UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 -- EX-IMAT2-080702-4-(1)

1	2	3	4

$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8

$\sum$ 1-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1. a) Za předpokladu, že $f(x_1,\dots x_n)$ je funkce o n proměnných diferencovatelná v bodě $C=(c_1,\dots,c_n)$, zapište diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstky $h_1,\dots,h_n$. *Tj.* : $df_C(H)=$

b) Podle věty o diferenciálu funkce uveďte, čemu se rovnají koeficienty $a_1,\dots,a_n$ v diferenciálu $df_C(H)$. | *Tj.* : $a_1 =$; ... ; $a_n =$

c) Vyjádřete diferenciál v libovolném bodě X pro přírůstek $d\vec{x}=(dx_1,\dots,dx_n)$. *Tj.* : $df =$

d) Vyjádřete diferenciál v lib. bodě X pro přír. $d\vec{x}=(dx_1,\dots,dx_n)$ pomocí operátoru. *Tj.* : $df =$

e) Jak se vytvoří diferenciál druhého řádu ? Napište jeho označení.

f) Pomocí diferenciálů zapište Taylorův polynom m-tého stupně pro funkci $f(X)$ o n proměn. $X=(x_1,\dots x_n)$ a pro bod $C=(c_1,\dots,c_n)$. *Tj.* : $T_m(X)=$

g) Funkce $f(x;y;u)=5.x+(x+1).\ln(y-3)+(x-1).\ln u$, bod $C=(x_c;y_c;u_c)=(2;4;1)$.

Zapište diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x}$, tj. $df_C=?$ a diferenciál f v bodě C pro přírůstky $d\vec{x}=(dx;dy;du)=(-0{,}20;0{,}10;0{,}25)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x}(C)=$

$\frac{\partial f}{\partial y}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(C)=$ $\qquad$ | $\frac{\partial f}{\partial u}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial u}(C)=$

$df_C=$ $\qquad\qquad$ | $df_C(-0{,}2;0{,}10;0{,}25)=$

h) Veličina z je funkcí proměnných x, y, u, tj. $z=f(x;y;u)=5.x+(x+1).\ln(y-3)+(x-1).\ln u$. Měřením bylo zjištěno, že $x=(\bar{x}\pm\Delta x)=(2{,}00\pm0{,}02)$, $y=(4{,}00\pm0{,}05)$ a $u=(1{,}00\pm0{,}03)$. Určete střední hodnotu a absolutní chybu veličiny z. (Využijte předchozího diferenciálu df_C). *Tedy* : $\bar{z}=$

$\Delta z=$

$z=(\qquad\pm\qquad)$

2. Je dána funkce $f(x,y)=(y+1)^2+e^{2.x.y+4}$ a bod $C=[1;-2]$. a) Vypočítejte všechny první a druhé parciální derivace funkce $f(x,y)$ a vyčíslete je bodě A .

$\frac{\partial f}{\partial x}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x}(C)=$ $\qquad$; $\frac{\partial f}{\partial y}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(C)=$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)=$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C)=$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(C)=$

c) Sestavte pro funkci $f(x,y)$ a bod C Taylorův polynom druhého stupně (zapište nejprve obecně)

tj. $T_2(x,y)=$

3. a) Ověřte, že rovnicí $e^y + 3.\cos y - x^2 = 0$ a bodem $A = [2;0]$ je určena implicitně funkce $f : y = y(x)$ taková, že $y(2) = 0$. *Tedy označíme :* $F(x;y) =$

b) Vyjádřete 1. derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(2)$. | c) Vyjádřete 2. derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(2)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 2$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) =$

4.1. a) Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu se separovanými proměnnými a vysvětlete význam jednotlivých symbolů. ______________________________

b) Zapište obecně lineární diferenciální rovnici 1. řádu nehomogenní a vysvětlete význam jednotlivých symbolů. __________

c) Zapište obecně Wronského determinant funkcí $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ a vypočítejte Wronského determinant daných funkcí $y_1 = \text{arctg}\, x$, $y_2 = x.\text{arctg}\, x$. | $W =$

| $y_1' =$ $y_2' =$

e) Na základě Wronskiánu z *c)* rozhodněte, zda funkce $y_1 = \text{arctg}(x)$, $y_2 = x.\text{arctg}(x)$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé na intervalech $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ a odůvodněte proč.

