FEI - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-080604-1-(1)

1	2	3	4

$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8

$\sum$ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Je dána skalární funkce $f(x;y;z)=\dfrac{x^3.(z-y^2)}{z}$ a bod $A=[-1;2;1]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)=$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)=$

b) Napište obecně a vypočítejte $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)=$

c) Napište obecně a vypočítejte derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A ve směru $\vec{s}=(1;2;-2)$.

$f'_{\vec{s}}(A)=\dfrac{df}{d\vec{s}}(A)=$

2. a) Funkce $f(X)$ o n proměnných má v bodě $C \in Df$ **(neostré) lokální minimum,** tedy dle definice existuje okolí $O(C)$ bodu C takové, že pro každé $X \in O(C)$ platí .... doplňte.

- Uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního minima v bodě A. ....

- Uveďte podmínku, která postačuje k tomu, aby funkce $f(x,y)$ **neměla** v bodě A lokální extrém.

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^3}{3}-x-4.y$ ....

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$

c) Najděte lokální extrémy funkce $z=f(x;y)=y.(x-4)$ vázané na množinu $y-e^x=0$.

3. a) Ověřte, že rovnicí $e^y + \cos y - x = 0$ a bodem $A = [2;0]$ je určena implicitně funkce $f : y = y(x)$ taková, že $y(2) = 0$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(2)$.

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(2)$.

d) Zapište Taylorův polynom 2. stupně v bodě $c = 2$ a) obecně a b) pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$y = y(x)$ $T_2(x) =$ ....

4.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů. ....

Co je neznámou v diferenciální rovnici ?

4.2. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \dfrac{y}{x+5} = 0$. ....

4.2. b) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \dfrac{y}{x+5} = (x+5)^2$. (Navažte na předchozí řešení)

Jaká metoda řešení se používá na řešení této diferenciální rovnice ....

4.2. c) Najděte partikulární řešení předchozí diferenciální rovnice tak, aby $y(0) = 1$.

FEI - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-080604-1-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 3.y = 0$.

5. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 3.y = 5.e^x$. ($g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x)\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)]$)

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice
$y'' - 4.y' + 3.y = 5.e^x$ (využijte oba předchozí výsledky).

6. a) Pro $J = \langle 0;1 \rangle \times \langle 0;\frac{\pi}{4} \rangle$ vypočítejte integrál $\iint_J \left(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{1}{1+x^2} \right).dx.dy =$

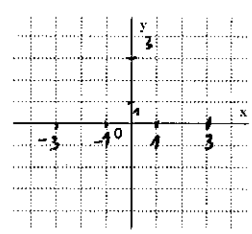
b) Vypočítejte integrál $\iiint_M \frac{1}{x}.dx.dy.dz =$

$M: \quad 1 \le x \le 2$

$\quad 1 \le y \le 2 + x$

$\quad 1 \le z \le 2 + x$

c) b) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál, v němž je množina $A = \{(x;y) \in R^2; y \ge 0 \wedge 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$. Množinu A načrtněte! A :



$$\iint_A \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,.\left(x^2+y^2\right)}.dx.dy =$$

$x =$

$y =$

$x^2 + y^2 =$

$|J| =$

$A_{\rho,\varphi}: \quad \le \rho \le$

$\quad \le \varphi \le$

7.1. Je dána obecně orientovaná křivka $\kappa = \{(x, y, z) \in R^3 ; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a; b \rangle\}$.

a) Zapište obecně křivkový integrál ze skalární funkce $f = f(x, y, z)$ podél křivky κ a vyjádřete, jak se křivkový integrál vypočítá pomocí jednoduchého integrálu. Zapište obecně $ds =$

b) Zapište obecně křivkový integrál z vektor. funkce $\vec{F}(x; y; z) = (f_1; f_2 f_3)$ podél orient. křivky κ a vyjádřete, jak se křivkový integrál vypočítá pomocí jednoduchého integrálu. Zapište obecně $d\vec{s} =$

7.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x, y, z) \in R^3 ; x = 2 + 4.t \wedge y = 2 - 4.t \wedge z = 2.t \wedge t \in \langle 0; 1 \rangle\}$. Vypočtěte :

