$

$$\text{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) / 2 = E_m^2 / (2Z_{\text{TEM}}) \mathbf{z}^0 = E_{\text{ef}}^2 / Z_{\text{TEM}} \mathbf{z}^0 = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} / (bd)$$

$$P = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}}.$$

Na rozhraní nedokonalého vodiče a dielektrika jsou tečné složky  $H_t = H_y$  spojitě a proto platí těsně pod povrchem

$$E_T = \left( \frac{2\omega\mu}{\sigma} \right)^{1/2} \frac{(1+j)}{2} H_y = \frac{(1+j)}{\sigma\delta} H_y,$$

kde  $\delta$  je hloubka vniku. Do vodiče proniká vlna

$$E_T = E_{Tm} \exp [j(\omega t - x/\delta) - x/\delta].$$

Uvažujeme-li vodič délky  $l$ , je ztrátový výkon

$$P_L = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint E \times H^* \cdot dS = \frac{\sigma}{2} \iiint E_T^2 dV = \frac{\sigma b l}{2} \int_0^a E_{Tm}^2 \exp(-2x/\delta) dx = \frac{\sigma b l \delta}{4} E_{Tm}^2 [1 - \exp(-2a/\delta)].$$

Pokud je  $a \ll \delta$  je  $1 - \exp(-2a/\delta) \approx 2a/\delta$ , pak se zřejmě výrazně nemění ani  $E_{ef}$ , ani  $J_{ef}$ , a platí

$$P_L \approx \frac{\sigma b l \delta}{4} E_{Tm}^2 (2a/\delta) = \sigma a b l E_{ef}^2 = \frac{a b l J_{ef}^2}{\sigma} = I_{ef}^2 \frac{l}{\sigma a b} = I_{ef}^2 R,$$

kde  $R$  je odpor pro stálý proud.

Pokud je  $a \gg \delta$  je  $1 - \exp(-2a/\delta) \approx 1$

$$P_L \approx \frac{\sigma b l \delta}{4} E_{Tm}^2 = \frac{\sigma b l \delta}{2} E_{ef}^2 = \frac{\sigma b l \delta}{2} H_{ef}^2 \left( \frac{2\omega\mu}{\sigma} \right) = \frac{b l}{\sigma \delta} H_{ef}^2 = \frac{l}{\sigma b \delta} I_{ef}^2.$$

To znamená, že ztrátový výkon je stejný, jako by celkový proud  $I_{ef}$  byl rovnoměrně rozložen po průřezu  $b\delta$ , takže by vodič měl odpor  $R = l/(b\delta\sigma)$ . Tato představa názorně vysvětluje název hloubka vniku.

*Poznámka:* Uvedený výpočet je pouze přibližný, neboť jsme zanedbali rozptylové pole (předpokládali jsme rovnoměrné pole mezi vodiči) a vzájemné ovlivňování obou vodičů. Je zřejmé, že přesnost výpočtů se bude zlepšovat pro velmi široké pásy, kdy bude  $b \gg d$  a tedy vliv rozptylového pole bude podstatně menší. Povšimněme si, že pro řešení pole mimo vodiče jsme uvažovali dokonalé vodiče (s nekonečnou vodivostí), což zaručilo, že  $E$  je kolmé na povrch vodiče a uvnitř vodiče je  $E$  nulové (jinak by byla proudová hustota  $J = \sigma E$  nekonečná). Tento přístup je velice využívaný (v předchozích příkladech jsme tak řešili pole obecného vedení a obdélníkového vlnovodu). To ovšem nemůžeme použít pro výpočet ztrát ve vodiči. Takže pro výpočet ztrát sice na začátku uvažujeme dokonalé vodiče, abychom vypočítali pole v prostoru mimo vodiče, ale pak uvažujeme nedokonalý vodič, abychom mohli vypočítat ztráty (uvažujeme rozhraní nedokonalý vodič dielektrikum, kdy tečné složky  $H_t$  jsou spojitě). Obecně nelze přesně určit v kterém okamžiku je možné zaměnit dokonalý vodič za nedokonalý a je nutné volit značnou obezřetnost.

### Příklad 6.25

C

Ukažte, že hloubka vniku  $\delta$  v dobrém vodiči je vždy mnohem menší než vlnová délka  $\lambda$ .

**Řešení:** Pro rovinnou vlnu platí

$$E = E_m \exp j(\omega t - kz),$$

a tedy pro hloubku vniku, kdy amplituda poklesne na  $\exp(-1)$ , v dobrém vodiči ( $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ ) platí

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi},$$

kde  $\lambda$  je vlnová délka ve vodiči. To neplatí pro dielektrikum, které má malé ztráty ( $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$ ), kdy amplituda poklesne na  $\exp(-1)$  ve vzdálenosti mnohem větší než je vlnová délka.

### Příklad 6.26

C

Pro rozhraní vzduch ( $\epsilon_r=1$ ) – křemenné sklo ( $\epsilon_r=2,13$ ) určete úhel, kdy se rovnoběžně polarizovaný paprsek neodráží (tzv. Brewsterův úhel).

**Řešení:** Pro odraz platí

$$\left( \frac{E_R}{E_I} \right)_r = \frac{Z_1 \cos \theta_i - Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} = 0,$$

a tedy pro Brewsterův úhel

## 6. Elektromagnetické vlnění

$$\cos \theta_{IB} = Z_2 \cos \theta_T / Z_1 = \sqrt{\varepsilon_1 / \varepsilon_2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{IR} \varepsilon_1 / \varepsilon_2}$$

$$\theta_{IB} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2,13}{1}} = 55,6^\circ.$$

### Příklad 6.27

C

Určete kritický úhel  $\theta_{lc}$  pro rozhraní dvou dielektrik, jestliže  $n_1 = 1,5$  a  $n_2 = 1$ . Určete  $\theta_T$ ,  $\sin \theta_T$  a  $\cos \theta_T$  pro  $\theta_I = 60^\circ$ .

