UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070627-4-(1)

1	2	3	4

∑ 1-4	∑ 5-8

∑ 1-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1.1. a) Jak se provede zúžení funkce n proměnných
$f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ o proměnnou x_i ?

b) $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ je funkce o n proměnných. O kolik proměnných je nutno zúžit tuto funkci, aby z ní vznikla funkce jedné proměnné ?

c) O které proměnné je třeba zúžit funkci $f(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\dots,x_n)$, aby vznikla funkce proměnné x_k, tj. $g(x_k)=f(c_1,\dots,c_{k-1},x_k,c_{k+1},\dots,c_n)$.

d) Zapište, jak je definována parciální derivace funkce $f(x_1,\dots,x_n)$ podle proměnné x_k v bodě $C=(c_1,\cdots,c_n)\in Df$, tj. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_1,\dots,c_n)=$

e) Funkce $f(x;y;z)=\sin(x.y+z)$, bod $C=\left(2;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\in Df$. Vypočítejte podle definice

$\frac{\partial f}{\partial y}(C)=$

e) Pro funkci $f(x;y)$ v bodě $A=[x_0;y_0]$ zapište obecně Taylorův polynom.

$T_2(x,y)=$

1.2. Pro $f(x;y)=2.y.e^{x+3}+x.\mathrm{tg}(y-1)$ a bod $A=[-3;1]$ najděte Taylorův polynom $T_2(x,y)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=$	$;\frac{\partial f}{\partial x}(A)=$	$\frac{\partial f}{\partial y}=$	$;\frac{\partial f}{\partial y}(A)=$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=$	$;\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$	$;\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(A)=$	$f(A)=$	

Pro bod $A=[-3;1]$ je $T_2(x,y)=$

2. a) Ověřte, že rovnicí $9.y+\ln y-(x-2)^2=0$ | $F(x;y)=$
a bodem $A=[5;1]$ je
určena implicitně funkce
$f: y=y(x)$ tak, že $y(5)=1$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(5)$. | c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(5)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c=5$ pro implicitní funkci $y=y(x)$.

$T_2(x)=$

3.1. a) Zapište obecně nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. ______

b) Co je Wronského determinant funkcí y_1, y_2, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ ______

c) Co lze říci o funkcích y_1, y_2, jejichž Wronského determinant je různý od nuly pro $x \in I$. ______

d) Kolik libovolných konstant obsahuje obecné řešení diferenciální rovnice n-tého řádu ? ______

3.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice 3. řádu : $y''' = -4.x^{-3} + 2^x$;

$y'' =$

$y' =$

$y =$

3.3. Je dána diferenciální rovnice

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x} - y\right) + \left(-\frac{1}{\sin^2 y} - x\right).y' = 0 .$$

a) Ověřte, že je daná dif. rov. exaktní.

b) Vyřešte danou dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení. ______

4. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' + y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

4. b) Metodou variace konstant řešte diferenciální rovnici $y'' + y = \sin x . \cos x$.

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070627-4-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3 ; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a;b \rangle\}$.

Objasněte podle příslušných definic, kdy parametricky vyjádřená prostorová křivka je :

a) hladká

b) regulární

c) Čím je určena orientace křivky ?

5.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x,y) \in R^2 ; x = 2.t - 1 \wedge y = 4.t + 6 \wedge z = 2.t \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\}$, určete její počáteční bod $A = [\quad ; \quad ; \quad]$, koncový bod $B = [\quad ; \quad ; \quad]$ a pojmenujte ji. *Křivkou je....*

a) Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu z funkce $f(x;y;z) = \dfrac{\sqrt{x+1}.\sqrt{\frac{y}{2}}}{\sqrt{z}}$ po křivce κ .

