UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-080625-3-(1)

1	2	3	4

$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8

$\sum$ 1-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1. a) Zapište obecně Laplaceův operátor, tj. operátor delta. *Odpověď:* $\Delta =$

b) Laplaceův operátor lze použít na .... funkci, výsledkem je ....funkce.(doplňte)

c) Určete první a druhé parc. derivace z $f(x;y;z) = (y + x^2)(y + \ln z)$ obecně a v $C = [3;2;1]$

$\frac{\partial f}{\partial x} =$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) =$

$\frac{\partial f}{\partial y} =$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) =$

$\frac{\partial f}{\partial z} =$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(C) =$

d) Zapište Δf pro danou funkci $f(x;y;z)$ a $\Delta f(C)$, tj. pro funkci $f(x;y;z)$ a pro daný bod $C = [3;2;1]$.
Tedy obecně, $\Delta f =$ *a v bodě C,* $\Delta f(C) =$

2. a) **Doplňte poslední část definice** vázaného lokálního maxima v bodě C : ***Funkce*** $f(X)$ ***o n*** *proměnných má v bodě* $C \in M \subset Df \subset R^n$ *lokální minimum vzhledem k množině M, jestliže existuje okolí* $O(C)$ *bodu C tak, že pro každé* $X \in O(C) \cap M$ *platí ...*

b) Najděte lokální extrémy funkce
$f(x;y) = \frac{x}{2} + y$ vázané na množinu
$M = \{(x,y) \in R^2; y - \cos x = 0 \wedge x \in (0; \frac{\pi}{2})\}$
Tedy : $y =$

c) Předpokládáme, že bod $A \in Df$ je stacionárním bodem funkce $f(x,y) \in C^2$

- Uveďte postačující podmínky pro existenci ostrého lokálního maximum ve stacionárním bodě A.

- Uveďte podmínku, která postačuje k tomu, aby funkce $f(x,y)$ neměla ve stacionárním bodě A lokální extrém.

d) Zjistěte, zda body $A_1 = [0;0]; A_2 = [0;-1], A_3 = [1;0], A_4 = [1;1]$ jsou stacionárními body funkce $f(x;y) = \frac{x^7}{7} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{2}$. Zapište derivace : $\frac{\partial f}{\partial x} =$; $\frac{\partial f}{\partial y} =$

Zjistěte, zda v bodech A_1, A_2, A_3, A_4 nastávají lokální extrémy, a jaké. Odůvodněte!

Zapište derivace : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} =$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$

3.1. Ověřte, že rovnicí $y^4 + 2.x.y - x^3 = 0$ a bodem $A = [2;-2]$ je $|F(x;y) =$

určena implicitně funkce $y = y(x)$ tak, že $y(2) = -2$. $|F(A) =$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y) =$ $\frac{\partial F}{\partial y}(A) =$

Závěr :

3.2. Vyjádřete a) **první** derivaci $y'(x)$ a určete $y'(2)$; b) **druhou derivaci** $y''(x)$ a určete $y''(2)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 2$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) =$

4.1. a) **Co je neznámou** v obyčejné diferenciální rovnici ? ______________

b) Co **musí** být nutně obsaženo v zápise dif. rovnice 1. řádu ? ______________

c) Co **může** (ale nemusí) být obsaženo v zápise dif. rovnice 1. řádu ? ______________

d) Co je vždy obsaženo v **zápise obecného řešení** dif. rovnice 1. řádu (kromě y, x) ? ______________

4.2. $y'.e^y = -\frac{1}{\sin^2 x}$ je daná diferenciální rovnice

a) najděte její obecné řešení ;

b) najděte partikulární řešení dané diferenciální rovnice tak, aby $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

4.3. Je dána diferenciální rovnice $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$. a) Jaká je to dif. rovnice ? ....

b) Najděte obecné řešení dané diferenciální rovnice. *Využijte substituci :* $u = \frac{y}{x}$, *tedy* $y =$

a $y' =$

5	6	7	8

Σ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice 2. řádu $y'' - 6.y' + 9.y = 0$.

b) Na základě speciálního tvaru pravé strany najděte partikulární řešení diferenciální rovnice
$y'' - 6.y' + 9.y = 2.\cos x + 14.\sin x$. ($g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x)\cos(\beta.x) + P_2(x)\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x)\cos(\beta.x) + Q_2(x)\sin(\beta.x)]$)

c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 6.y' + 9.y = 2.\cos x + 14.\sin x$
(využijte předchozí výsledky).