$\dot{x} =$; $\dot{y} =$; $\dot{z} =$; $ds =$

$dx =$; $dy =$; $dz =$; $d\vec{s} =$

a) Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu podél křivky κ ze skalární funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x - 2}$,

tj. $\int_\kappa f(x, y, z).ds =$

b) Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu podél křivky κ z vekt. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2 f_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}; 1; 2\right)$,

tj. $\int_\kappa \vec{F}.d\vec{s} =$

8. V R^2 je dána množina $\overline{\Omega}: \begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le u \end{matrix}$ a je dán difeomorfizmus $\vec{g}: \begin{matrix} x = 1 + u^2 + v \\ y = -u^2 + v \\ z = -1 - v \end{matrix}$, který zobrazuje množinu $\overline{\Omega}$ na hladký list $L \subset R^3$, resp. na orientovaný hladký list $(L) \subset R^3$.

a) Vypočítejte plošný integrál 1. druhu ze skal. funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ přes hladký list L.

$\iint_L f.d\sigma =$

$g_{11} =$

$g_{22} =$

$g_{12} =$

$d\sigma =$

b) Vypočtěte plošný integrál 2. druhu z vekt. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = (x + z; 1; 1)$ přes orientovaný hladký list (L).

$\iint_{(L)} \vec{F}.d\vec{\sigma} =$

FEI - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-080604-1-(1)

1	2	3	4

Σ 1-4	Σ 5-8

Σ 1-8

……………… ……………… ……………… ……………………………… ………………………………………

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Je dána skalární funkce $f(x;y;z)=\dfrac{x^3.(z-y^2)}{z}$ a bod $A=[-1;2;1]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{3x^2(z-y^2)}{z}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)=\dfrac{3\cdot(-1)^2(1-2^2)}{1}=-9$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^3(-2y)}{z}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=\dfrac{(-1)^3(-2\cdot 2)}{1}=4$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{x^3 z-x^3(z-y^2)}{z^2}=\dfrac{x^3\cdot y^2}{z^2}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)=\dfrac{(-1)^3\cdot 2^2}{1^2}=-4$

b) Určete $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)$, tj. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(A);\dfrac{\partial f}{\partial y}(A);\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)\right)=(-9;4;-4)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

c) Určete derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s}=(1;2;-2)$

$f'_{\vec{s}}(A)=\dfrac{df}{d\vec{s}}(A)=\dfrac{\boxed{1}\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)\cdot\vec{s}}{\boxed{1}\ \|\vec{s}\|}=\dfrac{(-9;4;-4)\cdot(1;2;-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{\boxed{1}\ -9+8+8}{\boxed{1}\ \sqrt{9}}=+\dfrac{7}{3}$ (9)

2. a) Funkce $f(X)$ o n proměnných má v bodě $C\in Df$ **(neostré) lokální minimum,** tedy dle definice existuje okolí $O(C)$ bodu C takové, že pro každé $X\in O(C)$ platí $f(X)\geq f(C)$ doplňte. $\boxed{1}$

- Uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního minima v bodě A. $D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}>0$ $\boxed{1}$ $\wedge\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)>0$ $\boxed{1}$
- Uveďte podmínku, která postačuje k tomu, aby funkce $f(x,y)$ **neměla** v bodě A lokální extrém. $D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\end{vmatrix}<0$ $\boxed{1}$

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^3}{3}-x-4.y$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^3-1\ \boxed{1}\stackrel{!}{=}0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ Stacionární body: $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=y^2-4\ \boxed{1}\stackrel{!}{=}0\Leftrightarrow(y+2)(y-2)=0\Leftrightarrow y=-2\vee y=2;\ A_1=[1,-2];\ A_2=[1,2]$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=3x^2\big|_{A_1}=3\ \big|_{A_2}=3$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=0\big|_{A_1}=0\ \big|_{A_2}=0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2y\big|_{A_1}=-4\big|_{A_2}=4$

$D_{A_1}=\begin{vmatrix}3&0\\0&-4\end{vmatrix}=\boxed{1}-12<0\Rightarrow$ V A_1 lok. extrém nenastává $\boxed{1}$