$\dot{x} =$; $\dot{y} =$; $\dot{z} =$; $ds =$

$\int\limits_{\kappa} f(x;y;z).ds =$

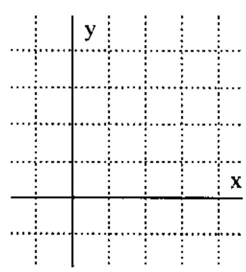
b) Vypočtěte křivk. integrál 2. dr. z vektor. funkce $\vec{F} = (f_1;f_2;f_3) = \left(y - 2.x ; z - x ; \sqrt{\frac{z}{2}} \right)$

po orientované křivce κ . $|dx =$; $dy =$; $dz =$; $d\vec{s} =$

Tedy $\int\limits_{\kappa} \vec{F}.d\vec{s} =$

6.1. Zapište obecně (podle definice) množinu $M \subset R^2$, která je normální vzhledem k druhé souřadné ose.

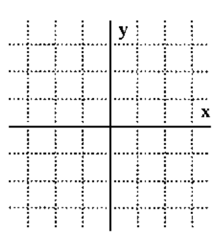
6.2. a) Znázorněte množinu $M = \{(x,y) \subset R^2 ; 0 \le x \le 2 \wedge x^2 \le y \le 2^x\}$ a vypočítejte obsah tohoto obrazce tvořeného body množiny M .



b) Uvažujte předchozí množinu M a vypočítejte $\iint\limits_{M} y.dx.dy =$

6.3. Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \{(x;y) \in R^2 ; x^2 + y^2 \le 16\}$, množinu A načrtněte.

$\iint\limits_{A} \dfrac{2}{5 + x^2 + y^2}.dx.dy =$



$x =$

$y =$

$|J| =$

$x^2 + y^2 =$

$A_{\varphi,\rho} : \quad \le \rho \le$

$\le \varphi \le$

7. Greenova věta konstatuje, že křivkový integrál v rovinném vektorovém poli $\bar{F}(x,y)=(f_1;f_2)$ přes uzavřenou orientovanou křivku, která je hranicí (hrM) omezené uzavřené oblasti $M \subset R^2$, je roven dvojnému integrálu z funkce $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$ přes oblast M. **a)** Využijte Greenovu větu pro výpočet křivk. integrálu 2.druhu přes kladně orientovanou uzavřenou křivku, která je hranicí obdélníka $M=\left\{\begin{matrix}(x,y)\subset R^2;0\le x\le 2\\ 0\le y\le \frac{\pi}{4}\end{matrix}\right\}$, je-li vektorové pole $\bar{F}(x,y)=(f_1;f_2)=\left(\frac{y}{2.x+1};\frac{x}{y^2+1}\right)$.

Podle Green. věty platí : $\int\limits_{(hrM)}\bar{F}.d\bar{s}=\int\limits_{(hrM)}f_1(x,y).dx+f_2(x,y).dy=\iint\limits_{M}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right).dx.dy$

Vyjádřete : $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=$

dosaďte a vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_{M}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right).dx.dy=$

8.1. Difeomorfizmus $\bar{g}:\begin{cases}x=2+2.u\\ y=1+3v\\ z=5+8.u+6.v\end{cases}$ zobrazuje čtverec $\overline{\Omega}\subset R^2$, $\overline{\Omega}:\begin{cases}0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1\end{cases}$ na rovnoběžník $L\subset R^3$. Vypočtěte plošný integrál ze skalární funkce $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ přes (L).

$g_{11}=$	$g_{12}=$
$g_{22}=$	$d\sigma=$

Tedy $\iint\limits_{(L)}\bar{F}.d\bar{\sigma}=$

8.2. Pro difeomorfizmus z 8.1. a vektorovou funkci $\bar{F}=(f_1;f_2;f_3)=(1\,;\,z-4.x+3\,;\,z-2.y-3)$ vypočítejte plošný integrál 2. druhu přes orientovaný rovnoběžník (L), tj.