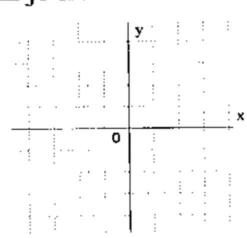
6.1. a) Zapište pomocí dvojného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M \subset R^2$.

6.2. b) Zapište pomocí dvojnásobného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M = \{(x, y); a \le x \le b \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

6.3 Množina $I = \underbrace{(-1;1)}_{x} \times \underbrace{\langle 1;e \rangle}_{y}$, vypočítejte $\iint\limits_I \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).dx.dy =$

6.4 Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál, v němž je množina
$A = \{(x;y) \in R^2; x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge 0 \le x^2 + y^2 < +\infty\}$, množinu A načrtněte!

Doplňte : $x =$ $y =$ $;x^2 + y^2 =$ $;|J| =$



$$\iint\limits_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}.(1+x^2+y^2)}.dx.dy =$$

$A_{\rho,\varphi}:$ $\le \rho <$

$\le \varphi \le$

7.1. Je dána křivka $\kappa = \left\{(x,y,z) \in R^3 ; x = 2.t \wedge y = 2.t \wedge z = t \wedge t \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle\right\}$ a skalární funkce

$f(x,y,z) = \cos(x-z) + \sin(y-z) + 4.\cos(x-y)$. $|\dot{x} = \quad ; \ \dot{y} = \quad ; \dot{z} = \quad ; ds =$

a) Napište obecně a vypočtěte $\int\limits_{\kappa} f(x,y,z).ds =$

7.2 Difeomorfizmus $\vec{g}: \begin{cases} x = u.\cos v \\ y = u.\sin v \\ z = u \end{cases}$ zobrazuje obdélník $\overline{\Omega} \subset R^2$, $\overline{\Omega}: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2.\pi \end{cases}$ na plášť

kužele $L \subset R^3$. Vypočtěte plošný integrál ze skalární funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ přes plášť kužele L, tj. $\iint\limits_{L} f.d\sigma =$

$g_{11} =$

$g_{22} =$

$g_{12} =$

$d\sigma =$

8. Je dána vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (x+y\,;\,x.y)$ v R^2, tj. $f_1(x,y) = x+y$ a $f_2(x,y) = x.y$ a po částech hladká křivka $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2 \cup \kappa_3$, kde $\kappa_1 = \left\{(x,y) \in R^2 ; x = t \wedge y = 0 \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\right\}$, $\kappa_2 = \left\{(x,y) \in R^2 ; x = 1-t \wedge y = 2.t \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\right\}$, $\kappa_3 = \left\{(x,y) \in R^2 ; x = 0 \wedge y = 2-2.t \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\right\}$.
Dále je dána množina $M = \left\{(x,y) \in R^2 ; 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 2-2x\right\}$, je to trojúhelník, jehož okraj (obvod) je tvořen křivkou κ. Množinu M a křivku κ zakreslete dole do souř. soustavy.

a) Pro κ_1 určete $dx = \quad ; dy = \quad ; d\vec{s} =$ a vypočtěte $\int\limits_{\kappa_1} \vec{F}.d\vec{s} =$

b) Pro κ_2 určete $dx = \quad ; dy = \quad ; d\vec{s} =$ a vypočtěte $\int\limits_{\kappa_2} \vec{F}.d\vec{s} =$

c) Pro κ_3 určete $dx = \quad ; dy = \quad ; d\vec{s} =$ a vypočtěte $\int\limits_{\kappa_3} \vec{F}.d\vec{s} =$

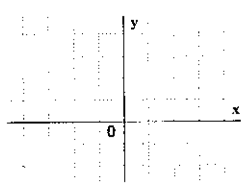
d) Vyjádřete obecně a vypočtěte $\oint\limits_{\kappa} \vec{F}.d\vec{s} = \int\limits_{\kappa} \vec{F}.d\vec{s} =$

e) Vypočtěte $\iint\limits_{M} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} dx.dy = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right).dx.dy =$

f) Co se značí symbolickým zápisem $\oint\limits_{\kappa} \vec{F}.d\vec{s}$? ...

g) Jaký vztah platí mezi $\oint\limits_{\kappa} \vec{F}.d\vec{s}$ a $\iint\limits_{M} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right).dx.dy$? ...

h) Jak je pojmenována mat. věta, která řeší vztah mezi v g) uvedenými integrály?



UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-080625-3-(1)

1	2	3	4		Σ 1-4	Σ 5-8		Σ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. a) Zapište obecně Laplaceův operátor, tj. operátor delta. *Odpověď:* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\boxed{1}$

b) Laplaceův operátor lze použít na $\boxed{1}$ skalární funkci, výsledkem je $\boxed{1}$ skalární funkce.(doplňte)

c) Určete první a druhé parc. derivace z $f(x;y;z) = (y + x^2)(y + \ln z)$ obecně a v $C = [3;2;1]$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x(y + \ln z)$ $\boxed{1}$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(y + \ln z)$ $\boxed{1}$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = y + \ln z + y + x^2 = x^2 + 2y + \ln z$ $\boxed{1}$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ $\boxed{1}$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) = 2$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = (y + x^2) \cdot \frac{1}{z} = \frac{y + x^2}{z} = (y + x^2) \cdot z^{-1}$ $\boxed{1}$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{y + x^2}{z^2}$ $\boxed{1}$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(C) = -11$

d) Zapište Δf obecně a $\Delta f(C)$, tj. pro funkci $f(x;y;z) = (y + z)\ln(x + z)$ a bod $C = [3;2;1]$. $\boxed{1}$

Tedy obecně, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2(y + \ln z) + 2 - \frac{y + x^2}{z^2}$ $\boxed{1}$ *a v bodě C,* $\Delta f(C) = 4 + 2 - 11 = -5$

2. a) **Doplňte poslední část definice** vázaného lokálního maxima v bodě C : ***Funkce*** $f(X)$ ***o n*** *proměnných má v bodě* $C \in M \subset Df \subset R^n$ *lokální minimum vzhledem k množině M, jestliže existuje okolí* $O(C)$ *bodu C tak, že pro každé* $X \in O(C) \cap M$ *platí ...,* $f(X) \geq f(C)$ $\boxed{1}$

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y) = \frac{x}{2} + y$ vázané na množinu $M = \{(x,y) \in R^2; y - \cos x = 0 \wedge x \in (0;\frac{\pi}{2})\}$

$F(x) = f(x, \cos x) = \frac{x}{2} + \cos x$ $\boxed{1}$, $F'(x) = \frac{1}{2} - \sin x = 0 \iff x = \frac{\pi}{6}$ $\boxed{1}$

$F''(x) = -\cos x$ $\boxed{1}$, $F''(\frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow F(x)$ má lok. maximum v $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ $\boxed{1}$

Tedy: $y = \cos x$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow f(x,y)$ má v $A = [\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$ lokální vázané maximum $\boxed{1}$ $f(A) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Předpokládáme, že bod $A \in Df$ je stacionárním bodem funkce $f(x,y) \in C^2$

- Uveďte postačující podmínky pro existenci ostrého lokálního maximum ve stacionárním bodě A.

$D_A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix} > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

- Uveďte podmínku, která postačuje k tomu, aby funkce $f(x,y)$ neměla ve stacionárním bodě A lokální extrém.

$D_A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix} < 0$ $\boxed{1}$

d) Zjistěte, zda body $A_1 = [0;0]; A_2 = [0;-1], A_3 = [1;0], A_4 = [1;1]$ jsou stacionárními body funkce $f(x;y) = \frac{x^7}{7} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{2}$. Zapište derivace : $\frac{\partial f}{\partial x} = x^6 - x$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = y^4 + y$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(A_1) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(A_1) = 0$, A_1 je stacionární | $\frac{\partial f}{\partial x}(A_2) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(A_2) = 0$, A_2 je stacionární | $\frac{\partial f}{\partial x}(A_3) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(A_3) = 0$, A_3 je stacionární | $\frac{\partial f}{\partial x}(A_4) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(A_4) = 2 \neq 0$, A_4 není stacionární $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Zjistěte, zda v bodech A_1, A_2, A_3, A_4 nastávají lokální extrémy, a jaké. Odůvodněte! $\boxed{1}$

Zapište derivace : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x^5 - 1$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^3 + 1$ $\boxed{1}$

$D_{A_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$ $\boxed{1}$

V $A_1 = [0,0]$ lok. extrém nenastává $\boxed{1}$

$D_{A_2} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 > 0$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_2) = -1 < 0$ $\boxed{1}$