**Řešení:** Pro kritický úhel platí

$$\theta_{lc} = \arcsin (n_2 / n_1) = 41,8^\circ.$$

Jestliže  $\theta_I = 60^\circ$ , pak

$$\sin \theta_T = n_1 \sin \theta_I / n_2 = 1,299.$$

$$\theta_T = \pi/2 + j \operatorname{arccosh} 1,299 = \pi/2 + j 0,755,$$

$$\cos \theta_T = \cos (\pi/2 + j 0,755) = -j 0,829.$$

### Příklad 6.28

C

Elektromagnetická vlna o vlnové délce  $\lambda_0 = 30$  cm (1 GHz) se šíří v prostředí s relativní permitivitou  $\varepsilon_{r1} = 6,2$  a dopadá pod úhlem  $\theta_I = 1,5 \theta_{lc}$  na rovinné rozhraní s prostředím o permitivitě  $\varepsilon_{r2} = 1,2$ . Určete kritický úhel dopadu  $\theta_{lc}$  a stanovte, v jaké vzdálenosti za rozhraním klesne amplituda procházející vlny na 10 % původní hodnoty.

**Řešení:** Pro totální odraz platí  $\theta_T = 90^\circ$ , tzn.

$$\theta_{lc} = \arcsin (\varepsilon_{r2} / \varepsilon_{r1})^{1/2} = 26,1^\circ.$$

Pro vlnové číslo platí (předpokládáme, že rozhraní je v rovině  $xy$  a osa  $z$  směřuje do prvního prostředí s  $\varepsilon_{r1} = 6,2$ )

$$k_T = \beta_T - j\alpha_T = k_2 (\sin \theta_T x^0 - \cos \theta_T z^0)$$

To znamená, že vlna postupuje ve směru osy  $x$  a tlumí se ve směru osy  $z$ . Pro  $\theta_I = 1,5 \theta_{lc}$  dostaneme

$$\sin \theta_T = n_1 \sin \theta_I / n_2$$

$$-jk_T = j k_2 \cos \theta_T = -k_0 (\varepsilon_{r1} \sin^2 \theta_I - \varepsilon_{r2})^{1/2} = -23,61.$$

Pro amplitudu o velikosti 0,1 původní hodnoty musí platit  $\exp(-23,61 z) = 0,1$  a tedy

$$z = -\ln(0,1) / 23,61 = -0,097 \text{ m}.$$

### Příklad 6.29

C

Elektromagnetická vlna s kolmou polarizací dopadá z prostředí s permitivitou  $\varepsilon_{r1} = 4,2$  pod úhlem  $\theta_I = 1,2 \theta_{lc}$  na rovinné rozhraní s prostředím o permitivitě  $\varepsilon_{r2} = 1,5$ . Určete velikosti a fázové poměry fázorů  $E_R$  a  $E_T$ , je-li  $E_I = 10$  V/m.

**Řešení:** Pro totální odraz platí

$$\theta_{lc} = \arcsin (\varepsilon_{r2} / \varepsilon_{r1})^{1/2} = 36,7^\circ.$$

Pro  $\theta_I = 1,2 \theta_{lc}$  dostaneme

$$\sin \theta_T = n_1 \sin \theta_I / n_2$$

$$\cos \theta_T = j(\varepsilon_{r1} \sin^2 \theta_I / \varepsilon_{r2} - 1)^{1/2} = j(4,2 \sin^2 44,04^\circ / 1,5 - 1)^{1/2} = j 0,59.$$

$$\left( \frac{E_R}{E_I} \right)_k = \frac{Z_2 \cos \theta_I - Z_1 \cos \theta_T}{Z_2 \cos \theta_I + Z_1 \cos \theta_T} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_I - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cos \theta_T}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_I + \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cos \theta_T} = \exp(-j0,91)$$

## 6. Elektromagnetické vlnění

$$\left( \frac{E_T}{E_I} \right)_k = \frac{2Z_2 \cos \theta_I}{Z_2 \cos \theta_I + Z_1 \cos \theta_T} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_I}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_I + \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cos \theta_T} = 1,8 \exp(-j0,46).$$

Fázory  $E_R = 10 \exp(-j0,91)$  a  $E_T = 18 \exp(-j0,46)$ .

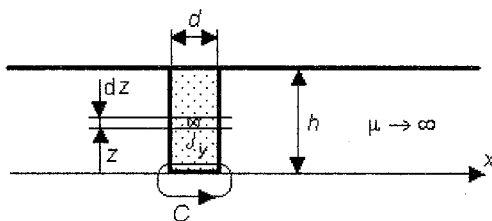
### Příklad 6.30

A

Velmi dlouhý vodič obdélníkového průřezu je uložen v otevřené drážce v rozlehlé desce z magnetického velmi dobře vodivého materiálu ( $\mu \rightarrow \infty$ ). Určete rozložení hustoty proudu po průřezu vodiče pro harmonický průběh proudu, jestliže vodič zcela vyplňuje drážku. Vypočítejte největší a nejmenší hustotu proudu, je-li  $f = 5 \text{ Hz}$ ;  $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$  a  $I = 500 \text{ A}$ . Rozměry drážky jsou  $d = 8 \text{ mm}$  a  $h = 40 \text{ mm}$ .

**Řešení:** Proudová hustota  $J = J_y = \sigma E_y$  závisí pouze na souřadnici  $z$

$$(\nabla^2 + k^2)J_y = \frac{d^2 J_y}{dz^2} + k^2 J_y = \frac{d^2 J_y}{dz^2} - j\mu\sigma\omega J_y = 0.$$



Obecné řešení této rovnice napíšeme ve tvaru

$$J_y = C_1 \exp(jkz) + C_2 \exp(-jkz),$$

kde  $k = (1-j)(\sigma\mu\omega/2)^{1/2} = (1-j)\alpha$ .

