

1	2	3	4
---	---	---	---

Σ 1-4	Σ 5-8
-------	-------

Σ 1-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Je dán bod $A = [0; 2; 1]$ a skalární funkce $f(x; y; z) = \frac{z - y^3}{z} \cdot (2 + \ln(5 \cdot x + 1))$.

a) Určete parciální derivace funkce $f(x; y; z)$ v bodě A .

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(A) =$$

b) Napište, co je gradient a jak se vypočítá, určete hodnotu gradientu zdané funkce $f(x; y; z)$ v daném bodě A danou funkcí. Tj. $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) =$

c) Zapište obecně, jak se vypočte pomocí gradientu směrová derivace, určete její hodnotu pro danou funkci $f(x; y; z)$, daný bod A a daný směr $\vec{s} = (-1; 3; 5)$.

$$\text{Tj. } f'_s(A) = \frac{df}{d\vec{s}}(A) =$$

2. a) Vysvětlíte, co platí pro přírůstek funkce $f(X)$ o n proměnných $X = (x_1, \dots, x_n)$, když je funkce $f(X)$ je v bodě $C = (c_1, \dots, c_n) \in Df$ **diferencovatelná**.

Tj. : Funkce $f(X)$ je v bodě C **diferencovatelná**, když $f(C + H) - f(C) =$

b) Zapište diferenciál funkce $f(X)$ v bodě C pro přírůstky $H = (h_1; \dots; h_n)$. Tj. $df_C(H) =$

c) Zapište obecně diferenciál funkce $f(X)$ v bodě X pro $d\vec{x} = (dx_1; \dots; dx_n)$. Tj. $df =$

b) Je dána funkce $f(x; y; u) = \sqrt{x} \cdot y^2 + (2 \cdot y - 3 \cdot u)^2$ a bod $C = (x_c; y_c; u_c) = (4; 2; 3)$.

Zapište df_C (tj. diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x}$) a $df_C(0,01; 0,02; -0,01)$, tj. diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstky $d\vec{x} = (0,01; 0,02; -0,01)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(C) =$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} = \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(C) =$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} = \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(C) =$$

$$df_C =$$

$$\left| df_C(0,01; 0,02; -0,01) = \right.$$

c) Veličina z je funkcí proměnných x, y, u , tj. $z = f(x; y; u) = \sqrt{x} \cdot y^2 + (2 \cdot y - 3 \cdot u)^2$.

Měřením bylo zjištěno, že $x = (x \pm \Delta x) = (4,00 \pm 0,01)$, $y = (y \pm \Delta y) = (2,00 \pm 0,02)$ a

$u = (u \pm \Delta u) = (3,00 \pm 0,01)$. Určete střední hodnotu z , napište obecný vztah pro absol. chybu

Δz veličiny z a vypočtete ji. (Využijte předchozího diferenciálu df_C). Tedy $\bar{z} =$

$$\Delta z = \quad z = (\bar{z} \pm \Delta z) = (\quad \pm \quad)$$

3. a) Ověřte, že rovnicí $x \cdot y^2 + 2 \cdot y^4 - x^2 = 0$ a bodem $A = [2; 1]$ je určena implicitně funkce $f : y = y(x)$ taková, že $y(2) = 1$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(2)$.

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(2)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 2$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$$T_2(x) =$$

4.1. V čem se liší diferenciální rovnice

2. řádu od diferenciální rovnice 1. řádu ?

4.2. Najděte obecné řešení diferen-

ciální rovnice $y' - 1 = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.3. Najděte obecné řešení diferen-

ciální rovnice $y'' = \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}$.

4.4. Ověřte, zda daná diferenciální rovnice je exaktní, v případě, že ano, najděte její obecné řešení. $6 \cdot x + 5 \cdot y - 1 + (7 + 5 \cdot x + 6 \cdot y^2)y' = 0$. $P(x, y) =$; $Q(x, y) =$

5	6	7	8
---	---	---	---

Σ 5-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 10.y' + 26.y = 0$.

5. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 10.y' + 26.y = 25.\cos x + 10.\sin x. \quad (g(x) = e^{ax} [P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)]; \quad y_p = x^k.e^{ax} [Q_1(x).\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)])$$

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 10.y' + 26.y = 25.\cos x + 10.\sin x$ (využijte předchozí výsledky).