$f_1(x;y;z)=1 \;\Rightarrow f_1(x(u;v);y(u;v);z(u;v))=$

$f_2(x;y;z)=z-4.x+3 \;\Rightarrow f_2(x(u;v);y(u;v);z(u;v))=$

$f_3(x;y;z)=z-2.y-3 \;\Rightarrow f_3(x(u;v);y(u;v);z(u;v))=$

$\iint\limits_{(L)}\bar{F}.d\bar{\sigma}=$

1.1. a) Jak se provede zúžení funkce n proměnných $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ o proměnnou x_i ? … za x_i se dosadí konstanta $\boxed{1}$

b) $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ je funkce o n proměnných. O kolik proměnných je nutno zúžit tuto funkci, aby z ní vznikla funkce jedné proměnné ? Funkci je třeba zúžit o (n−1) proměnných $\boxed{1}$

c) O které proměnné je třeba zúžit funkci $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, aby vznikla funkce proměnné x_k, tj. $g(x_k) = f(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$. Funkci je třeba zúžit o proměnné $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ $\boxed{1}$

d) Zapište, jak je definována parciální derivace funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ podle proměnné x_k v bodě $C = (c_1, \cdots, c_n) \in Df$, tj. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_1, \dots, c_n) = \frac{d\, g(x_k)}{d\, x_k}(c_k)$, kde $g(x_k) = f(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ $\boxed{1}$

e) Funkce $f(x;y;z) = \sin(x.y + z)$, bod $C = \left(2; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \in Df$. Vypočítejte podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial y}(C) = \frac{d \sin(2\cdot y + \frac{\pi}{2})}{d\, y}\Big|_{y=\frac{\pi}{4}} \boxed{1} = 2\cdot\cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{y=\frac{\pi}{4}} \boxed{1} = 2\cdot\cos\left(2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \boxed{1} = 2\cos\pi = 2\cdot(-1) = -2 \boxed{1}$$

e) Pro funkci $f(x;y)$ v bodě $A = [x_0; y_0]$ zapište obecně Taylorův polynom.

$$T_2(x,y) = f(A) + f'_x(A)(x-x_0) \boxed{1} + f'_y(A)(y-y_0) + \frac{1}{2!}\boxed{1}\left(f''_{xx}(A)(x-x_0)^2 + 2 f''_{xy}(A)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(A)(y-y_0)^2\right)$$

1.2. Pro $f(x;y) = 2.y.e^{x+3} + x.\mathrm{tg}(y-1)$ a bod $A = [-3;1]$ najděte Taylorův polynom $T_2(x,y)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y\cdot e^{x+3} + \mathrm{tg}(y-1)$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2$ | $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cdot e^{x+3} + \frac{x}{\cos^2(y-1)}$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 2-3 = -1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y\cdot e^{x+3}$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 2$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\cdot(-2)\cdot\frac{(-\sin(y-1))}{\cos^3(y-1)}$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = 2\cdot e^{x+3} + \frac{1}{\cos^2(y-1)}$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(A) = 3$ $\boxed{1}$ | $f(A) = 2 - 3\cdot 0 = 2$ $\boxed{1}$

Pro bod $A = [-3;1]$ je $T_2(x,y) = \underbrace{2 + 2(x+3) - 1\cdot(y-1)}_{\boxed{1}} + \boxed{1}\, 2(x+3)^2 + 3(x+3)\cdot(y-1) + 0\cdot(y-1)^2$ $\boxed{1}$

2. a) Ověřte, že rovnicí $9.y + \ln y - (x-2)^2 = 0$ a bodem $A = [5;1]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ tak, že $y(5) = 1$.

$F(x;y) = 9y + \ln y - (x-2)^2$; $F(A) = 9\cdot 1 + \ln 1 - (5-2)^2 = 0$ splněno $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 9 + \frac{1}{y}$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 9 + \frac{1}{1} = 10 \neq 0$ splněno

$\Rightarrow$ Rovnicí a bodem A je $\boxed{1}$ určena implicitně funkce $y = y(x)$, pro níž platí $y(5) = 1$

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(5)$.