Konstanty  $C_1$  a  $C_2$  se určí z okrajových podmínek.

a) Na povrchu drážky ( $z = h$ ) je hustota proudu největší. Proudová vlákna jsou obepínána nejmenším magnetickým tokem

$$J_y(h) = J_{\max} = C_1 \exp(jkh) + C_2 \exp(-kh).$$

b) Na dně drážky ( $z = 0$ ), platí  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$ , protože pro integrační dráhu vedenou po silové čáře, která se dotýká spodního okraje vodiče, neobepíná siločára žádný proud, takže  $H_x(0) = 0$  a proto je i  $B_x(0) = 0$ . Proto platí

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot}(\mathbf{J}/\sigma) = -j\omega\mu\mathbf{H}; \quad \left. \frac{dJ_y}{dz} \right|_{z=0} = 0; \quad C_1 - C_2 = 0;$$

$$C_1 = C_2 = \frac{J_{\max}}{\exp(jkh) + \exp(-jkh)}.$$

$$J_y = J_{\max} \frac{\cos(kz)}{\cos(kh)} = J_{\max} \frac{\cos[(1-j)\alpha z]}{\cos[(1-j)\alpha h]} = J_{\max} \frac{\cosh[(1+j)\alpha z]}{\cosh[(1+j)\alpha h]}.$$

Abychom určili největší a nejmenší hustotu proudu, musíme vyjít z celkového proudu

$$I = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = d \int_0^h \mathbf{J} \cdot d\mathbf{z} = J_{\max} d \int_0^h \frac{\cosh[(1+j)\alpha z]}{\cosh[(1+j)\alpha h]} dz = J_{\max} d h \frac{\text{tgh}[(1+j)\alpha h]}{(1+j)\alpha h},$$

$$\alpha = (\sigma\mu\omega/2)^{1/2} = 33,6 \text{ m}^{-1}, \quad \alpha h = 1,34.$$

$$J_{\max} = 2,62 \cdot 10^6 \exp(0,72j) \text{ A/m}^2.$$

Nejmenší hustota proudu

$$J_y(0) = J_{\max} \frac{1}{\cosh[(1+j)\alpha h]} = 1,5 \cdot 10^6 \exp(-0,59j) \text{ A/m}^2.$$

## Příklad 6.31

A

Určete rozložení hustoty proudu uvnitř válcového vodiče s kruhovým průřezem o poloměru  $a$  pro harmonický průběh proudu.

**Řešení:** Zvolíme válcovou souřadnou soustavu s osou  $z$  totožnou s osou vodiče. Vektory  $\mathbf{J}$  a  $\mathbf{E}$  mají jen směr  $z$  a  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$  jen směr  $\phi$ . Z důvodu symetrie závisí všechny fázory jen na  $r$ . Proto platí pro  $E_z = E$  a  $k^2 = -j\mu\sigma\omega$

$$(\nabla^2 + k^2)E = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + k^2 E = 0.$$

Obecné řešení této rovnice lze získat pomocí Besselových funkcí<sup>17</sup> nultého řádu  $J_0(kr)$  a  $Y_0(kr)$ , které jsou tabulované, popř. je můžeme vypočítat pomocí nekonečných řad či asymptotických rozvoju

$$E = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr),$$

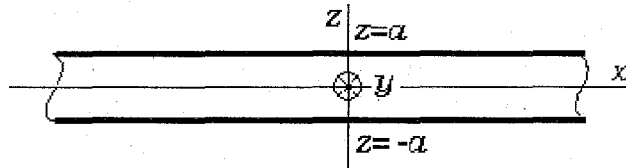
kde konstanty  $C_1$  a  $C_2$  se určí z okrajových podmínek. Abychom pro  $r = 0$  nedostali nekonečné hodnoty, musí být  $C_2$  nulové, neboť  $Y_0(0) \rightarrow -\infty$ . Proto konstantu  $C_1 = C$  dostaneme ze známé hodnoty  $E_p = E(ka) = C J_0(ka)$  na povrchu vodiče a můžeme určit  $E$  a  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

$$E = E_p J_0(kr) / J_0(ka).$$

## Příklad 6.32

A

Vyšetřete vliv vířivých proudů v magnetickém jádru, složeném z tenkých plechů.



**Řešení:** Tenký plech můžeme považovat za široký pás, kdy můžeme vliv okrajů zanedbat a počítat pole, jakoby byl pás nekonečně široký. Uvažujme, že osa cívky je ve směru osy  $y$ .

Lze předpokládat, že vektor  $\mathbf{B}$  má pouze směr  $y$  (magnetický povrchový jev). Pak je jen funkcí  $z$  a tedy z důvodů symetrie platí  $B_p = \mu H_p = B(a) = B(-a)$ ,  $B(z) = B(-z)$

$$B(z) = C [\exp(jkz) + \exp(-jkz)] = B_p \cosh(jkz) / \cosh(jka).$$

Pro dobrý vodič platí  $\sigma \gg \epsilon\omega$  a proto

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_x \mathbf{x}^0 = -\sigma (dH/dz) / (\sigma + j\epsilon\omega) \mathbf{x}^0 \approx [-jkH_p \sinh(jkz) / \cosh(jka)] \mathbf{x}^0.$$

Fázor celkového toku  $\Phi$  na 1 m šířky pásu

$$\Phi = \int_{-a}^a B(z) dz = \frac{2B_p}{jk} \tanh jka.$$

Bez povrchového jevu by byl tento tok

$$\Phi_0 = 2aB_0$$

Vířivé proudy tedy způsobí stejný efekt, jakoby se změnila permeabilita na

$$\mu_k = \mu \frac{\tanh jka}{jka} = \mu' - j\mu''.$$

Veličina  $\mu_k$  se nazývá komplexní permeabilita. Pokud je bez povrchového jevu indukčnost  $L_0$ , pak reaktance cívky se změní na

$$j\omega L = j\omega L_0 \frac{\tanh jka}{jka} = R + j\omega L_1.$$

Odpor  $R$  se s frekvencí zvětšuje a indukčnost  $L$  se zmenšuje.