6.1 Orientovaná prostorová křivka κ je $\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a; b \rangle\}$

a) Uveďte, kdy je parametricky

určená prostorová křivka **hladká**

b) Uveďte, kdy je parametricky

určená prostorová křivka **regulární**

c) Definujte, kdy je

orientovaná cesta uzavřená

d) Definuje, co je

církulace vektorového pole.

6.2. Je dána hladká orientovaná křivka $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = \frac{t^2}{2} \wedge y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \wedge z = t \wedge t \in \langle 0; 1 \rangle \right\}$

Určete : $\dot{x} =$; $\dot{y} =$; $\dot{z} =$; $ds =$

$dx =$; $dy =$; $dz =$; $d\vec{s} =$

a) Napište obecný vztah a vypočítejte křivkový integrál ze skalární $f(x, y, z) = 10.x + z^2$, tj.

$$\int_{\kappa} f(x, y, z) ds =$$

κ

b) Napište obecný vztah a vypočítejte křivkový z vekt. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = (4.x; 3.y; z^2)$, tj.

$$\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

κ

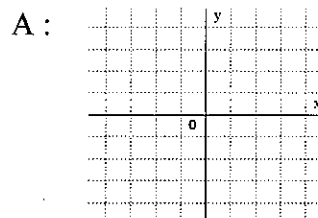
7. a) Vypočítejte integrál $\iint_M (\sin x + 3 \cos y) dx dy =$

$$M: 0 \leq x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

b) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál, v němž je množina

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}. \text{ Množinu } A \text{ načrtněte!}$$



$$\iint_A \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy =$$

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y =$$

$$x^2 + y^2 =$$

$$A_{\rho, \varphi}: \begin{aligned} &\leq \rho \leq \\ &\leq \varphi \leq \end{aligned}$$

$$|J| =$$

8.1 Difeomorfismus $\vec{g}: \begin{cases} x = 1 \\ y = u + v \\ z = u \end{cases}$ zobrazuje množinu $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega: \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u^3 \end{cases}$ na orient.

hladký list $L \subset \mathbb{R}^3$. Vypočítejte plošný integrál z vektorové funkce

$$\vec{F}(x, y, z) = (f_1; f_2; f_3) = (z \cdot e^x; y \cdot z \cdot e^x; z^2 \cdot e^x) \text{ přes } (L), \text{ tj. } \iint_{(L)} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} =$$

8.2 Podle Gaussovy – Ostrogradského věty je plošný integrál z vektorového $\vec{F}(x, y, z)$ pole přes uzavřenou plochu $(\text{hr } M)$, která je hranicí uzavřené omezené oblasti $M \subset \mathbb{R}^3$, roven trojnému integrálu z divergence vektorového pole přes množinu M .

Je dáno vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (f_1; f_2; f_3) = (z \cdot e^x; y \cdot z \cdot e^x; z^2 \cdot e^x)$ a množina $M: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$, tj.

tříboký hranol v $\mathbb{R}^3$. Použitím G-O věty vypočítejte plošný integrál 2. druhu přes kladně orientovaný uzavřený povrch tříbokého hranolu, tj. přes orientovanou plochu $(\text{hr } M)$.

Řešení: $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} =$

$$\oiint_{(\text{hr } M)} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_M \text{div } \vec{F} \cdot dx \cdot dy \cdot dz =$$

1	2	3	4
---	---	---	---

Σ 1-4	Σ 5-8
-------	-------

Σ 1-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Je dán bod $A = [0; 2; 1]$ a skalární funkce $f(x; y; z) = \frac{z-y^3}{z} \cdot (2 + \ln(5x+1)) = (1 - y^3 \cdot z^{-1}) \cdot (2 + \ln(5x+1))$

a) Určete parciální derivace funkce $f(x; y; z)$ v bodě A .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-y^3}{z} \cdot \frac{5}{5x+1} \Big|_A = \frac{1-2^3}{1} \cdot \frac{5}{5 \cdot 0 + 1} = -35 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = -35$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3y^2}{z} (2 + \ln(5x+1)) \Big|_A = -\frac{3 \cdot 2^2}{1} (2 + \ln(5 \cdot 0 + 1)) = -24 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -24$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y^3}{z^2} (2 + \ln(5x+1)) = \frac{2^3}{1^2} (2 + \ln(1)) = 8 \quad \frac{\partial f}{\partial z}(A) = 8$$

b) Napište, co je gradient a jak se vypočítá, určete hodnotu gradientu zdané funkce $f(x; y; z)$

v daném bodě A danou funkcí. Tj. $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) = (-35; -24; 8)$

c) Zapište obecně, jak se vypočte pomocí gradientu směrová derivace, určete její hodnotu pro danou funkci $f(x; y; z)$, daný bod A a daný směr $\vec{s} = (-1; 3; 5)$.