$9y_x + \ln y_x - (x-2)^2 = 0 \;/\; \frac{d()}{dx}$ $\boxed{1}$

$9y' + \frac{1}{y}\cdot y' - 2(x-2) = 0$ $\boxed{1}$

$y' = \frac{2(x-2)}{9 + \frac{1}{y}}$ $\boxed{1}$; $y'(5) = \frac{2\cdot(5-2)}{9 + \frac{1}{1}}$ $\boxed{1}$ $= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(5)$.

$9\cdot y' + \frac{y'}{y} - 2(x-2) = 0 \;/\; \frac{d()}{dx}$ $\boxed{1}$

$9\cdot y'' + \frac{y''y - y'\cdot y'}{y^2} - 2 = 0 \;/\cdot y^2$ $\boxed{1}$

$9y''\cdot y^2 + y\cdot y'' - (y')^2 - 2y^2 = 0$

$y'' = \frac{(y')^2 + 2y^2}{9y^2 + y}$ $\boxed{1}$; $y''(5) = \frac{\left(\frac{6}{10}\right)^2 + 2\cdot 1^2}{9\cdot 1^2 + 1} = \frac{\frac{36+200}{100}}{10} =$ $\boxed{1}$ $= \frac{236}{1000} = \frac{59}{250}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 5$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(5) + y'(5)(x-5) + \frac{1}{2!}y''(5)\cdot(x-5)^2$ $\boxed{1}$ $=$

$= \underbrace{1 + \frac{3}{5}(x-5)}_{\boxed{1}} + \frac{59}{500}(x-5)^2$ $\boxed{1}$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070627-4-(2)

5	6	7	8

Σ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

3.1. a) Zapište obecně nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. $y'' + p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y = g(x)$ $\boxed{1}$

b) Co je Wronského determinant funkcí y_1, y_2, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) ; & y_2(x) \\ y_1'(x) ; & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad \boxed{1}$$

c) Co lze říci o funkcích y_1, y_2, jejichž Wronského determinant je různý od nuly pro $x \in I$. ... potom jsou funkce $y_1(x), y_2(x)$ lineárně nezávislé $\boxed{1}$

d) Kolik libovolných konstant obsahuje obecné řešení diferenciální rovnice n-tého řádu ? ... obsahuje n libovolných konstant $\in R$ $\boxed{1}$

3.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice 3. řádu : $y''' = -4.x^{-3} + 2^x$;

$$y'' = \int(-4x^{-3} + 2^x)\,dx = -4\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C_1 = 2x^{-2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C_1$$

$$y' = \int\left(2x^{-2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C_1\right)dx = -\frac{2}{x} + \frac{2^x}{\ln^2 2} + C_1 x + C_2$$

$$y = \int\left(-\frac{2}{x} + \frac{2^x}{\ln^2 2} + C_1 x + C_2\right)dx = -2\ln|x| + \frac{2^x}{\ln^3 2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 ;\ C_1, C_2, C_3 \in R$$

3.3. Je dána diferenciální rovnice

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x} - y\right) + \left(-\frac{1}{\sin^2 y} - x\right).y' = 0.$$

$P(x,y) = \frac{1}{\cos^2 x} - y$; $Q(x,y) = -\frac{1}{\sin^2 y} - x$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -1$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ Dif. rovnice je exaktní $\boxed{1}$

a) Ověřte, že je daná dif. rov. exaktní.

b) Vyřešte danou dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení.

Existuje potenciálová funkce $V(x,y)$

$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x,y) = \frac{1}{\cos^2 x} - y \Rightarrow V = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - y\right)dx = \operatorname{tg} x - xy + \varphi(y)$

$\frac{\partial V}{\partial y}$: $-x + \varphi_y' = -\frac{1}{\sin^2 y} - x$

$\varphi_y' = -\frac{1}{\sin^2 y} \Rightarrow \varphi(y) = \int\left(-\frac{1}{\sin^2 y}\right)dy = \operatorname{cotg} y + C$

$V(x,y) = \operatorname{tg} x - x\cdot y + \operatorname{cotg} y + C_1$

Řešením exaktní dif. rovnice je implicitní funkce $y = y(x)$ daná rovnicí:

$y = y(x)$: $\operatorname{tg} x - x\cdot y + \operatorname{cotg} y = C,\ C \in R$

4. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' + y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

Charakteristická rovnice

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

Obecné řešení homogenní rovnice:

$y_h = C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x$, $C_1, C_2 \in R$

4. b) Metodou variace konstant řešte diferenciální rovnici $y'' + y = \sin x.\cos x$.