$D_{A_2}=\begin{vmatrix}3&0\\0&4\end{vmatrix}\boxed{1}=12>0$ V bodě A_2 nastává lokální minimum $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_2)=3\stackrel{\boxed{1}}{>}0$

$f(A_2)=\dfrac{1^4}{4}+\dfrac{2^3}{3}-1-4\cdot 2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{3}-9=\dfrac{3+32-108}{12}=-\dfrac{73}{12}=-6\dfrac{1}{12}$ $\boxed{1}$ (11)

c) Najděte lokální extrémy funkce $z=f(x;y)=y.(x-4)$ vázané na množinu $y-e^x=0$. $\Rightarrow y=e^x$

$F(x)=f(x,e^x)=e^x(x-4)$ $\boxed{1}$

$F'(x)=e^x(x-4)\stackrel{\boxed{1}}{+}e^x=e^x(x-3)\stackrel{!}{=}0\Leftrightarrow x=3$ $\boxed{1}$ stac. bod

$F''(x)=e^x(x-3)+e^x\stackrel{\boxed{1}}{=}e^x(x-2);\ F''(3)=e^3(3-2)=+e^3>0$ $\boxed{1}$

$F(x)$ má v $x=3$ ostré lokální minimum $\boxed{1}$ $F(3)=e^3(3-4)=-e^3$

$f(x,y)$ má v bodě $[3;e^3]$ ostré lokální $\boxed{1}$ vázané minimum $f(3,e^3)=-e^3$ $\boxed{1}$

$F(x,y) = e^y + \cos y - x$

3. a) Ověřte, že rovnicí $e^y + \cos y - x = 0$ a bodem $A = [2;0]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(2) = 0$.

$F(A) = F(2,0) = e^0 + \cos 0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ - splněno $\boxed{1}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y - \sin y$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = e^0 - \sin 0 = 1 \neq 0$ splněno $\boxed{1}$

Danou rovnicí a bodem A je implicitně určena funkce $y = y(x)$ taková, že $y(2) = 0$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(2)$.

$e^y + \cos y - x = 0 \,/\, \frac{d()}{dx}$

$e^y \cdot y' - \sin y \cdot y' - 1 = 0$ $\boxed{1}$

$y'(e^y - \sin y) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y - \sin y}$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow y'(2) = \frac{1}{e^0 - \sin 0} = 1$ $\boxed{1}$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(2)$.

$e^y \cdot y' - \sin y \cdot y' - 1 = 0 \,/\, \frac{d()}{dx}$

$e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y'' - \cos y \cdot (y')^2 - \sin y \cdot y'' = 0$ $\boxed{1}$

$(e^y - \sin y) y'' = (\cos y - e^y) \cdot (y')^2$

$y'' = \frac{(\cos y - e^y) \cdot (y')^2}{e^y - \sin y}$ $\boxed{1}$

$y''(2) = \frac{(\cos 0 - e^0) \cdot 1^2}{e^0 - \sin 0} = 0$ $\boxed{1}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 2$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(2) + y'(2) \cdot (x-2) + \frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2 = 0 + 1(x-2) + \frac{0}{2!}(x-2)^2 = x - 2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

4.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů.

$F(x, y, y') = 0$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ x – nezávislé proměnná funkce $y = y(x)$

$\boxed{1}$ $y = y(x)$ – neznámá funkce

$\boxed{1}$ $y' = y'(x)$ – derivace neznámé funkce

Co je neznámou v diferenciální rovnici? Neznámou difer. rovnice je funkce $\boxed{1}$ $y = y(x)$

4.2. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{y}{x+5} = 0$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+5} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+5}$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+5} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x+5| + \ln|C|, C \in R$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln|C(x+5)| \Rightarrow y = C \cdot (x+5)$ $\boxed{1}$

4.2. b) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{y}{x+5} = (x+5)^2$. (Navažte na předchozí výsledek) Používá se metoda variace konstanty v řešení příslušné homog. dif. r. $\boxed{1}$