4.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $\boxed{y' - \frac{2.x}{x^2+1}.y = 1}$ pro neznámou funkci $y = y(x)$.

a) Vyřešte nejdříve diferenciální rovnici $y' - \frac{2.x}{x^2+1}.y = 0$

b) Následně metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici $y' - \frac{2.x}{x^2+1}.y = 1$.

5	6	7	8

Σ 5-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $\boxed{y'' - 3.y' + 2.y = 0}$.

5. b) Na základě speciálního tvaru pravé strany určete partikulární řešení diferenc. rovnice $\boxed{y'' - 3.y' + 2.y = 2.\cos x + \sin x}$. $\left(g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x)\cos(\beta.x) + P_2(x)\sin(\beta.x)];\ y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x)\cos(\beta.x) + Q_2(x)\sin(\beta.x)]\right)$

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $\boxed{y'' - 3.y' + 2.y = 2.\cos x + \sin x}$.

6. a) Pro $J = \underbrace{\langle 3;6 \rangle}_{x} \times \underbrace{\langle 0;\frac{\pi}{4} \rangle}_{y}$ zapište integrál $\iint_J \frac{x^2}{\cos^2 y}.dx.dy$ jako dvojnásobný a vypočítejte.

T.j: $\iint_J \frac{x^2}{\cos^2 y}.dx.dy =$

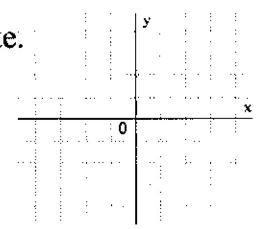
b) Vypoč těte integrál $\iiint_M \frac{1}{x}.dx.dy.dz =$

kde M: $1 \le x \le 2$

$2 \le y \le x+1$

$x \le z \le 2.y$

c) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \{(x;y) \in R^2; x \ge 0 \wedge y \ge x \ \wedge\ 0 \le x^2 + y^2 \le 9\}$, množinu A načrtněte.



$$\iint_A \frac{2.y}{\left(3 + x^2 + y^2\right).\sqrt{x^2 + y^2}}.dx.dy =$$

$x = \rho.\cos\varphi$

$y =$

$x^2 + y^2 =$

$|J| =$

$A_{\rho,\varphi}$: $\quad \le \rho \le$

$\quad \le \varphi \le$

7.1. V R^2 je dána množina $\overline{\Omega}: 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1-u^2$ a difeomorfizmus $\vec{g}: x = 2+v,\ y = 1-u,\ z = 2.u - v$, kterým se

zobrazí $\overline{\Omega}$ na plochu, tj. na list $L \subset R^3$. a) Pro skalární funkci $f(x,y,z) = x + y + z$ vypočítejte plošný integrál 1. druhu
přes list L, tj. $\iint_L f.d\sigma =$

$g_{11} =$

$g_{22} =$

$g_{12} =$

$d\sigma =$

b) Pro vektorovou funkci $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = (x\ ;\ y\ ;\ x + z)$ vypočítejte plošný integrál 2. druhu přes orientovanou plochu danou
orient. listem (L), tj. $\iint_{(L)} \vec{F}.d\vec{\sigma} =$

8.1. a) Doplňte : *Pro výpočet křivkového integrálu 1. druhu v* R^3 *se použije ………… funkce*
a pro výpočet křivkového integrálu 2. druhu v R^3 *se použije …………… funkce.*
b) Jak se změní křivkový integrál 1. druhu, když se k jeho výpočtu použije stejná funkce a stejná křivka, ale s opačnou nebo jinak změněnou parametrizací.
c) Jak se změní křivkový integrál 2. druhu, když se k jeho výpočtu použije stejná vektorová funkce a stejná křivka, ale s opačnou parametrizací.
d) Napište parametrické rovnice úsečky
AB v R^3, když její počáteční bod je
$A = [1;2;0]$ a koncový bod $B = [3;1;2]$.