## 6. Elektromagnetické vlnění

Ztráty vířivými proudy získáme integrací  $J^2 / (2\sigma)$  po objemu  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 2a$ , neboť  $J$  není efektivní, ale maximální hodnota a pro výkon tedy musíme uvažovat poloviční hodnotu. Platí

$$k \approx \left( \frac{\sigma \mu \omega}{2} \right)^{1/2} (1-j) = (1-j) / \delta = (1-j) \alpha,$$

kde  $\delta$  je hloubka vniku tj. převrácená hodnota  $\alpha$ .

$$4|\sinh(jkz)|^2 = |\exp[(1+j)\alpha z] - \exp[-(1+j)\alpha z]|^2 = 2[\cosh(2\alpha z) - \cos(2\alpha z)],$$

$$4|\cosh(jka)|^2 = |\exp[(1+j)\alpha a] + \exp[-(1+j)\alpha a]|^2 = 2[\cosh(2\alpha a) + \cos(2\alpha a)],$$

$$P = \int_{-a}^a \frac{J^2}{2\sigma} dz = k^2 \frac{H_p^2}{2\sigma} \int_{-a}^a \frac{\cosh(2\alpha z) - \cos(2\alpha z)}{\cosh(2\alpha a) + \cos(2\alpha a)} dz = \frac{\alpha H_p^2}{2\sigma} \frac{\sinh(2\alpha a) - \sin(2\alpha a)}{\cosh(2\alpha a) + \cos(2\alpha a)}.$$

Tyto výrazy lze upravit pro malé  $\alpha a$ , kdy zlomek (po rozvinutí goniometrických a hyperbolických funkcí do mocninné řady a zanedbání mocnin vyšších než 3) se blíží hodnotě  $(2\alpha a)^3/3$  a tedy

$$P = \frac{\alpha H_p^2}{2\sigma} \frac{(2\alpha a)^3}{3} = \frac{\sigma (H_p \mu \omega)^2 a^3}{3}.$$

Ztráty lze zřejmě snížit zmenšením vodivosti  $\sigma$ ,  $B_p$ ,  $f$  a tloušťky plechů  $2a$ . To není nijak překvapivé, neboť tento princip se využívá běžně v praxi. Např. pro snížení ztrát se používají tenké transformátorové plechy, které se vyrábí ze železa, do kterého se přidává křemík pro snížení vodivosti  $\sigma$ , popř. (zejména pro vyšší frekvence, kdy ztráty značně rostou) se používají ferity, které mají o několik řádů menší vodivost  $\sigma$  než feromagnetické materiály. Při výpočtech jsme nepřehlíželi k hysterezním ztrátám a předpokládali jsme, že permeabilita  $\mu$  je konstantní.

### Příklad 6.33

S

Metodou sítí vyšetřete povrchový jev velmi dlouhého železného vodiče, který je umístěn ve vzduchu, má čtvercový průřez (strana čtverce  $2a = 4 \text{ mm}$ ), permeabilitu  $\mu = 100 \mu_0 \text{ H/m}$  (neuvažujte změny permeability při změně  $B$ ), měrnou vodivost  $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$  a vede sinusový proud  $16 \text{ A}$  o kmitočtu  $50 \text{ Hz}$ .

**Řešení:** Pro harmonické průběhy platí

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \partial \mathbf{A} / \partial t - \sigma \text{grad } \varphi = -j\omega \sigma \mathbf{A} - \sigma \text{grad } \varphi,$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } (\mu^{-1} \mathbf{B}) = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t = \sigma \mathbf{E} + j\omega \varepsilon \mathbf{E} = -j\omega \sigma \mathbf{A} - \sigma \text{grad } \varphi + j\omega \varepsilon \mathbf{E}.$$

V dobrém vodiči je  $\sigma / \omega \varepsilon \gg 1$  (tvrzení o dobrém vodiči, nebo dobrém dielektriku závisí zřejmě na frekvenci). Pro nízké frekvence můžeme pro vodiče člen  $j\omega \varepsilon \mathbf{E}$  zanedbat a proto

$$\text{rot } (\mu^{-1} \mathbf{B}) = \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}) = \mu^{-1} (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}) = -j\omega \sigma \mathbf{A} - \sigma \text{grad } \varphi.$$

Pro statická pole (a přibližně i pro nízké frekvence) platí  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , takže

$$-\mu^{-1} \nabla^2 \mathbf{A} = -j\omega \sigma \mathbf{A} - \sigma \text{grad } \varphi = -j\omega \sigma \mathbf{A} + \mathbf{J}_0,$$

kde jsem položili  $\mathbf{J}_0 = -\sigma \text{grad } \varphi$ . Pro dvojrozměrné úlohy budou mít  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{J}_0$  pouze jedinou složku

$$-\mu^{-1} \nabla^2 A = -j\omega \sigma A + J_0.$$

Při použití metody sítí postupujeme stejně jako v příkladu 3.16, ale objeví se další člen  $-j\omega \sigma \mu A$ . Při rovnoměrné síti s rozměry  $h \times h$  máme pro bod v homogenním prostředí

$$-h^{-2} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0) = -j\omega \sigma \mu A_0 + \mu J_{00},$$

$$(4h^{-2} + j\omega \sigma \mu) A_0 = -h^{-2} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \mu J_{00}$$

Členy  $4h^{-2} + j\omega \sigma \mu$  si musí odpovídat, abychom mohli povrchový jev touto metodou vyšetřovat. Protože při změně vzdálenosti  $x$  bude  $A$  exponenciálně klesat s  $x/\delta$ , kde hloubka vniku  $\delta = (\omega \sigma \mu / 2)^{-1/2}$ , bude obvykle postačovat volba  $h \approx \delta/5$ . Pokud nepoužijeme dostatečně malé  $h$ , budeme místo

## 6. Elektromagnetické vlnění

komplexního problému řešit reálný (tzn. statický) problém, takže nezaznamenáme povrchový jev. V tomto případě platí  $\delta = (\omega\sigma\mu/2)^{-1/2} = 0,0023 \text{ m}$  a proto zvolíme  $h = 0,5 \text{ mm}$ .