$y = C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x$, $C_1 = C_1(x)$; $C_2 = C_2(x)$

$y' = C_1'\cdot\cos x - C_1\cdot\sin x + C_2'\cdot\sin x + C_2\cdot\cos x$

Podmínka: $C_1'\cdot\cos x + C_2'\cdot\sin x = 0$

$-C_1'\cdot\sin x + C_2'\cdot\cos x = \sin x\cdot\cos x$

$$D = W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

$$D_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin x \cos x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin^2 x \cos x$$

$$C_1' = \frac{D_{C_1'}}{D} = -\sin^2 x\cdot\cos x \Rightarrow C_1 = \int -\sin^2 x\cdot\cos x\,dx = \left\|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix}\right\| = \int -t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + K_1 = \frac{-\sin^3 x}{3} + K_1$$

$$D_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sin x\cdot\cos x \end{vmatrix} = \sin x\cdot\cos^2 x$$

$$C_2' = \frac{D_{C_2'}}{D} = \sin x\cdot\cos^2 x;\ C_2 = \int \sin x\cdot\cos^2 x\,dx = \left\|\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix}\right\| = \int -t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + K_2 = -\frac{\cos^3 x}{3} + K_2.$$

Obecné řešení nehomog. d.r.

$$\boxed{y = -\frac{\sin^3 x\cdot\cos x}{3} - \frac{\cos^3 x\cdot\sin x}{3} + K_1\cos x + K_2\sin x} = -\frac{\sin x\cdot\cos x}{3} + K_1\cos x + K_2\sin x$$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070627-4-(3)

5.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x, y, z) \in R^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a; b \rangle\}$.

Objasněte podle příslušných definic, kdy parametricky vyjádřená prostorová křivka je :

a) hladká - když funkce $x = x(t); y = y(t), z = z(t)$ mají spojité první derivace $\boxed{1}$

b) regulární - když $\forall t \in \langle a, b \rangle \; \left[\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right] \neq [0, 0, 0]$ $\boxed{1}$

c) Čím je určena orientace křivky ? - narůstající hodnotou parametru $\boxed{1}$

5.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x, y) \in R^2; x = 2.t - 1 \wedge y = 4.t + 6 \wedge z = 2.t \wedge t \in \langle 0; 1 \rangle\}$, určete $\boxed{1}$

její počáteční bod $A = [-1; 6; 0]$ $\boxed{1}$, koncový bod $B = [1; 10; 2]$ $\boxed{1}$ a pojmenujte ji. *Křivkou je...* úsečka

a) Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu z funkce $f(x; y; z) = \dfrac{\sqrt{x+1}.\sqrt{\frac{y}{2}}}{\sqrt{z}}$ po křivce κ. (9)

$\dot{x} = 2$; $\dot{y} = 4$; $\dot{z} = 2$ $\boxed{1}$; $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2}\, dt = \sqrt{24}\, dt = 2\sqrt{6}\, dt$ $\boxed{1}$

$\int\limits_\kappa f(x; y; z).ds = \int\limits_0^1 f(x, y, z) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2t - 1 + 1} \cdot \sqrt{2t + 3}}{\sqrt{2t}} \cdot 2 \cdot \sqrt{6}\, dt$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_0^1 \sqrt{2t+3} \cdot 2 \cdot \sqrt{6}\, dt =$ $\boxed{1}$