8.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = 1 + 2.t \wedge y = 2 - t \wedge z = 2.t \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\}$ a) vyjádřete derivace $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ podle t, tj. $\dot{x} =$; $\dot{y} =$; $\dot{z} =$ a $ds =$
b) Vyjádřete diferenciály $dx =$; $dy =$; $dz =$ $d\vec{s} =$
c) Vypočtěte křivkový integrál 1.druhu z funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x - z}.\sqrt{2.x - 2}.\sqrt{2.x - y}$ podél kř. κ.
Tj. $\int_\kappa f(x,y,z)ds =$

d) Vypočtěte křivk. integrál 2. druhu z funkce $\vec{F} = (f_1; f_2\, f_3) = \left(\sqrt{(x-1).z}; \sqrt{2-y}; \sqrt{\frac{2}{z}}\right)$ podél kř.κ.
Tj. : $\int_\kappa \vec{F}.d\vec{s} =$

080702-4-(1)

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070903-5-(1)

1	2	3	4

$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8

$\sum$ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1\. a) Za předpokladu, že $f(x_1,\dots x_n)$ je funkce o n proměnných diferencovatelná v bodě $C=(c_1,\dots,c_n)$, zapište diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstky $h_1,\dots,h_n$. *Tj.* : $df_C(H)= a_1\cdot h_1+\dots+a_n\cdot h_n$ 1

b) Podle věty o diferenciálu funkce uveďte, čemu se rovnají koeficienty $a_1,\dots,a_n$ v diferenciálu $df_C(H)$. | *Tj.* : $a_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}(C)$; … ; $a_n=\frac{\partial f}{\partial x_n}(C)$ 1

c) Vyjádřete diferenciál v libovolném bodě X pro přírůstek $d\vec{x}=(dx_1,\dots,dx_n)$. *Tj.* : $df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ 1

d) Vyjádřete diferenciál v lib. bodě X pro přír. $d\vec{x}=(dx_1,\dots,dx_n)$ pomocí operátoru. *Tj.* : $df=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)f$ 1

e) Jak se vytvoří diferenciál druhého řádu ? Napište jeho označení. 1 d^2f … vytvoří se jako diferenciál z diferenciálu prvního řádu df, kde přírůstky $dx_1 \dots dx_n$ jsou konstanty. 1

f) Pomocí diferenciálů zapište Taylorův polynom m-tého stupně pro funkci $f(X)$ o n proměn. $X=(x_1,\dots x_n)$ a pro bod $C=(c_1,\dots,c_n)$. *Tj.* : $T_m(X)=f(C)+\frac{d f_C(x_1-c_1,\dots,x_n-c_n)}{1!}+\dots+\frac{d^m f_C(x_1-c_1,\dots,x_n-c_n)}{m!}$ 1 1

g) Funkce $f(x;y;u)=5.x+(x+1).\ln(y-3)+(x-1).\ln u$, bod $C=(x_c;y_c;u_c)=(2;4;1)$.

Zapište diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x}$, tj. $df_C=?$ a diferenciál f v bodě C pro přírůstky

$d\vec{x}=(dx;dy;du)=(-0{,}20;0{,}10;0{,}25)$. $\frac{\partial f}{\partial x}=5+\ln(y-3)+\ln u$ 1 $\frac{\partial f}{\partial x}(C)=5+\ln 1+\ln 1=5$ 1

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x+1}{y-3}$ 1 $\frac{\partial f}{\partial y}(C)=3$ | $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{x-1}{u}$ 1 $\frac{\partial f}{\partial u}(C)=1$