V $A_2 = [0,-1]$ je lok. maximum. $\boxed{1}$

$f(A_2) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ $\boxed{1}$

$D_{A_3} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 > 0$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_3) = 5 > 0$ $\boxed{1}$

V $A_3 = [1,0]$ je lok. minimum $\boxed{1}$

$f(A_3) = \frac{1}{7} - \frac{1}{2} = \frac{-5}{14}$ $\boxed{1}$

V $A_4 = [1,1]$ není lok. extrém, protože A_4 není stacionárním bodem $\boxed{1}$

3.1. Ověřte, že rovnicí $y^4+2.x.y-x^3=0$ a bodem $A=[2;-2]$ je určena implicitně funkce $y=y(x)$ tak, že $y(2)=-2$.

$|F(x;y)=y^4+2\cdot x\cdot y-x^3$

$|F(A)=(-2)^4+2\cdot 2\cdot(-2)-2^3=16-8-8=0$ $\boxed{1}$ splněno

$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y)=4\cdot y^3+2x$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(A)=4\cdot(-2)^3+2\cdot 2=-32+4=-28\neq 0$ $\boxed{1}$ splněno

Závěr: Rovnicí $F(x,y)=0$ a bodem A je určena implicitně funkce $y=y(x)$, tak, že $y(2)=-2$ $\boxed{1}$

3.2. Vyjádřete a) **první** derivaci $y'(x)$ a určete $y'(2)$; b) **druhou derivaci** $y''(x)$ a určete $y''(2)$.

$y^4+2\cdot x\cdot y-x^3=0\ /\frac{d}{dx}$

$\boxed{1}$ $4\cdot y^3\cdot y'+2\cdot y+2x\cdot y'-3\cdot x^2=0$ $\boxed{1}$

$y'=\frac{3x^2-2y}{4y^3+2x}$ $\boxed{1}$; $y'(2)=\frac{3\cdot 2^2-2\cdot(-2)}{4\cdot(-2)^3+2\cdot 2}=-\frac{4}{7}$ $\boxed{1}$

$4\cdot y^3\cdot y'+2y+2x\cdot y'-3x^2=0\ /\frac{d}{dx}$

$12y^2(y')^2+4y^3\cdot y''+2y'+2y'+2x\cdot y''-6x=0$ $\boxed{2}$

$y''=\frac{-12\cdot y^2(y')^2-4y'+6x}{4\cdot y^3+2x}$ $\boxed{1}$; $y''(2)=\frac{-12\cdot(-2)^2\cdot(-\frac{4}{7})^2-4(-\frac{4}{7})+6\cdot 2}{-28}=$ $\boxed{1}$

$=\frac{-768+112+84}{-28\cdot 49}=\frac{572}{1372}=\frac{143}{343}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c=2$ pro implicitní funkci $y=y(x)$.

$T_2(x)=y(2)+y'(2)\cdot(x-2)+\frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2=-2-\frac{4}{7}(x-2)+\frac{143}{686}(x-2)^2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

4.1. a) **Co je neznámou** v obyčejné diferenciální rovnici? Neznámou je funkce $y=y(x)$ $\boxed{1}$

b) Co **musí** být nutně obsaženo v zápise dif. rovnice 1. řádu? ... první derivace neznámé funkce y' $\boxed{1}$

c) Co **může** (ale nemusí) být obsaženo v zápise dif. rovnice 1. řádu? – neznámá funkce y $\boxed{1}$
– nezávisle proměnná x $\boxed{1}$

d) Co je vždy obsaženo v **zápise obecného řešení** dif. rovnice 1. řádu (kromě y, x)? $\boxed{1}$
– libovolná konstanta $C\in R$

4.2. $y'.e^y=-\frac{1}{\sin^2 x}$ je daná diferenciální rovnice;
a) najděte její obecné řešení;
b) najděte partikulární řešení dané diferenciální rovnice tak, aby $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

$\frac{dy}{dx}\cdot e^y=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$e^y\cdot dy=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\boxed{1}$

$\int e^y\cdot dy=\int-\frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ $e^y=\operatorname{cotg} x+C\ /\ln(\ )$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$y=\ln(\operatorname{cotg} x+C)$ $\boxed{1}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow 1=\ln(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}+C)\ /e^{(\ )}$ $\boxed{1}$

$e=0+C\Rightarrow C=e-0$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow y_P=\ln(\operatorname{cotg} x+e)$ $\boxed{1}$