$= \left[\begin{matrix} u = 2t + 3 & t = 1 \Rightarrow u = 5 \\ du = 2dt; dt = \frac{du}{2} & t = 0 \Rightarrow u = 3 \end{matrix} \right]$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_3^5 \sqrt{u}\, 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{du}{2}$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_3^5 u^{\frac{1}{2}} \sqrt{6}\, du = \left[\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_3^5 \sqrt{6}$ $\boxed{1}$ $= \left[\frac{2\sqrt{6}}{3} u \sqrt{u}\right]_3^5 = \frac{2\sqrt{6}}{3}(5 \cdot \sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt{3})$ $\boxed{1}$ $= \frac{10}{3}\sqrt{30} - 6\sqrt{2}$

b) Vypočtěte křivk. integrál 2. dr. z vektor. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = \left(y - 2.x; z - x; \sqrt{\frac{z}{2}}\right)$

po orientované křivce κ. $dx = 2 \cdot dt$; $dy = 4 \cdot dt$; $dz = 2 \cdot dt$ $\boxed{1}$; $d\vec{s} = (2, 4, 2)dt$

Tedy $\int\limits_\kappa \vec{F}.d\vec{s} = \int\limits_\kappa (f_1 \cdot dx + f_2 \cdot dy + f_3 \cdot dz)$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_0^1 (4t + 6 - 4t + 2) \cdot 2dt + (2t - 2t + 1) \cdot 4dt + (\sqrt{t} \cdot 2)dt =$ $\boxed{1}$ (6)

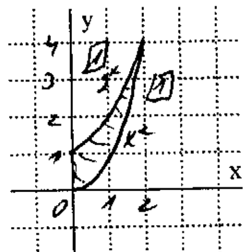
$= \int\limits_0^1 (20 + 2\sqrt{t})\, dt$ $\boxed{1}$ $= \left[20t + 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$ $\boxed{1}$ $= \left[20t + \frac{4}{3} t \cdot \sqrt{t}\right]_0^1 = 20 + \frac{4}{3}$ $\boxed{1}$ $= \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$

6.1. Zapište obecně (podle definice) množinu $M \subset R^2$, která je normální vzhledem k druhé souřadné ose.

$M: \; a \leq x \leq b$ $\boxed{2}$

$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

6.2. a) Znázorněte množinu $M = \{(x, y) \subset R^2; 0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 2^x\}$ a vypočítejte obsah tohoto obrazce tvořeného body množiny M.



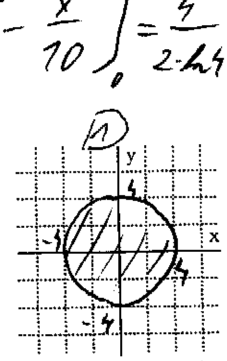
$P = \iint\limits_M 1 \cdot dx\, dy$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2^x} 1 \cdot dy$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_0^2 [y]_{x^2}^{2^x} dx = \int\limits_0^2 (2^x - x^2)\, dx$ $\boxed{1}$ $= \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$

$= \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^3}{3}$ $\boxed{1}$ $- \left(\frac{2^0}{\ln 2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{3}{\ln 2} - \frac{8}{3}$ $\boxed{1}$

b) Uvažujte předchozí množinu M a vypočítejte $\iint\limits_M y.dx.dy =$

$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2^x} y\, dy$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2^x} dx$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_0^2 \left(\frac{4^x}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $= \left[\frac{4^x}{2 \cdot \ln 4} - \frac{x^5}{10}\right]_0^2$ $\boxed{1}$ $= \frac{4^2}{2 \cdot \ln 4} - \frac{2^5}{10}$ $\boxed{1}$ $- \left(\frac{4^0}{2 \cdot \ln 4} - 0\right) = \frac{15}{\ln 16} - \frac{16}{5}$

6.3. Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \{(x; y) \in R^2; x^2 + y^2 \leq 16\}$, množinu A načrtněte.