$df_C=5\cdot dx+3\cdot dy+du$ 1 | $df_C(-0{,}20;0{,}10;0{,}25)=5\cdot(-0{,}2)+3\cdot 0{,}10+0{,}25=-1{,}00+0{,}3+0{,}25=-0{,}45$ 1

h) Veličina z je funkcí proměnných x, y, u, tj. $z=f(x;y;u)=5.x+(x+1).\ln(y-3)+(x-1).\ln u$. Měřením bylo zjištěno, že $x=(\bar{x}\pm\Delta x)=(2{,}00\pm0{,}02)$, $y=(4{,}00\pm0{,}05)$ a $u=(1{,}00\pm0{,}03)$. Určete střední hodnotu a absolutní chybu veličiny z. (Využijte předchozího diferenciálu df_C). *Tedy* : $\bar{z}=5\cdot2+3\cdot0+1\cdot0=10$

$\Delta z=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|\cdot\Delta u=5\cdot0{,}02+3\cdot0{,}05+1\cdot0{,}03=0{,}10+0{,}15+0{,}03=0{,}28$ 1 1

$z=(10{,}00\pm0{,}28)$ 1

2\. Je dána funkce $f(x,y)=(y+1)^2+e^{2.x.y+4}$ a bod $C=[1;-2]$. a) Vypočítejte všechny první a druhé parciální derivace funkce $f(x,y)$ a vyčíslete je bodě A .

$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{2xy+4}\cdot2y$ 1 $\frac{\partial f}{\partial x}(C)=-4$; $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)+e^{2xy+4}\cdot2x$ 1 $\frac{\partial f}{\partial y}(C)=-2+2=0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{2xy+4}\cdot2y\cdot2y=4y^2\cdot e^{2xy+4}$ 1 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)=16$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2+e^{2xy+4}\cdot2x\cdot2x=2+4x^2\cdot e^{2xy+4}$ 1 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C)=6$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=e^{2xy+4}\cdot2x\cdot2y+e^{2xy+4}\cdot2=e^{2xy+4}(4xy+2)$ 1 1 $\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(C)=-6$

c) Sestavte pro funkci $f(x,y)$ a bod C Taylorův polynom druhého stupně (zapište nejprve obecně) 1

tj. $T_2(x,y)=f(C)+\frac{\partial f}{\partial x}(C)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(C)(y-y_0)+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(C)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C)(y-y_0)^2}{2!}$ 1 1

$=2-4(x-1)+0\cdot(y+2)+\frac{16\cdot(x-1)^2-12(x-1)(y+2)+6(y+2)^2}{2}$ 1 $=$

$=2-4(x-1)+8\cdot(x-1)^2-6(x-1)\cdot(y+2)+3(y+2)^2$ 1

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070903-5-(2)

3. a) Ověřte, že rovnicí $e^y + 3.\cos y - x^2 = 0$ a bodem $A = [2;0]$ je určena implicitně funkce $f : y = y(x)$ taková, že $y(2) = 0$. *Tedy označíme :* $F(x;y) = e^y + 3\cdot\cos y - x^2$; $F(A) = e^0 + 3\cdot\cos 0 - 2^2 = 0$ – splněno 1

$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y - 3\cdot\sin y$; $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = e^0 - 3\cdot\sin 0 = 1 \neq 0$ – splněno 1 1

$\Rightarrow$ Danou rovnicí a bodem A je určena implicitně funkce $y = y(x)$ 1

b) Vyjádřete 1. derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(2)$.

$e^y + 3\cdot\cos y - x^2 = 0 \;/\frac{d()}{dx}$

1 $e^y\cdot y' - 3\cdot\sin y\cdot y' - 2x = 0$

$y'(e^y - 3\sin y) = 2x$

1 $y' = \frac{2x}{e^y - 3\cdot\sin y}$; $y'(2) = \frac{2\cdot 2}{e^0 - 3\sin 0} = 4$ 1

c) Vyjádřete 2. derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(2)$.