4.3. Je dána diferenciální rovnice $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}$. a) Jaká je to dif. rovnice? – homogenní; $\boxed{1}$ – 1. řádu $\boxed{1}$

b) Najděte obecné řešení dané diferenciální rovnice. *Využijte substituci:* $u=\frac{y}{x}$, *tedy* $y=x\cdot u$ $\boxed{1}$ a $y'=u+x\cdot u'$ $\boxed{1}$

$\cancel{u}+x\cdot u'=\cancel{u}+u^{\frac{1}{2}}$ $\boxed{1}$

$x\cdot\frac{du}{dx}=u^{\frac{1}{2}}$

$\frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}=\frac{dx}{x}$ $\boxed{1}$

$\int u^{-\frac{1}{2}}du=\int\frac{1}{x}dx$ $\boxed{1}$

$\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\ln|x|+C;\ C\in R$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\sqrt{u}=\frac{1}{2}(\ln|x|+C)\ /(\ )^2$

$u=\frac{1}{4}(\ln|x|+C)^2$ $\boxed{1}$

$\frac{y}{x}=\frac{1}{4}(\ln|x|+C)^2$

$y=\frac{1}{4}x(\ln|x|+C)^2$ $\boxed{1}$

5	6	7	8

$\sum$ 5-8

.... datum .... stud. obor .... ročník .... osobní číslo - STAG .... student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice 2. řádu $y'' - 6.y' + 9.y = 0$. $\boxed{1}$

Char. rovnice: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ $\boxed{1}$ Kořeny: $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$ - jeden dvojnásobný

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$ $\boxed{1}$ $y_h = C_1 \boxed{1} e^{3x} + C_2 \boxed{1} x \cdot e^{3x}$; $C_1, C_2 \in R$

b) Na základě speciálního tvaru pravé strany najděte partikulární řešení diferenciální rovnice
$y'' - 6.y' + 9.y = 14.\sin x + 2.\cos x$. ($g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x)\cos(\beta.x) + P_2(x)\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x)\cos(\beta.x) + Q_2(x)\sin(\beta.x)]$)

Speciální tvar pravé strany: $14 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x \boxed{1} = e^{\alpha x} \cdot [P_1(x) \cdot \cos(\beta x) + P_2(x) \cdot \sin(\beta \cdot x)]$ $\boxed{1}$

$\alpha = 0$; $\beta = 1$; $P_1(x) = 2$; $P_2(x) = 14$; $\alpha + \beta i = 0 + i = i \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow k \boxed{1} = 0$

Partikulární řešení:

$y_p = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$ $\boxed{1}$

$y'_p = -A \sin x + B \cdot \cos x$ $\boxed{1}$

$y''_p = -A \cos x - B \cdot \sin x$ $\boxed{1}$

Dosazení: $-A \cdot \cos x - B \cdot \sin x + 6 \cdot A \sin x - 6 \cdot B \cdot \cos x + 9A\cos x + 9B\sin x = 2 \cdot \cos x + 14 \cdot \sin x$ $\boxed{1}$

Porovnání: $\cos x: 8A - 6B = 2$ $\boxed{1}$

$\sin x: 6A + 8B = 14$ $\boxed{1}$

$4A - 3B = 1$

$3A + 4B = 7$

$D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 25$

$D_A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 21 = 25 \Rightarrow A = \frac{D_A}{D} = \frac{25}{25} = 1$ $\boxed{1}$

$D_B = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 3 = 25 \Rightarrow B = \frac{D_B}{D} = \frac{25}{25} = 1$ $\boxed{1}$

$y_p = \cos x + \sin x$ $\boxed{1}$

c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 6.y' + 9.y = 14.\sin x + 2.\cos x$
(využijte předchozí výsledky).