$$\text{Tj. } f'_s(A) = \frac{df}{ds}(A) = \overrightarrow{\text{grad}} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = (-35; -24; 8) \cdot \frac{(-1; 3; 5)}{\sqrt{1+9+25}} = \frac{35-72+40}{\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

2. a) Vysvětlete, co platí pro přírůstek funkce $f(X)$ o n proměnných $X = (x_1, \dots, x_n)$, když je funkce $f(X)$ je v bodě $C = (c_1, \dots, c_n) \in Df$ diferencovatelná.

Tj. : Funkce $f(X)$ je v bodě C diferencovatelná, když $f(C+H) - f(C) = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + o(H)$,
 kde $a_1 h_1 + \dots + a_n h_n = df_C(H)$ je diferenciál a $o(H)$ je funkce přírůsteků $h_1, \dots, h_n$, pro níž je $\lim_{H \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{o(H)}{\|H\|} = 0$.
 Diferenciál je lineární funkce přírůsteků $h_1, \dots, h_n$ proměnných $(x_1, \dots, x_n)$.

b) Zapište diferenciál funkce $f(X)$ v bodě C pro přírůsteky $H = (h_1; \dots; h_n)$. Tj. $df_C(H) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(C) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(C) h_n$

c) Zapište obecně diferenciál funkce $f(X)$ v bodě X pro $d\vec{x} = (dx_1; \dots; dx_n)$. Tj. $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

b) Je dána funkce $f(x; y; u) = \sqrt{x} \cdot y^2 + (2y + 3u)^2$ a bod $C = (x_c; y_c; u_c) = (4; 2; 3)$.

Zapište df_C (tj. diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x}$) a $df_C(0,01; 0,02; -0,01)$, tj.

diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x} = (0,01; 0,02; -0,01)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot y^2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(C) = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6u \quad \frac{\partial f}{\partial y}(C) = 12 \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 6(2y + 3u) = 6(2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = 45 \quad \frac{\partial f}{\partial u}(C) = 15$$

$$df_C = 1 \cdot dx + 12 \cdot dy + 15 \cdot du \quad | \quad df_C(0,01; 0,02; -0,01) = 1 \cdot 0,01 + 12 \cdot 0,02 + 15 \cdot (-0,01) = -0,08$$

c) Veličina z je funkcí proměnných x, y, u , tj. $z = f(x; y; u) = \sqrt{x} \cdot y^2 + (2y + 3u)^2$.

Měřením bylo zjištěno, že $x = (\bar{x} \pm \Delta x) = (4,00 \pm 0,01)$, $y = (\bar{y} \pm \Delta y) = (2,00 \pm 0,02)$ a

$u = (\bar{u} \pm \Delta u) = (3,00 \pm 0,01)$. Určete střední hodnotu a absolutní chybu veličiny z . (Využijte

předchozího diferenciálu df_C). Tedy $\bar{z} = f(4, 2, 3) = \sqrt{4} \cdot 2^2 + (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3)^2 = 3$

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \Delta u = \quad z = (\bar{z} \pm \Delta z) = (3,00 \pm 0,40)$$

$$= 1 \cdot 0,01 + 12 \cdot 0,02 + 15 \cdot 0,01 =$$

$$= 0,01 + 0,24 + 0,15 = 0,40$$

3. a) Ověřte, že rovnici $x \cdot y^2 + 2 \cdot y^4 - x^2 = 0$ a bodem $A = [2; 1]$ je určena implicitně

funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(2) = 1$. $F(x, y) = x \cdot y^2 + 2 \cdot y^4 - x^2$ Danou rovnici a bodem A je určena implicitně funkce $y = y(x); y(2) = 1$
 $F(2, 1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^4 - 2^2 = 0$ - splněno $F(A) = 0$ - splněno
 $\frac{\partial F}{\partial y} = 2 \cdot x \cdot y + 8 \cdot y^3$; $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1^3 = 12 \neq 0$ - splněno