$e^y\cdot y' - 3\cdot\sin y\cdot y' - 2x = 0 \;/\frac{d()}{dx}$

$e^y\cdot y'\cdot y' + e^y\cdot y'' - 3\cos y\cdot y'\cdot y' - 3\sin y\cdot y'' - 2 = 0$ 1

$y''(e^y - 3\cdot\sin y) = (3\cos y - e^y)\cdot(y')^2 + 2$

$y'' = \frac{(3\cdot\cos y - e^y)\cdot(y')^2 + 2}{e^y - 3\cdot\sin y}$ 1

$y''(2) = \frac{(3\cdot\cos 0 - e^0)\cdot 4^2 + 2}{e^0 - 3\cdot\sin 0} = \frac{34}{1} = 34$ 1

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 2$ pro implicitní funkci $y = y(x)$. 1

$T_2(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{1}{2!}y''(2)\cdot(x-2)^2 = 0 + 4\cdot(x-2) + 17\cdot(x-2)^2$ 1 1

4.1. a) Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu se separovanými proměnnými a vysvětlete význam jednotlivých symbolů.

$y' = g(x)\cdot h(y)$; 1 x – nezávislé proměnná 1 y – hledaná funkce, y' – derivace neznámé funkce, g(x) – funkce proměnné x, h(y) – funkce proměnné y

b) Zapište obecně lineární diferenciální rovnici 1. řádu nehomogenní a vysvětlete význam jednotlivých symbolů.

$y' + p(x)\cdot y = q(x)$; 1 x – nezávislé proměnná 1 y – neznámá funkce $y = y(x)$, y' – derivace y(x), p(x), q(x) – funkce proměnné x

c) Zapište obecně Wronského determinant funkcí $y_1 = y_1(x)$ a $y_2 = y_2(x)$ a vypočítejte jej pro dané funkce $y_1 = \text{arctg } x$ a $y_2 = x.\text{arctg } x$.

$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ 1 $= \begin{vmatrix} \text{arctg } x & x\cdot\text{arctg } x \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{arctg } x + \frac{x}{1+x^2} \end{vmatrix}$ 1

$y_1' = \frac{1}{x^2+1}$ 1

$y_2' = \text{arctg } x + \frac{x}{x^2+1}$ 1

$= \text{arctg}^2 x + \frac{x}{1+x^2}\text{arctg } x - \frac{x}{1+x^2}\text{arctg } x = \text{arctg}^2 x$ 1

e) Na základě Wronskiánu z d) rozhodněte, zda funkce $y_1 = \text{arctg}(x)$, $y_2 = x.\text{arctg}(x)$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé na intervalech $(-\infty;0),(0;+\infty)$ a odůvodněte proč. 1

Funkce $y_1(x), y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé, 1 protože jejich Wronskián je různý od nuly tj. $\text{arctg}^2 x \neq 0$ pro $x \in (-\infty,0),(0,+\infty)$

4.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $\boxed{y' - \frac{2.x}{x^2+1}.y = 1}$ pro neznámou funkci $y = y(x)$.

a) Vyřešte nejdříve diferenciální rovnici

$y' - \frac{2.x}{x^2+1}.y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}\cdot y$

$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{2x}{x^2+1}\,dx$ 1

$\ln|y| = \ln|x^2+1| + \ln|C|$ 1

$\ln|y| = \ln|C(x^2+1)|$ 1

$y = C\cdot(x^2+1)$, $C \in R$

1

b) Následně metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici $y' - \frac{2.x}{x^2+1}.y = 1$.

Očekávané řešení:

1 $y = C\cdot(x^2+1)$; $C = C(x)$

$y' = C'(x^2+1) + C\cdot 2x$ 1

Dosazení: 1

$C'(x^2+1) + 2C\cdot x - \frac{2x}{x^2+1}\cdot C\cdot(x^2+1) = 1$

$C'(x^2+1) = 1 \Rightarrow C' = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow C = \int\frac{1}{x^2+1}dx =$ 1 1

$= \text{arctg } x + K, K \in R$

Obecné řešení:

$y = (\text{arctg } x + K)(x^2+1)$, $K \in R$

1

080702-4-(3)

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070903-5-(3)

5	6	7	8

$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $\boxed{y'' - 3.y' + 2.y = 0}$.