$y = y_p + y_h = \cos x + \sin x + C_1 e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}$, $C_1, C_2 \in R$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

6.1. a) Zapište pomocí dvojného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M \subset R^2$. $\mu(M) = \iint_M 1 \cdot dx \cdot dy$ $\boxed{1}$

6.2. b) Zapište pomocí dvojnásobného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M = \{(x, y); a \le x \le b \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ $\mu(M) = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} 1 \cdot dy$ $\boxed{1}$

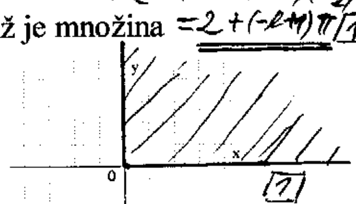
6.3 Množina $I = \underbrace{(-1;1)}_{x} \times \underbrace{\langle 1;e \rangle}_{y}$, vypočítejte $\iint_I \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).dx.dy = \int_{-1}^{1} dx \int_1^e \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dy =$

$= \int_{-1}^{1} \left[\ln|y| - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{y=1}^{y=e} dx = \int_{-1}^{1} \left(\ln e - \frac{e}{\sqrt{1-x^2}} - \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{-e+1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \left[x + (-e+1)\arcsin x\right]_{-1}^{1} =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \lim_{x \to 1^-} (x + (-e+1)\arcsin x) - \lim_{x \to -1^+} (x + (-e+1)\arcsin x) = 1 + (-e+1)\frac{\pi}{2} - (-1 + (-e+1)(-\frac{\pi}{2})) =$

6.4 Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál, v němž je množina $= 2 + (-e+1)\pi$ $\boxed{1}$

$A = \{(x;y) \in R^2; x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge 0 \le x^2 + y^2 < +\infty\}$. Množinu A načrtněte!



$\boxed{1}$

$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}.(1+x^2+y^2)}.dx.dy = \iint_{A_{\rho,\varphi}} \frac{1}{\rho \cdot (1+\rho^2)} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$x = \rho.\cos\varphi$

$y = \rho \cdot \sin\varphi$ $\boxed{1}$

$x^2 + y^2 = \rho^2$

$|J| = \rho$ $\boxed{1}$

$= \iint_{A_{\rho,\varphi}} \frac{1}{1+\rho^2} d\rho \cdot d\varphi =$

$A_{\rho,\varphi}: 0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\boxed{1}$

$= \int_0^\infty \frac{1}{1+\rho^2} d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 . d\varphi =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= [\operatorname{arctg} \rho]_0^\infty \cdot [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\lim_{\rho \to +\infty} \operatorname{arctg} \rho - \operatorname{arctg} 0) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-080625-3-(4)

7.1. Je dána křivka $\kappa = \{(x,y,z)\in R^3; x = 2.t \wedge y = 2.t \wedge z = t \wedge t \in \langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle\}$ a skalární funkce

$f(x,y,z)=\cos(x-z)+\sin(y-z)+4.\cos(x-y)$. $|\dot{x} = 2$; $\dot{y} = 2$; $\dot{z} = 1$; $ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = 3\cdot dt$ $\boxed{1}$

a) Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu $\int_\kappa f(x,y,z).ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt =$ $\boxed{1}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t-t)+\sin(2t-t)+4\cdot\cos(2t-2t))\cdot 3\cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t+\sin t+4)\cdot 3\cdot dt = [\sin t-\cos t+4t]_0^{\frac{\pi}{2}} 3 =$ $\boxed{1}$

$= [\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + 4\cdot\frac{\pi}{2} - (\sin 0 - \cos 0 - 4\cdot 0)]3 = 1+2\pi+1 = \underline{\underline{6+6\pi}}$ $\boxed{1}$

7.2 Difeomorfizmus $\bar{g}: \begin{cases} x = u.\cos v \\ y = u.\sin v \\ z = u \end{cases}$ zobrazuje obdélník $\overline{\Omega} \subset R^2$, $\overline{\Omega}: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2.\pi \end{cases}$ na plášť

kužele $L \subset R^3$. Vypočtěte plošný integrál ze skalární funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ přes plášť kužele (L), tj. $\iint_{(L)} f.d\sigma = \iint_{\Omega} f(x(u,v),\dots)\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv = \iint_{\Omega}(u^2\cdot\cos^2 v + u^2\cdot\sin^2 v + u)\cdot\sqrt{2}\,u\,du\,dv =$ $\boxed{1}$

$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + 1^2 = 2$ $\boxed{1}$

$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = (u\cdot(-\sin v))^2 + (u\cdot\cos v)^2 + 0^2 = u^2$ $\boxed{1}$

$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = \cos v\cdot u\cdot(-\sin v) + \sin v\cdot u\cdot\cos v + 1\cdot 0 = 0$ $\boxed{1}$

$d\sigma = \sqrt{g_{11}\cdot g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv = \sqrt{2\cdot u^2 - 0^2}\,du\,dv = \sqrt{2}\,u\,du\,dv$ $\boxed{1}$