Očekávané řešení: $y = C(x+5)$ $\boxed{1}$, kde $C = C(x)$

$y' = C' \cdot (x+5) + C$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$ Dosazení do zadané dif. rovnice

$C' (x+5) + C - \frac{C(x+5)}{x+5} = (x+5)^2$ $\boxed{1}$

$C' = x + 5$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow C = \frac{x^2}{2} + 5x + K, K \in R$ $\boxed{1}$

Obecné řešení dané nehomogenní dif. rovnice je $y = \left(\frac{x^2}{2} + 5x + K\right)(x+5)$ $\boxed{1}$

tj. $y = \frac{x^3}{2} + \frac{15}{2}x^2 + (25+k)x + 5k$

4.2. c) Najděte partikulární řešení předchozí diferenciální rovnice tak, aby $y(0) = 1$.

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 1 \Rightarrow \left(\frac{0^2}{2} + 5 \cdot 0 + k\right)(0+5) = 1$ $\boxed{1}$

$5k = 1$

$k = \frac{1}{5}$

$y_p = \left(\frac{x^2}{2} + 5x + \frac{1}{5}\right)(x+5)$ $\boxed{1}$

FEI - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-080604-1-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 3.y = 0$.

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \; \boxed{1} \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \; \boxed{1}$

Obecné řešení homogenní dif. rovnice $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$, $C_1, C_2 \in R$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

5. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 3.y = 5.e^x$. ($g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x).\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)]$)

$g(x) = 5 \cdot e^x = e^{1 \cdot x}(5 \cdot \cos(0x) + 0 \cdot \sin(0 \cdot x)) \Rightarrow \alpha = 1; \beta = 0; \alpha + \beta i = 1 = \lambda_1 \Rightarrow k = 1$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$y_p = x^1 \cdot e^{1 \cdot x} (A \cos(0 \cdot x) + B \cdot \sin(0 \cdot x)) = A x \cdot e^x$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$y'_p = A e^x + A x \cdot e^x$ $\boxed{1}$

$y''_p = A e^x + A e^x + A x \cdot e^x$ $\boxed{1}$

Dosazení do zadání:

$2Ae^x + \cancel{Axe^x} - 4Ae^x - \cancel{4Axe^x} + \cancel{3Axe^x} = 5e^x$ $\boxed{1}$

$-2Ae^x = 5e^x \Rightarrow A = -\frac{5}{2}$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow y_p = -\frac{5}{2} x \cdot e^x$

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 3.y = 5.e^x$ (využijte oba předchozí výsledky).

$y = y_p + y_h = -\frac{5}{2} x \cdot e^x + C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

6. a) Pro $J = \langle 0;1 \rangle \times \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle$ vypočítejte integrál $\iint_J \left(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{1}{1+x^2} \right).dx.dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 y} + \frac{1}{1+x^2} \right) dy =$ $\boxed{1}$

$= \int_0^1 \left[\operatorname{tg} y + \frac{y}{1+x^2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \int_0^1 \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{\pi}{4}}{1+x^2} - 0 \right] dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \left[x + \frac{\pi}{4} \operatorname{arctg} x \right]_0^1 =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= 1 + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} - 0 = 1 + \frac{\pi^2}{16}$ $\boxed{1}$

b) Vypočítejte integrál $\iiint_M \frac{1}{x}.dx.dy.dz = \int_1^2 dx \int_1^{2+x} dy \int_1^{2+x} \frac{1}{x} dz =$ $\boxed{1}$

M: $1 \le x \le 2$

$1 \le y \le 2 + x$

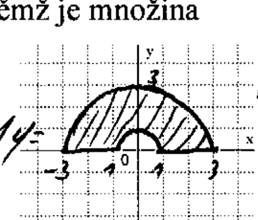
$1 \le z \le 2 + x$

$= \int_1^2 dx \int_1^{2+x} \left[\frac{z}{x} \right]_1^{2+x} dy = \int_1^2 dx \int_1^{2+x} \left[\frac{2+x}{x} - \frac{1}{x} \right] dy = \int_1^2 dx \int_1^{2+x} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dy =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \int_1^2 dx \left[\frac{y}{x} + y \right]_1^{2+x} = \int_1^2 \left[\frac{2+x}{x} + 2 + x - \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right] dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2 + x \right) dx = \left[\ln|x| + 2x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \ln 2 + 2 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \left(\ln 1 + 2 \cdot 1 + \frac{1^2}{2} \right) = \ln 2 + 4 + 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \ln 2$ $\boxed{1}$

c) b) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál, v němž je množina $A = \{(x;y) \in R^2; y \ge 0 \wedge 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$. Množinu A načrtněte! A :