Pokud nebude prostředí homogenní, budeme uvažovat „průměrné“ prostředí. Např. pro dvě prostředí s  $\mu_1$  a  $\mu_2$  budeme místo  $1/\mu$  uvažovat  $(1/\mu_1 + 1/\mu_2)/2$ . Podobně si můžeme představit, že  $J$  bude rozdílná v jednotlivých buňkách, takže budeme uvažovat hustoty proudu  $J_1, J_2, J_3, J_4$  a tedy výsledná rovnice (obecně pro rozdílné permeability a rozměry sítě  $h, k$ ) bude

$$\frac{A_0 - A_1}{\frac{2\mu_1\mu_4h^2}{\mu_1 + \mu_4}} + \frac{A_0 - A_2}{\frac{2\mu_1\mu_2k^2}{\mu_1 + \mu_2}} + \frac{A_0 - A_3}{\frac{2\mu_2\mu_3h^2}{\mu_2 + \mu_3}} + \frac{A_0 - A_4}{\frac{2\mu_3\mu_4k^2}{\mu_3 + \mu_4}} = \frac{J_1}{4} + \frac{J_2}{4} + \frac{J_3}{4} + \frac{J_4}{4} - j\omega\sigma A$$

kde neznámé vektorové potenciály jsou nyní komplexní čísla.

V „dostatečné vzdálenosti“ (zvolíme 4 mm od vodiče) bude  $A$  zanedbatelné. Nemusíme uvažovat celý prostor, ale zvolíme pouze jednu čtvrtinu (např. horní pravý roh). Tento roh má rozměr 6 x 6 mm, takže zvolíme  $h = k = 0,5 \text{ mm}$  a použijeme tabulku se 13 x 13 buňkami (každá buňka odpovídá uzlu s potenciálem  $A_i$ ). Protože se vyskytuje pouze prostředí s  $\mu$  a  $\mu_0$ , budou se vyskytovat pouze tři varianty  $\mu_m = 2\mu_0(100.1)/(100+1) = 2\mu_0/1,01$ ;  $\mu = 100\mu_0$ ;  $\mu_0$ . Lze identifikovat celkem 10 typů bodů a příslušně modifikovat výslednou rovnici. Je zřejmé, že musíme uvažovat reálnou a imaginární část  $A_r + j A_i$  a proto použijeme dvě vzájemně provázané tabulky (A1 až M13 a A15 až M27). Např. pro roh vodiče (buňka E9 pro  $A_r$  a E23 pro  $A_i$ ) dostaneme (pro  $h=k$ )

$$\frac{A_0 - A_1}{\mu_0 h^2} + \frac{A_0 - A_2}{\mu_0 h^2} + \frac{A_0 - A_3}{\mu_1 h^2} + \frac{A_0 - A_4}{\mu_1 h^2} = \frac{J}{4} - j\omega\sigma A_0.$$

$$A_0 = [A_1 + A_2 + 0,505(A_3 + A_4) + J\mu_0 h^2 / 4] / (1 + 1 + 0,505 + 0,505 + j\omega\sigma\mu_0 h^2),$$

$$A_0 = \frac{[A_1 + A_2 + 0,505(A_3 + A_4) + J\mu_0 h^2 / 4]}{(1 + 1 + 0,505 + 0,505)^2 + (\omega\sigma\mu_0 h^2)^2} (1 + 1 + 0,505 + 0,505 - j\omega\sigma\mu_0 h^2).$$

Do buňky O1 uložíme hodnotu  $J\mu_0 h^2 / 4 = 7,85398 \cdot 10^{-08}$  a do O2 hodnotu  $\omega\sigma\mu_0 h^2 = 0,00098696$ . Uvážíme-li, že  $A$  jsou komplexní čísla dostaneme pro buňku E9 (reálnou část  $A$ )  $= ((\$O\$1 + F9 + E8 + 0.505 * (D9 + E10)) * \$O\$2) / (3.01 + \$O\$2)^2$  a pro buňku E23 (imaginární část  $A$ )

$$= ((F23 + E22 + 0.505 * (D23 + E24)) * 3.01 - (\$O\$1 + F9 + E8 + 0.505 * (D9 + E10)) * \$O\$2) / (3.01 + \$O\$2)^2.$$

Ostatní typy by se odvodily podobně. Potenciál  $A$  bude zřejmě symetrický podle os  $x$  a  $y$ . Z důvodu symetrie proto budou pro body A1 až A13 a B13 až M13 nulové normálové derivace potenciálu  $A$ . V dostatečné vzdálenosti bude  $A = 0$  a proto v buňkách A1 až M1 a M2 až M13 bude 0. Potenciál se vypočte iterací jako při řešení úloh v elektrostatice. Pro přehlednost jsou všechny hodnoty vektorového potenciálu  $A$  násobeny  $10^9$ .

|    | A     | B     | C     | D     | E   | F   | G   | H   | I   | J   | K   | L  | M |
|----|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|---|
| 1  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0  | 0 |
| 2  | 77    | 76    | 74    | 70    | 65  | 58  | 51  | 43  | 35  | 26  | 17  | 9  | 0 |
| 3  | 156   | 154   | 149   | 141   | 130 | 117 | 102 | 86  | 69  | 52  | 35  | 17 | 0 |
| 4  | 238   | 236   | 228   | 215   | 198 | 177 | 154 | 130 | 104 | 78  | 52  | 26 | 0 |
| 5  | 326   | 322   | 311   | 293   | 269 | 240 | 209 | 175 | 140 | 105 | 70  | 35 | 0 |
| 6  | 420   | 416   | 402   | 378   | 345 | 307 | 264 | 220 | 176 | 131 | 87  | 44 | 0 |
| 7  | 522   | 519   | 503   | 471   | 427 | 376 | 322 | 267 | 212 | 158 | 104 | 52 | 0 |
| 8  | 630   | 637   | 620   | 577   | 516 | 450 | 381 | 313 | 247 | 183 | 121 | 60 | 0 |
| 9  | 723   | 778   | 762   | 700   | 610 | 525 | 439 | 357 | 279 | 206 | 135 | 67 | 0 |
| 10 | 11160 | 10812 | 9556  | 6745  | 724 | 601 | 493 | 397 | 308 | 226 | 148 | 73 | 0 |
| 11 | 16860 | 16237 | 14103 | 9577  | 808 | 661 | 537 | 428 | 331 | 242 | 158 | 78 | 0 |
| 12 | 19649 | 18872 | 16252 | 10855 | 859 | 699 | 565 | 448 | 345 | 251 | 164 | 81 | 0 |
| 13 | 20481 | 19655 | 16883 | 11223 | 875 | 712 | 574 | 455 | 350 | 255 | 166 | 82 | 0 |