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(2)$.

$$x \cdot y^2 + 2 \cdot y^4 - x^2 = 0 \quad \bigg| \frac{d}{dx}$$

$$y^2 + 2x \cdot y \cdot y' + 8 \cdot y^3 \cdot y' - 2x = 0$$

$$(2x \cdot y + 8 \cdot y^3) \cdot y' = 2x - y^2$$

$$y' = \frac{2x - y^2}{2x \cdot y + 8 \cdot y^3}; \quad y'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1^3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(2)$.

$$y^2 + 2x \cdot y \cdot y' + 8 \cdot y^3 \cdot y' - 2x = 0 \quad \bigg| \frac{d}{dx}$$

$$2 \cdot y \cdot y' + 2 \cdot y \cdot y' + 2x \cdot (y')^2 + 2x \cdot y \cdot y'' + 24 \cdot y^2 \cdot (y')^2 + 8 \cdot y^3 \cdot y'' - 2 = 0$$

$$(2x \cdot y + 8 \cdot y^3) \cdot y'' = 2 - 4 \cdot y \cdot y' - 2x \cdot (y')^2 - 24 \cdot y^2 \cdot (y')^2$$

$$y'' = \frac{2 - 4 \cdot y \cdot y' - 2x \cdot (y')^2 - 24 \cdot y^2 \cdot (y')^2}{2x \cdot y + 8 \cdot y^3}$$

$$y''(2) = \frac{2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 2 \cdot (\frac{1}{4})^2 - 24 \cdot 1^2 \cdot (\frac{1}{4})^2}{2 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1^3} = \frac{2 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{6}{4}}{12} = \frac{-\frac{3}{4}}{12} = -\frac{1}{16}$$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 2$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$$T_2(x) = y(2) + y'(2) \cdot (x-2) + \frac{y''(2)}{2!} \cdot (x-2)^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot (x-2) - \frac{1}{32} \cdot (x-2)^2$$

4.1. V čem se liší diferenciální rovnice 2. řádu od diferenciální rovnice 1. řádu? V diferenciální rovnici 2. řádu

4.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - 1 = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je obsaženo druhá derivace neznámé funkce, kdežto v dif. rovnici 1. řádu je obsaženo jen 1. derivace neznámé funkce

$$y' - 1 = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = x - \arcsin x + C; C \in \mathbb{R}$$

4.3. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' = \frac{2x}{x^2+1}$.

$$y'' = \frac{2x}{x^2+1} \quad y' = \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x^2+1| + C_1$$

$$y = \int [\ln(x^2+1) + C_1] dx = \int \ln(x^2+1) dx + C_1 x + C_2$$

$$= x \cdot \ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1} dx + C_1 x + C_2 = x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan x + C_1 x + C_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

4.4. Ověřte, zda daná diferenciální rovnice je exaktní, v případě, že ano, najděte její obecné

řešení. $6x + 5y - 1 + (7 + 5x + 6y^2)y' = 0$. $P(x, y) = 6x + 5y - 1$; $Q(x, y) = 7 + 5x + 6y^2$

Test: $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 5 - 5 = 0 \Rightarrow$ Dif. rovnice je exaktní $\Rightarrow$ existuje potenciální funkce $U(x, y)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 6x + 5y - 1 \Rightarrow U = \int (6x + 5y - 1) dx = 3x^2 + 5xy - x + f_1(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 7 + 5x + 6y^2 \Rightarrow U = \int (7 + 5x + 6y^2) dy = 7y + 5xy + 2y^3 + f_2(x)$$

$$\Rightarrow U(x, y) = 3x^2 - x + 5xy + 7y + 2y^3$$

Řešením dif. rovnice je (implicitně) zadaná funkce $y = y(x)$, která je zadaná rovnici: $3x^2 - x + 5xy + 7y + 2y^3 = C, C \in \mathbb{R}$

5	6	7	8
---	---	---	---

Σ 5-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 10y' + 26y = 0$.