$\boxed{1}$

$\iint_A \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)} .dx.dy = \iint_{A_{\rho\varphi}} \frac{\rho \cdot \sin\varphi}{\rho \cdot \rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi = \iint_{A_{\rho\varphi}} \frac{\sin\varphi}{\rho} d\rho d\varphi =$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$

$x^2 + y^2 = \rho$

$\boxed{1}$ $|J| = \rho$

$= \int_1^3 d\rho \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\rho} d\varphi = \int_1^3 \frac{d\rho}{\rho} \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi =$ $\boxed{1}$

$A_{\rho,\varphi}$: $1 \le \rho \le 3$ $\boxed{1}$

$0 \le \varphi \le \pi$ $\boxed{1}$

$= \left[\ln|\rho| \right]_1^3 \cdot \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi} =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= (\ln 3 - \ln 1) \left[-\cos\pi + \cos 0 \right] = \ln 3 \cdot 2 = 2 \cdot \ln 3 = \ln 9$ $\boxed{1}$

7.1. Je dána obecně orientovaná křivka $\kappa = \{(x,y,z)\in R^3; x = x(t)\wedge y = y(t)\wedge z = z(t)\wedge t\in\langle a;b\rangle\}$.

a) Zapište obecně křivkový integrál ze skalární funkce $f = f(x,y,z)$ podél křivky κ a vyjádřete, jak se křivkový integrál vypočítá pomocí jednoduchého integrálu. Zapište obecně $ds = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt$ $\boxed{1}$

$$\int_\kappa f(x,y,z)\,ds \overset{\boxed{1}}{=} \int_a^b f(x(t);y(t);z(t))\cdot\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt \quad \boxed{1}$$

b) Zapište obecně křivkový integrál z vektor. funkce $\vec F(x;y;z) = (f_1;f_2\,f_3)$ podél orient. křivky κ a vyjádřete, jak se křivkový integrál vypočítá pomocí jednoduchého integrálu. Zapište obecně $d\vec s = (dx,dy,dz) = (\dot x,\dot y,\dot z)dt$ $\boxed{1}$

$$\int_\kappa \vec F\cdot d\vec s \overset{\boxed{1}}{=} \int_\kappa (f_1\cdot dx + f_2\cdot dy + f_3\cdot dz) = \int_a^b \left(f_1(x(t);y(t);z(t))\cdot\dot x + f_2(x(t);y(t);z(t))\cdot\dot y + f_3(x(t);y(t);z(t))\cdot\dot z\right)dt \quad \boxed{1}$$

7.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x,y,z)\in R^3; x = 2+4.t\wedge y = 2-4.t\wedge z = 2.t\wedge t\in\langle 0;1\rangle\}$. Vypočtěte :

$\dot x = 4$; $\dot y = -4$; $\dot z = 2$; $ds = \sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}\,dt = 6\cdot dt$ $\boxed{1}$

$dx = 4\cdot dt$; $dy = -4\cdot dt$; $dz = 2\cdot dt$; $d\vec s = (4;-4;2)\,dt$ $\boxed{1}$

a) Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu podél křivky κ ze skalární funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x-2}$,

tj. $\int_\kappa f(x,y,z).ds = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{2+4t-2}}_{\boxed{1}}\cdot 6\cdot dt = \int_0^1 12\cdot t^{\frac12} \,\boxed{1} = \left[\frac{12\,t^{\frac32}}{\frac32}\right]_0^1 \boxed{1} = \left[8\cdot t\cdot\sqrt t\right]_0^1 = 8$ $\boxed{1}$

b) Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu podél křivky κ z vekt. funkce $\vec F = (f_1;f_2\,f_3) = \left(\frac{1}{\sqrt x};1;2\right)$,

tj. $\int_\kappa \vec F.d\vec s = \int_\kappa \left(\frac{1}{\sqrt x};1;2\right)\cdot(dx;dy;dz) \overset{\boxed{1}}{=} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2+4t}};1;2\right)\cdot(4;-4;2)\,dt =$