## 6. Elektromagnetické vlnění

|    | A     | B     | C     | D     | E   | F   | G   | H   | I   | J   | K   | L  | M |
|----|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|---|
| 15 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0  | 0 |
| 16 | -9    | -9    | -8    | -8    | -7  | -6  | -6  | -5  | -4  | -3  | -2  | -1 | 0 |
| 17 | -18   | -18   | -17   | -16   | -14 | -13 | -11 | -9  | -7  | -6  | -4  | -2 | 0 |
| 18 | -27   | -27   | -26   | -24   | -22 | -19 | -17 | -14 | -11 | -8  | -6  | -3 | 0 |
| 19 | -38   | -37   | -35   | -33   | -30 | -26 | -22 | -19 | -15 | -11 | -7  | -4 | 0 |
| 20 | -49   | -48   | -46   | -42   | -38 | -33 | -28 | -23 | -18 | -14 | -9  | -5 | 0 |
| 21 | -62   | -61   | -58   | -53   | -46 | -40 | -34 | -28 | -22 | -16 | -11 | -5 | 0 |
| 22 | -75   | -76   | -73   | -64   | -54 | -47 | -39 | -32 | -25 | -19 | -12 | -6 | 0 |
| 23 | -86   | -97   | -91   | -77   | -61 | -53 | -45 | -36 | -29 | -21 | -14 | -7 | 0 |
| 24 | -2097 | -1979 | -1610 | -968  | -70 | -60 | -50 | -40 | -31 | -23 | -15 | -8 | 0 |
| 25 | -3599 | -3385 | -2728 | -1608 | -81 | -67 | -54 | -44 | -34 | -25 | -16 | -8 | 0 |
| 26 | -4494 | -4220 | -3386 | -1979 | -89 | -72 | -58 | -46 | -35 | -26 | -17 | -8 | 0 |
| 27 | -4789 | -4495 | -3601 | -2100 | -91 | -73 | -59 | -46 | -36 | -26 | -17 | -8 | 0 |

### Příklad 6.34

S

Na začátek koaxiálního kabelu o délce 200 m s parametry  $R = 1,7 \, \Omega/\text{m}$ ,  $G = 7 \, \text{mS/m}$ ,  $L = 250 \, \text{nH/m}$ ,  $C = 100 \, \text{pF/m}$ , zakončeného dokonale přizpůsobeným odporem, se posílají obdélníkové impulsy s průběhem  $U = 5 \, \text{V}$  pro  $-\tau/2 + kT_0 < t < \tau/2 + kT_0$  a  $U = 0 \, \text{V}$  pro  $\tau/2 + kT_0 < t < (k+1)T_0 - \tau/2$ , kde  $T_0 = 1 \, 000 \, \text{ns}$  a  $\tau = 100 \, \text{ns}$ . Vyšetřete šíření těchto impulsů.

**Řešení:** Pro přizpůsobené vedení platí

$$U = U_p \exp(-\gamma x),$$

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left[ (RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right],$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left[ -(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right].$$

Vstupní napětí rozvineme v řadu pro  $T_0 = 10^{-6} \, \text{s}$ ,  $\tau = 10^{-7} \, \text{s}$

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{\tau/2}^{\tau/2} 5 \cos(2\pi n t / T_0) dt = \frac{5 \sin(\pi n \tau / T_0)}{\pi n} \quad \text{pro } n \neq 0$$

$$c_0 = 5\tau / T_0$$

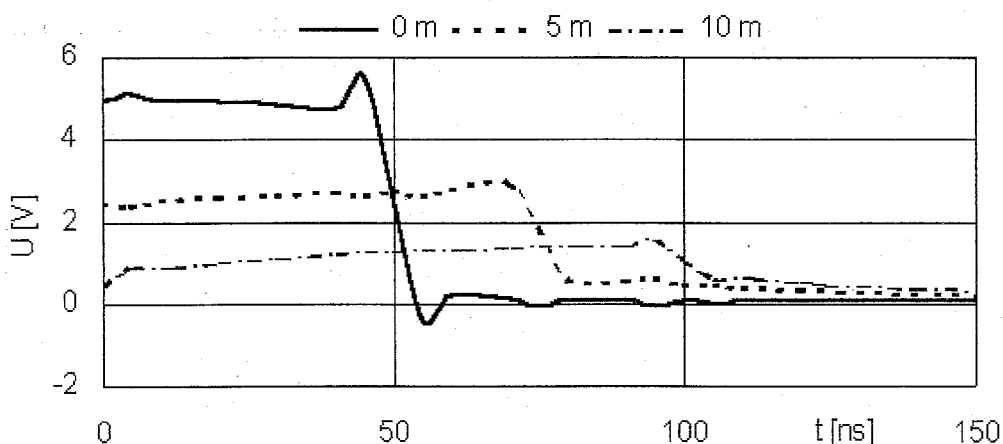
Ve vzdálenosti  $x$  pro složku  $n$  (která se určí pro jako součet složek s frekvencemi  $-n\omega_0$  a  $n\omega_0$ ) bude (pro záporné frekvence je nutné volit opačně i zpoždění  $\gamma_n x$ )

$$\begin{aligned} U_n(x, t) &= \frac{5 \sin(\pi n \tau / T_0)}{\pi n} \text{Im}[\exp(j2\pi n t / T_0 - \gamma_n x) + \exp(-j2\pi n t / T_0 + \gamma_n x)] = \\ &= \frac{5 \sin(\pi n \tau / T_0)}{\pi n} \text{Im}[\{\exp(j2\pi n t / T_0 + j\pi/2 - \gamma_n x) - \exp(-j2\pi n t / T_0 - j\pi/2 + \gamma_n x)\} / j] \\ &= \frac{10 \sin(\pi n \tau / T_0)}{\pi n} \exp(-\alpha_n x) \sin(2\pi n t / T_0 + \pi/2 - \beta_n x) \end{aligned}$$

a proto

$$U_n(x, t) = 5\tau \exp(-\alpha_0 x) / T_0 + 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n \tau / T_0)}{\pi n} \exp(-\alpha_n x) \sin(2\pi n t / T_0 + \pi/2 - \beta_n x).$$