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 10\lambda + 26 = 0$ Kořeny: $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 104}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2} = 5 \pm i$

rovnice: $D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$
 Obecné řešení: $y_h = C_1 \cdot e^{5x} \cdot \cos x + C_2 \cdot e^{5x} \cdot \sin x; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

5. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice

$y'' - 10y' + 26y = 25 \cos x + 10 \sin x$. $(g(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x)]; y_p = x^k \cdot e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x)])$

Spec. tvar pravé strany: $25 \cos x + 10 \sin x = e^{0x} [P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x)] \Rightarrow$

$\alpha = 0; \beta = 1; P_1(x) = 25; P_2(x) = 10; \alpha + \beta i = 0 + i \equiv i \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow k = 0$

Jedno partikulární řešení:

$y_p = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$

$y_p' = -A \sin x + B \cdot \cos x$

$y_p'' = -A \cdot \cos x - B \cdot \sin x$

Dosazení: $-A \cos x - B \sin x + 10A \sin x - 10B \cos x + 26A \cos x + 26B \sin x = 25 \cos x + 10 \sin x$

Porovnání: $\cos x: 25A - 10B = 25 \quad | :5$

$\sin x: 10A + 25B = 10 \quad | :5$

$5A - 2B = 5 \quad | \cdot 5 \Rightarrow 25A - 10B = 25$

$2A + 5B = 2 \quad | \cdot 2 \Rightarrow 4A + 10B = 4$

$29A = 29 \Rightarrow A = 1 \quad B = 0$

$y_p = \cos x$

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 10y' + 26y = 25 \cos x + 10 \sin x$

(využijte předchozí výsledky). $y = y_p + y_h = \cos x + C_1 e^{5x} \cos x + C_2 e^{5x} \sin x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

6.1 Orientovaná prostorová křivka κ je $\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in (a; b)\}$

a) Uveďte, kdy je parametricky určená prostorová křivka hladká - když funkce $x(t), y(t), z(t)$ mají spojitě první derivace

b) Uveďte, kdy je parametricky určená prostorová křivka regulární - když $\forall t \in (a, b)$ platí, že $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right] \neq [0, 0, 0]$

c) Definujte, kdy je orientovaná cesta uzavřená - když její koncový bod je totožný s jejím počátečním bodem

d) Definuje, co je cirkulace vektorového pole - je to krátkový integrál 2. druhu po uzavřené orientované cestě.

6.2. Je dána hladká orientovaná křivka $\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = \frac{t^2}{2} \wedge y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \wedge z = t \wedge t \in (0; 1)\}$

Určete: $x = \frac{t^2}{2}; y = \sqrt{2} \cdot t^{\frac{3}{2}}; z = t$; $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt = (t+1) dt$

$dx = t \cdot dt; dy = \sqrt{2} \sqrt{t} dt; dz = dt$; $d\vec{s} = (dx, dy, dz) = (t; \sqrt{2}t; 1) dt$

a) Napište obecný vztah a vypočítejte krátkový integrál ze skalární $f(x, y, z) = 10x + z^2$, tj.

$\int_{\kappa} f(x, y, z) ds = \int_0^1 (10 \cdot \frac{t^2}{2} + t^2) (t+1) dt = \int_0^1 (5t^2 + t^2) (t+1) dt = \int_0^1 (6t^3 + 6t^2) dt = \left[\frac{3}{2} t^4 + 2t^3 \right]_0^1 = \frac{3}{2} + 2 = 3,5$

b) Napište obecný vztah a vypočítejte krátkový z vekt. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = (4x; 3y; z^2)$, tj.

$\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \left(\frac{4t^2}{2}; 2\sqrt{2} \cdot t \cdot \sqrt{t}; t^2 \right) \cdot (t; \sqrt{2} \sqrt{t}; 1) dt = \int_0^1 (2t^3 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} + t^2) dt = \int_0^1 (2t^3 + 4t^2 + t^2) dt = \int_0^1 (2t^3 + 5t^2) dt = \left[\frac{t^4}{2} + \frac{5}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3+10}{6} = \frac{13}{6} = 2 \frac{1}{6}$

Obecný vztah:

$\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b (f_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + f_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + f_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)) dt$

7. a) Vypočítejte integrál $\iint_M (\sin x + 3 \cos y) dx dy = \int_0^\pi dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3 \cos y) dy =$

M: $0 \leq x \leq \pi$
 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

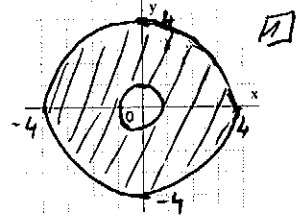
$$= \int_0^\pi \left[y \cdot \sin x + 3 \cdot \sin y \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^\pi \left[\frac{\pi}{2} \cdot \sin x + 3 \cdot \sin \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \sin x + 3 \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] dx$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} \sin x + 3 + \frac{\pi}{2} \sin x + 3 \right) dx = \int_0^\pi (\pi \sin x + 6) dx = \left[-\pi \cos x + 6x \right]_0^\pi = -\pi \cos \pi + 6\pi + \pi \cos 0 = 8\pi$$

b) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál, v němž je množina

$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. Množinu A načrtněte!