$= \int_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt{2+4t}} - 4 + 4\right)dt \,\boxed{1} = \left| \begin{array}{l} u = 2+4t \\ du = 4\cdot dt \Rightarrow dt = \frac{du}{4} \end{array} \boxed{1} \;\middle|\; \begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow u = 6 \\ t = 0 \Rightarrow u = 2 \end{array} \right| \overset{\boxed{1}}{=} \int_2^6 \frac{4}{\sqrt u}\cdot\frac{du}{4} = \int_2^6 u^{-\frac12}\,du = \left[2\sqrt u\right]_2^6 \boxed{1} = 2(\sqrt6-\sqrt2)$ $\boxed{1}$

8. V R^2 je dána množina $\overline\Omega: \begin{array}{l} 0\le u\le 1 \\ 0\le v\le u \end{array}$ a je dán difeomorfizmus $\vec g: \begin{array}{l} x = 1+u^2+v \\ y = -u^2+v \\ z = -1-v \end{array}$, který

zobrazuje množinu $\overline\Omega$ na hladký list $L\subset R^3$, resp. na orientovaný hladký list $(L)\subset R^3$.

a) Vypočítejte plošný integrál 1. druhu ze skal. funkce $f(x,y,z) = x+y+z$ přes hladký list L,

tj. $\iint_L f.d\sigma = \iint_{\overline\Omega} (1+u^2+v-u^2+v-1-v)\cdot\sqrt{24}\cdot u\,du\,dv = \int_0^1 du\int_0^u \sqrt{24}\cdot u\cdot v\,dv \,\boxed{1} = \int_0^1 \left[2\sqrt6\,u\cdot\frac{v^2}{2}\right]_0^u \boxed{1} =$

$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = (2u)^2+(-2u)^2+0^2 = 8u^2$ $\boxed{1}$

$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1^2+1^2+(-1)^2 = 3$ $\boxed{1}$

$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = 2u\cdot 1+(-2u)\cdot 1+0\cdot 1 = 0$ $\boxed{1}$

$d\sigma \overset{\boxed{1}}{=} \sqrt{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv = \sqrt{8u^2\cdot 3-0^2}\,du\,dv = \sqrt{24}\,u\,du\,dv$ $\boxed{1}$

$= \int_0^1 \left[\sqrt6\cdot u\cdot u^2 - 0\right]du \,\boxed{1} = \sqrt6\int_0^1 u^3\,du = \sqrt6\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 \boxed{1} = \frac{\sqrt6}{4}$ $\boxed{1}$

b) Vypočtěte plošný integrál 2. druhu z vekt. funkce $\vec F = (f_1;f_2;f_3) = (x+z;1;1)$ přes orientovaný hladký list(L),

$x+z = 1+u^2+v-1-v = u^2$

tj. $\iint_{(L)} \vec F.d\vec\sigma = \iint_{\overline\Omega} \begin{vmatrix} u^2 & 1 & 1 \\ 2u & -2u & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \boxed{1}\,du\,dv \overset{\boxed{1}}{=} \iint_{\overline\Omega} (2u^3+2u+4u)\,du\,dv = \iint_{\overline\Omega}(2u^3+6u)\,du\cdot dv =$

$= \int_0^1 du\int_0^u (2u^3+6u)\,dv \,\boxed{1} = \int_0^1 \left[(2u^3+6u)\cdot v\right]_0^u du \,\boxed{1} = \int_0^1 (2u^4+6u^2)\,du = \left[\frac{2u^5}{5}+\frac{6u^3}{3}\right]_0^1 \boxed{1} = \frac25+2 = \frac{12}{5} \,\boxed{1} =$

$= 2,4$