## 6. Elektromagnetické vlnění



Tento vztah lze numericky vypočítat a zobrazit pro dané hodnoty např. pomocí tabulkového procesoru. Samozřejmě není možné použít nekonečný počet členů. Při použití 100 členů dostaneme časové průběhy pro vzdálenosti 0 m; 5 m a 10 m. Použitý počet členů bude ovšem ovlivňovat detailní průběh (zvlnění), zejména v oblasti prudkých změn napětí (např. pro 0 m v okolí  $t = 50$  ns). Je zřejmé, že při zvětšování vzdálenosti se zvětšuje jak útlum (např. impuls o velikosti 5 V má ve vzdálenosti 10 m velikost zhruba 1,5 V), tak i zkreslení impulsu (např. pokles napětí na konci impulsu není tak strmý, jak plyne ze srovnání průběhů pro vzdálenost 0 m a  $t=50$  ns a pro vzdálenost 10 m a  $t=100$  ns).

### Příklad 6.35

A

Nalezněte řešení vlnové rovnice pomocí separace proměnných pro válcové a kulové souřadnice.

**Řešení:** Pro řešení vlnové rovnice ve válcových souřadnicích dostaneme

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0$$

Pro řešení separací proměnných zvolíme funkci  $f = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ , která je součinem tří funkcí vždy pouze jedné souřadnice. Z vlnové rovnice dostaneme

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 Z}{Z \partial z^2} + k^2 = 0$$

Třetí člen nezávisí na  $\rho$  a  $\phi$ . Proto

$$\frac{\partial^2 Z}{Z \partial z^2} = -k_z^2 \quad \text{a} \quad \frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + (k - k_z^2) \rho^2 = 0$$

Druhý člen nezávisí na  $\rho$  a za další členy nezávisí na  $\phi$ . Tedy  $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -n^2$ , kde  $n$  je konstanta.

Takže z předchozí rovnice dostaneme rovnici, která závisí pouze na  $\rho$

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) - n^2 + (k - k_z^2) \rho^2 = 0.$$

Tato rovnice už je separovaná a zvolíme-li  $k^2 = k_\rho^2 + k_z^2$ , dostaneme

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + [(k_\rho \rho)^2 - n^2] R = 0.$$

Tato rovnice je Besselova rovnice  $n$ -tého řádu [17], která má obecně řešení dané Besselovou funkcí prvního druhu  $J_n(k_\rho \rho)$ , Besselovou funkcí druhého druhu  $Y_n(k_\rho \rho)$ , Hankelovou funkcí prvního druhu  $H_n^{(1)}(k_\rho \rho)$  a Hankelovou funkcí druhého druhu  $H_n^{(2)}(k_\rho \rho)$ . Libovolné dvě funkce jsou lineárně nezávislá řešení. Řešení rovnic  $\Phi$  a  $R$  jsou harmonické funkce. Výsledné řešení je dáno součinem těchto tří funkcí (Besselových a harmonických) a podle konkrétní úlohy volíme příslušnou lineární

## 6. Elektromagnetické vlnění

kombinací. Např. pro úlohy, kde se zajímáme o vlny pro  $\rho \rightarrow 0$ , nepoužijeme  $Y_0(0)$ , neboť  $Y_0(0) \rightarrow -\infty$ . Naopak pro vlny, které se šíří ve směru od válce (a chování uvnitř válce nás nezajímá – např. pro měření v blízké zóně na válcové ploše) použijeme  $H_n^{(2)}(k_\rho \rho)$ , neboť pro velké vzdálenosti  $\rho \rightarrow \infty$  platí

$$H_n^{(2)}(x) = [2/(\pi x)]^{1/2} \exp\{-j[x - (n+1/2)\pi/2]\}$$

a tedy se tato funkce kvalitativně chová jako rovinná vlna se závislostí  $\exp(-jk_\rho \rho)$ .

Podobně bychom řešili vlnovou rovnici v kulových souřadnicích

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + k^2 f = 0$$

Separací proměnných  $f=R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$ , po dělení  $f$  a násobení  $r^2 \sin^2 \theta$  dostaneme

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{H} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0.$$

Položíme  $(d^2 \Phi / d\phi^2) / \Phi = -m^2$ , která má řešení ve tvaru lineární kombinace  $\sin(m\phi)$  a  $\cos(m\phi)$ , nebo  $\exp(m\phi)$  a  $\exp(-m\phi)$ , kde  $m$  je celé číslo. Dělíme-li  $\sin^2 \theta$ , oddělíme závislost na  $r$  a  $\theta$ . Speciální volbou konstanty  $l = n(n+1)$  dostaneme po úpravě

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] H = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [(kr)^2 - n(n+1)] R = 0.$$

Vlastnosti funkce  $H$  závisí na tom, zda  $n$  je nebo není celé. Řešení jsou obecně přidružené Legendreovy funkce  $L_n^m(\cos \theta)$  a podle daného problému volíme funkce prvního druhu  $P_n^m(\cos \theta)$  či druhého druhu  $Q_n^m(\cos \theta)$ . Aby tato řešení neměla singularitu pro  $\theta = 0$ , nebo  $\theta = \pi$ , je nutné volit  $P_n^m(\cos \theta)$ , kde  $n$  je celé. Řešení rovnice pro závislost na  $r$  je dáno sférickými Besselovými funkcemi

$b_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} B_{n+1/2}(kr)$ , kde  $B_{n+1/2}(x)$  je libovolná Besselova rovnice  $n+1/2$  tého řádu např.  $J_{n+1/2}(x)$ .