A:



$$\iint_A \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_{A_{\rho, \varphi}} \frac{(\rho^2)^{\frac{1}{4}}}{\rho} \rho \cdot d\rho d\varphi = \iint_{A_{\rho, \varphi}} \rho^{\frac{1}{2}} d\rho d\varphi =$$

$x = \rho \cdot \cos \varphi$

$y = \rho \cdot \sin \varphi$

$x^2 + y^2 = \rho^2$

$|J| = \rho$

$$= \int_1^4 \rho^{\frac{1}{2}} d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{2\rho^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^4 \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \rho \cdot \sqrt{\rho} \right]_1^4 \cdot 2\pi = \left[\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} \right] \cdot 2\pi = \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3} \right) \cdot 2\pi = \frac{28}{3} \cdot \pi$$

$A_{\rho, \varphi}: 1 \leq \rho \leq 4$
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
 $\frac{28}{3} \cdot \pi$

8.1 Difeomorfismus $\vec{g}: \begin{cases} x = 1 \\ y = u + v \\ z = u \end{cases}$ zobrazuje množinu $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, $\bar{\Omega}: \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1-u^3 \end{cases}$ na $\bar{M} \subset \mathbb{R}^3$. $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) = (ze^x; yze^x; z^2e^x)$ přes (L), tj. $\iint_L \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\bar{\Omega}} \vec{F}(\vec{g}(u, v)) \cdot \vec{g}_u \times \vec{g}_v du dv$

orient. hladký list $L \subset \mathbb{R}^3$. Vypočítejte plošný integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x, y, z) = (f_1; f_2; f_3) = (ze^x; yze^x; z^2e^x)$ přes (L), tj. $\iint_L \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\bar{\Omega}} \vec{F}(\vec{g}(u, v)) \cdot \vec{g}_u \times \vec{g}_v du dv$

$$= \iint_{\bar{\Omega}} -e \cdot u \cdot du dv = \int_0^1 du \int_0^{1-u^3} -e \cdot u dv = \int_0^1 [-e \cdot u \cdot v]_0^{1-u^3} du = \int_0^1 (-e \cdot u \cdot (1-u^3)) du = \int_0^1 (-e \cdot u + e \cdot u^4) du = \left[-\frac{e \cdot u^2}{2} + \frac{e \cdot u^5}{5} \right]_0^1 = -\frac{e}{2} + \frac{e}{5} = -\frac{3e}{10}$$

8.2 Podle Gaussovy – Ostrogradského věty je plošný integrál z vektorového $\vec{F}(x, y, z)$ pole přes uzavřenou plochu (hr M), která je hranicí uzavřené omezené oblasti $M \subset \mathbb{R}^3$, roven trojnásobnému integrálu z divergence vektorového pole přes množinu M.

Je dáno vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) = (f_1; f_2; f_3) = (ze^x; yze^x; z^2e^x)$ a množina $M: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 1$, tj.

tříboký hranol v $\mathbb{R}^3$. Použitím G-O věty vypočítejte plošný integrál 2. druhu přes kladně orientovaný uzavřený povrch tříbokého hranolu, tj. přes orientovanou plochu (hr M).

Řešení: $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2 \cdot e^x + 2 \cdot e^x + 2 \cdot e^x = 4e^x$

$$\iint_{(\text{hr } M)} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_M \text{div } \vec{F} dx dy dz = \iiint_M 4e^x dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^1 4e^x dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \left[4e^x \cdot z \right]_0^1 dy = \int_0^1 dx \int_0^x 4e^x dy = \int_0^1 dx \left[4e^x \cdot y \right]_0^x = \int_0^1 4x \cdot e^x dx =$$

$$= \left[4x \cdot e^x - 4e^x \right]_0^1 = 4e - 4 - (0 - 4) = 4e - 4 + 4 = 4e$$