$= \iint_{\Omega}(u^3+u^2)\sqrt{2}\,du\,dv =$ $\boxed{1}$ $= \int_0^1 du \int_0^{2\pi}(u^3+u^2)\sqrt{2}\cdot dv =$ $\boxed{1}$ $= \sqrt{2}\int_0^1(u^3+u^2)du\cdot\int_0^{2\pi}1\cdot dv = \sqrt{2}\left[\frac{u^4}{4}+\frac{u^3}{3}\right]_0^1\cdot[v]_0^{2\pi} =$ $\boxed{1}$ $= \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot 2\pi = \frac{7}{12}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2} = \frac{7\pi\sqrt{2}}{6}$ $\boxed{1}$

8. Je dána vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (x+y\,;\,x.y)$ v R^2, tj. $f_1(x,y) = x+y$ a $f_2(x,y) = x.y$ a po částech hladká křivka $\kappa = \kappa_1 \cup \kappa_2 \cup \kappa_3$, kde $\kappa_1 = \{(x,y)\in R^2; x = t \wedge y = 0 \wedge t\in\langle 0;1\rangle\}$,
$\kappa_2 = \{(x,y)\in R^2; x = 1-t \wedge y = 2.t \wedge t\in\langle 0;1\rangle\}$, $\kappa_3 = \{(x,y)\in R^2; x = 0 \wedge y = 2-2.t \wedge t\in\langle 0;1\rangle\}$.

Dále je dána množina $M = \{(x,y)\in R^2; 0\le x\le 1 \wedge 0 \le y \le 2-\cancel{2}x\}$, je to trojúhelník, jehož okraj (obvod) je tvořen křivkou κ. Množinu M a křivku κ zakreslete dole do souř. soustavy.

a) Pro kř. κ_1 vyjádřete $dx = 1\cdot dt$; $dy = 0\cdot dt$; $d\vec{s} = (1,0)\,dt$ $\boxed{1}$ a vypočtěte $\int_{\kappa_1} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^1 (t+0; t\cdot 0)(1,0)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ $\boxed{1}$

b) Pro kř. κ_2 vyjádřete $dx = (-1)dt$; $dy = 2\cdot dt$; $d\vec{s} = (-1,2)\,dt$ $\boxed{1}$ a vypočtěte $\int_{\kappa_2} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^1 (1+t; 2t-2t^2)\cdot(-1,2)\,dt =$ $\boxed{1}$

$= \int_0^1 (-1-t+4t-4t^2)\,dt = \int_0^1(-1+3t-4t^2)\,dt = \left[-t+\frac{3}{2}t^2-\frac{4}{3}t^3\right]_0^1 = -1+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}-0 = \frac{-6+9-8}{6} = -\frac{5}{6}$ $\boxed{1}$

c) Pro kř. κ_3 vyjádřete $dx = 0\cdot dt$; $dy = (-2)dt$; $d\vec{s} = (0,-2)\,dt$ $\boxed{1}$ a vypočtěte $\int_{\kappa_3} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^1 (0+2-2t; 0)(0,-2)\,dt = \int_0^1 0.dt = 0$ $\boxed{1}$

d) Vyjádřete obecně a vypočtěte $\oint_\kappa \vec{F}.d\vec{s} = \int_\kappa \vec{F}.d\vec{s} = \int_{\kappa_1}\vec{F}.d\vec{s} + \int_{\kappa_2}\vec{F}.d\vec{s} + \int_{\kappa_3}\vec{F}.d\vec{s} = \frac{1}{2}-\frac{5}{6}+0 = \frac{3-5}{6} = -\frac{1}{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

e) Vypočtěte $\iint_M \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} dx.dy = \iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx.dy = \iint_M (y-1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-x}(y-1)\,dy =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2}-y\right]_0^{2-x} = \int_0^1\left(\frac{4-4x+x^2}{2}-2+x\right)dx =$ $\boxed{1}$

$= \int_0^1\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

f) Co se značí symbolickým zápisem $\oint_\kappa \vec{F}.d\vec{s}$? Křivkový integrál 2. druhu po uzavřené křivce, tj. cirkulace

g) Jaký vztah platí mezi $\oint_\kappa \vec{F}.d\vec{s}$ a $\iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx.dy$? Oba integrály se rovnají! $\boxed{1}$

h) Jak je pojmenována matematická věta, která říká, jaký je vztah mezi uvedenými integrály? Greenova věta $\boxed{1}$