Char. rovnice: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ $\boxed{1}$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$ $\quad y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{x}, \; C_1, C_2 \in R$ $\boxed{1}$ 1

$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \left\langle {2 \atop 1} \right.$ $\boxed{1}$

5. b) Na základě speciálního tvaru pravé strany určete partikulární řešení diferenc. rovnice $\boxed{y'' - 3.y' + 2.y = 2.\cos x + \sin x}$. $\left(g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)];\; y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x).\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)]\right)$

Speciální pravá strana: $2 \cdot \cos x + \sin x = e^{\alpha x}[P_1(x) \cdot \cos(\beta x) + P_2(x) \cdot \sin(\beta x)]$ $\boxed{1}$

$P_1(x) = 2;\ P_2(x) = 1;\ \alpha = 0, \beta = 1;\ \alpha + \beta i = 0 + i = i \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow k = 0$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\quad \underline{= 2 \cdot \cos x + \sin x}$

Partikulární řešení ve tvaru pravé strany: $y_p = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$ $\boxed{1}$

$y_p' = -A \sin x + B \cdot \cos x$ $\boxed{1}$

$y_p'' = -A \cos x - B \cdot \sin x$ $\boxed{1}$

Dosazení: $-A\cos x - B.\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x =$

$\cos x:\ A - 3B = 2$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow B = 1 - 3A = 1 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\boxed{1}$

$\sin x:\ 3A + B = 1 \; / \cdot 3$ $\boxed{1}$

$10A = 5 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ $\boxed{1}$ $\quad y_p = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ $\boxed{1}$

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $\boxed{y'' - 3.y' + 2.y = 2.\cos x + \sin x}$.

$y = y_p + y_h = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{x};\ C_1, C_2 \in R$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

6. a) Pro $J = \underbrace{\langle 3;6 \rangle}_{x} \times \underbrace{\langle 0;\frac{\pi}{4} \rangle}_{y}$ zapište integrál $\iint_J \frac{x^2}{\cos^2 y}.dx.dy$ jako dvojnásobný a vypočítejte. $\quad \boxed{1} = 1 \quad (6$

T.j: $\iint_J \frac{x^2}{\cos^2 y}.dx.dy = \int_3^6 dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{\cos^2 y}\,dy = \int_3^6 x^2 dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 y}\,dy = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^6 \cdot \left[\operatorname{tg} y\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right]\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0\right] = 63$

b) Vypočítěte integrál $\iiint_M \frac{1}{x}.dx.dy.dz = \int_1^2 dx \int_2^{x+1} dy \int_x^{2y} \frac{1}{x}\,dz = \int_1^2 dx \int_2^{x+1} \left[\frac{z}{x}\right]_{z=x}^{z=2y} dy = \int_1^2 dx \int_2^{x+1} \left(\frac{2y}{x} - 1\right) dy =$

kde M: $1 \le x \le 2$

$2 \le y \le x + 1$

$x \le z \le 2.y$

$= \int_1^2 \left[\frac{y^2}{x} - y\right]_2^{x+1} dx = \int_1^2 \left[\frac{(x+1)^2}{x} - (x+1) - \left(\frac{2^2}{x} - 2\right)\right] dx =$

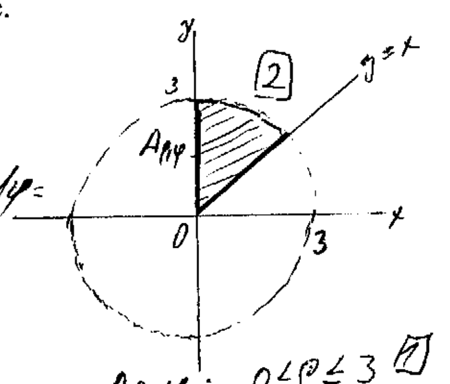
$= \int_1^2 \left(x + 2 + \frac{1}{x} - x - 1 - \frac{4}{x} + 2\right) dx = \int_1^2 \left(3 - \frac{3}{x}\right) dx = \left[3x - 3\ln|x|\right]_1^2 =$

$= 3 \cdot 2 - 3 \cdot \ln 2 - (3 \cdot 1 - 3 \cdot \overset{=0}{\ln 1}) =$ $\boxed{1}$

c) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $= 3 - 3\ln 2 = 3(1 - \ln 2)$

$A = \left\{(x;y) \in R^2;\ x \ge 0 \wedge y \ge x \wedge 0 \le x^2 + y^2 \le 9\right\}$, množinu A načrtněte.