Chování těchto funkcí je kvalitativně podobné obdobným Besselovým funkcím. Navíc  $j_0(x) = \sin x / x$ ,  $y_n(x) = -\cos x / x$  a  $h_n^{(2)}(x) = j \exp(-jx) / x$ .

### Příklad 6.36

A

Určete rozptyl vln na dokonale vodivém válci o poloměru  $a$  pro složku  $E$  rovnoběžnou s osou válce.

**Řešení:** Pro dopad rovinné vlny můžeme uvažovat pouze dvojrozměrný případ (podle předchozího příkladu uvažujeme  $k_z = 0$ ). Zvolíme osu  $z$  ve směru osy válce. Vlna dopadá ve směru osy  $x$ . Dopadající vlna bude

$$E_z^i = E_0 \exp(-jkx) = E_0 \exp(-jk\rho \cos \phi) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k\rho) \exp(jn\phi)$$

kde  $x = \rho \cos \phi$  je vyjádřeno ve válcových souřadnicích. Poslední vztah plyne z rozvoje exponenciální funkce do Besselových funkcí [17].

Úplné řešení je dáno součtem dopadajícího a rozptylového pole. Rozptylové pole musí být ve tvaru

$$E_z^s = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} a_n H_n^{(2)}(k\rho) \exp(jn\phi).$$

Protože na válci je výsledné pole nulové, tzn.  $E_z = E_z^i + E_z^s = 0$ , musí platit

$$E_{\rho=a} = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(ka) \exp(jn\phi) + E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} a_n H_n^{(2)}(ka) \exp(jn\phi) = 0$$

## 6. Elektromagnetické vlnění

a tedy  $a_n = -J_n(ka)/H_n^{(2)}(ka)$ . Uvedené řešení je sice v principu možné použít pro válec s libovolným poloměrem, ale pokud bude  $ka \gg 1$ , bude toto řešení konvergovat velmi pomalu a při numerickém výpočtu (např. pomocí tabulkového procesoru, který zpravidla má Besselovy funkce) bude tato metoda selhávat vlivem zaokrouhlovacích chyb. Pro pole  $E$  polarizované kolmo na osu  $z$  bychom použili  $H_z$  a postupovali analogicky.

**Poznámka:** Rozptyl pro dokonale vodivou kouli bychom řešili podobně poměrně komplikovanými úpravami (viz např. [24]) s využitím předchozího příkladu a rozkladu

$$\exp(jx) = \exp(jr \cos \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(r) P_n(\cos \theta).$$

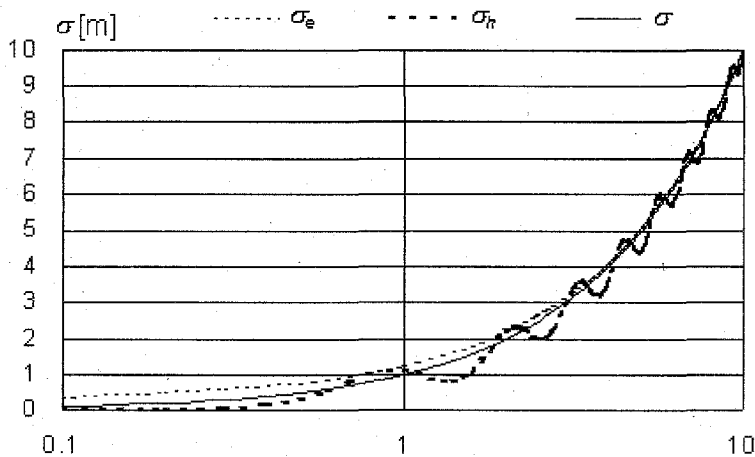
### Příklad 6.37

B

Pomocí rozptylu vln určete odrazné šířky (scattering width, tzn. efektivní odraznou plochu na jednotkovou délku) nekonečně dlouhého dokonale vodivého válce o poloměru  $a$  a efektivní odraznou plochu pro dokonale vodivou kouli o poloměru  $a$ .

**Řešení:** Pro dvojrozměrný případ se bude výkon zmenšovat jako  $1/(2\pi R)$ . Pomocí předchozího příkladu odvodíme pro odraznou šířku při  $\phi = 0$  pro  $E_z^i$  použitím vztahu pro  $H_n^{(2)}(k_\rho \rho)$  pro  $\rho \rightarrow \infty$

$$\sigma_e = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi R \left| \frac{E_z^s}{E_z^i} \right|^2 = \frac{2\lambda}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \right|^2,$$



kde  $\varepsilon_n = 1$  pro  $n = 0$  a  $\varepsilon_n = 2$  pro  $n \neq 0$ . Podobně pro  $H_z^i$  (pole  $E$  polarizované kolmo na osu  $z$ ) dostaneme

$$\sigma_h = \frac{2\lambda}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} \right|^2,$$

kde čárka označuje derivaci vzhledem k argumentu. Výrazy  $\sigma_e$  a  $\sigma_h$  mají jednotky [m]. Je zřejmé, že pro  $ka > 10$  lze použít příklad 6.14, kdy pro kolmý dopad je odrazná šířka  $\sigma = ka$ . Porovnání je ukázané na obrázku.

Efektivní odraznou plochu pro dokonale vodivou kouli o poloměru  $a$  bychom řešili podobně s využitím řešení vlnové rovnice pro kulové souřadnice (viz předchozí dva příklady)

$$\sigma_e = \frac{\lambda^2}{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1/2) (b_n - a_n) \right|^2,$$

kde  $a_n = \frac{j_n(ka)}{h_n^{(2)}(ka)}$ ,  $b_n = \frac{ka j_{n-1}(ka) - n j_n(ka)}{ka h_{n-1}^{(2)}(ka) - n h_n^{(2)}(ka)}$ ,  $j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr)$  je sférická Besselova funkce  
a podobně pro  $h_n^{(2)}$  (sférická Hankelova funkce).