$\iint_A \frac{2.y}{(3 + x^2 + y^2).\sqrt{x^2 + y^2}}.dx.dy = \iint_{A_{\rho\varphi}} \frac{2 \cdot \rho \sin\varphi}{(3 + \rho^2) \cdot \rho} \rho\, d\rho \cdot d\varphi =$



$x = \rho \cdot \cos\varphi$

$y = \rho \cdot \sin\varphi$ $\boxed{1}$ $\quad = \int_0^3 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cdot \rho \cdot \sin\varphi}{3 + \rho^2} d\varphi = \int_0^3 \frac{2\rho}{3 + \rho^2} d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi =$

$x^2 + y^2 = \rho^2$ $\boxed{1}$

$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ $\quad = \left[\ln|3 + \rho^2|\right]_0^3 \cdot \left[-\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$

$A_{\rho,\varphi}:\ 0 \le \rho \le 3$ $\boxed{1}$

$|J| = \rho$ $\boxed{1}$ $\quad = \left[\ln 12 - \ln 3\right] \cdot \left[-\overset{=0}{\cos\frac{\pi}{2}} + \cos\frac{\pi}{4}\right] = \left[\ln\frac{12}{3}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] =$ $\boxed{1}$

$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\boxed{1}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ln 4 = \frac{\ln 4}{\sqrt{2}}$

080702-4-(4)

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070903-5-(4)

7.1. V R^2 je dána množina $\overline{\Omega}: \begin{array}{l} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1-u^2 \end{array}$ a difeomorfizmus $\vec{g}: \begin{array}{l} x = 2+v \\ y = 1-u \\ z = 2.u - v \end{array}$, kterým se

zobrazí $\overline{\Omega}$ na plochu, tj. na list $L \subset R^3$. a) Pro skalární funkci $f(x,y,z) = x+y+z$ vypočítejte plošný integrál 1. druhu přes list L, tj. $\iint\limits_L f.d\sigma = \iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv = \iint\limits_{\Omega}(2+v+1-u+2u-v)\sqrt{6}\,du\,dv =$

$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 0^2+(-1)^2+2^2 = 5$

$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1^2+0^2+(-1)^2 = 2$

$g_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0\cdot1+(-1)\cdot0+2\cdot(-1) = -2$

$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv = \sqrt{5\cdot2-(-2)^2}\,du\,dv = \sqrt{6}\,du\,dv$

$= \sqrt{6}\iint\limits_{\Omega}(3+u)\,du\,dv = \sqrt{6}\int_0^1 du\int_0^{1-u^2}(3+u)\,dv = \sqrt{6}\int_0^1\Big[3v+uv\Big]_0^{1-u^2}du =$

$= \sqrt{6}\int_0^1(3+u-3u^2-u^3)\,du = \left[3u+\frac{u^2}{2}-3\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}\right]_0^1\sqrt{6}$

$= \left(3+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4}-0\right)\sqrt{6} = \left(2+\frac{1}{4}\right)\sqrt{6} = \frac{9\sqrt{6}}{4} = 2{,}25\sqrt{6}$

b) Pro vektorovou funkci $\vec{F} = (f_1;f_2;f_3) = (\,x\;;\;y\;;\;x+z\,)$ vypočítejte plošný integrál 2. druhu přes orientovanou plochu danou orient. listem (L), tj. $\iint\limits_{(L)}\vec{F}.d\vec{\sigma} = \iint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix} f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv = \iint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix} 2+v & 1-u & 2+2u \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}du\,dv$

$= \iint\limits_{\Omega}(2+v+2(1-u)+2+2u)\,du\,dv =$

$= \iint\limits_{\Omega}(6+v)\,du\,dv = \int_0^1 du\int_0^{1-u^2}(6+v)\,dv = \int_0^1\left[6v+\frac{v^2}{2}\right]_0^{1-u^2}du = \int_0^1\left(6-6u^2+\frac{1}{2}-u^2+\frac{u^4}{2}\right)du = \int_0^1\left(6{,}5-7u^2+\frac{u^4}{2}\right)du =$

$= \left[6{,}5u-\frac{7}{3}u^3+\frac{u^5}{10}\right]_0^1 = 6{,}5-\frac{7}{3}+\frac{1}{10} = \frac{195-70+3}{30} = \frac{128}{30} = \frac{64}{15}$

8.1. a) Doplňte : *Pro výpočet křivkového integrálu 1. druhu v* R^3 *se použije* skalární *funkce a pro výpočet křivkového integrálu 2. druhu v* R^3 *se použije* vektorová *funkce.*

b) Jak se změní křivkový integrál 1. druhu, když se k jeho výpočtu použije stejná funkce a stejná křivka, ale s opačnou nebo jinak změněnou parametrizací. Křivkový integrál 1. druhu se nezmění, nezáleží na parametrizaci

c) Jak se změní křivkový integrál 2. druhu, když se k jeho výpočtu použije stejná vektorová funkce a stejná křivka, ale s opačnou parametrizací. Křivkový integrál bude mít opačné znaménko

d) Napište parametrické rovnice úsečky AB v R^3, když její počáteční bod je $A = [1;2;0]$ a její koncový bod je $B = [3;1;2]$.

$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B-A = (2,-1,2)$; $AB: \begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 2t \end{array}$ $t \in \langle 0;1\rangle$

8.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = 1+2.t \wedge y = 2-t \wedge z = 2.t \wedge t \in \langle 0;1\rangle\}$ a) vyjádřete derivace $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ podle t, tj. $\dot{x} = 2$; $\dot{y} = -1$; $\dot{z} = 2$ a $ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\,dt = \sqrt{9}\,dt = 3\cdot dt$

b) Vyjádřete diferenciály $dx = 2\cdot dt$; $dy = (-1)dt$; $dz = 2\cdot dt$ $d\vec{s} = (2;-1;2)dt$

c) Vypočtěte křivkový integrál 1.druhu z funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x-z}.\sqrt{2.x-2}.\sqrt{2.x-y}$ podél kř. κ.

Tj. $\int\limits_{\kappa} f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = \int_0^1\sqrt{1+2t-2t}\cdot\sqrt{2(1+2t)-2}\cdot\sqrt{2(1+2t)-2+t}\cdot\sqrt{9}\,dt =$

$= \int_0^1 1\cdot\sqrt{4t}\sqrt{5t}\sqrt{9}\,dt = \int_0^1 6\sqrt{5}\,t\,dt = 6\sqrt{5}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}-0\right) = 3\sqrt{5}$

d) Vypočtěte křivk. integrál 2. druhu z funkce $\vec{F} = (f_1;f_2\,f_3) = \left(\sqrt{(x-1)}.z;\sqrt{2-y};\sqrt{\frac{2}{z}}\right)$ podél kř.κ.

Tj. : $\int\limits_{\kappa}\vec{F}.d\vec{s} = \int\limits_{\kappa}\left(\sqrt{(x-1)}z, \sqrt{2-y}, \sqrt{\frac{2}{z}}\right)(dx,dy,dz) = \int\limits_{\kappa}\sqrt{(x-1)}z\,dx+\sqrt{2-y}\,dy+\sqrt{\frac{2}{z}}\,dz =$

$= \int_0^1\sqrt{(1+2t-1)}2t\cdot2\,dt+\sqrt{2-(2-t)}\cdot(-1)dt+\sqrt{\frac{2}{2t}}\,2\,dt = \int_0^1\left(4\cdot t-t^{\frac{1}{2}}+2t^{-\frac{1}{2}}\right)dt =$

$= \left[4\frac{t^2}{2}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \left[2\cdot t^2-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+4\cdot\sqrt{t}\right]_0^1 = 2-\frac{2}{3}+4 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$