$x = \rho \cdot \cos\varphi$

$y = \rho \cdot \sin\varphi$ $\boxed{2}$

$|J| = \rho$ $\boxed{1}$

$x^2 + y^2 = \rho^2$ (4)

$\iint\limits_A \frac{2}{5 + x^2 + y^2}.dx.dy = \iint\limits_{A_{\rho,\varphi}} \frac{2}{5 + \rho^2}$ $\boxed{1}$ $\cdot \rho\, d\rho\, d\varphi$ $\boxed{1}$ $=$

$A_{\varphi,\rho}: 0 \leq \rho \leq 4$ $\boxed{1}$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $\boxed{1}$

$= \int\limits_0^4 d\rho \int\limits_0^{2\pi} \frac{2\rho}{5 + \rho^2} d\varphi$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_0^4 \frac{2\rho}{5 + \rho^2} d\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi = \left[\begin{matrix} t = 5 + \rho^2 & \rho = 4 \Rightarrow t = 21 \\ dt = 2\rho\, d\rho & \rho = 0 \Rightarrow t = 5 \end{matrix} \right]$ $\boxed{1}$ $= \int\limits_5^{21} \frac{1}{t} dt \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$ $\boxed{1}$ $= 2\pi [\ln t]_5^{21}$ $\boxed{1}$

$= 2\pi [\ln 21 - \ln 5]$ $\boxed{1}$ $= 2\pi \ln \frac{21}{5}$

7. Greenova věta konstatuje, že křivkový integrál v rovinném vektorovém poli $\vec{F}(x,y)=(f_1;f_2)$ přes uzavřenou orientovanou křivku, která je hranicí (hrM) omezené uzavřené oblasti $M\subset R^2$, je roven dvojnému integrálu z funkce $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$ přes oblast M. **a)** Využijte Greenovu větu pro výpočet křivk. integrálu 2.druhu přes kladně orientovanou uzavřenou křivku, která je hranicí obdélníka $M=\left\{\begin{matrix}(x,y)\subset R^2;0\le x\le 2\\ 0\le y\le\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right\}$, je-li vektorové pole $\vec{F}(x,y)=(f_1;f_2)=\left(\frac{y}{2.x+1};\frac{x}{y^2+1}\right)$.

Podle Green. věty platí : $\int\limits_{(\mathrm{hrM})}\vec{F}.d\vec{s}=\int\limits_{(\mathrm{hrM})}f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy=\iint\limits_{M}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right).dx.dy$ $\boxed{1}$

Vyjádřete : $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{2x+1}$ $\boxed{1}$

dosaďte a vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_{M}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right).dx.dy=\iint\limits_{M}\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx\,dy=$ $\boxed{1}$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dy=\int_0^2\left[\operatorname{arctg}y-\frac{y}{2x+1}\right]_{y=0}^{\frac{\pi}{4}}dx=\int_0^2\left[\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}-\frac{\frac{\pi}{4}}{2x+1}-0\right]dx=$$

$$=\int_0^2 1\cdot dx-\frac{\pi}{4}\int_0^2\frac{1}{2x+1}dx=\left|\begin{matrix}t=2x+1 & x=2\ t=5\\ dt=2\,dx,\ dx=\frac{dt}{2} & x=0\ t=1\end{matrix}\right|=\left[x\right]_0^2-\frac{\pi}{4}\int_1^5\frac{1}{t}\frac{dt}{2}=2-\frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\left[\ln t\right]_1^5=$$

$$=2-\frac{\pi}{8}\ln 5\ \boxed{1}$$

8.1. Difeomorfizmus $\vec{g}:\begin{cases}x=2+2.u\\ y=1+3v\\ z=5+8.u+6.v\end{cases}$ zobrazuje čtverec $\overline{\Omega}\subset R^2$, $\overline{\Omega}:\begin{cases}0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1\end{cases}$ na rovnoběžník $L\subset R^3$. Vypočtěte plošný integrál ze skalární funkce $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ přes rovnoběžník (L), tj. $\iint\limits_{L}f\,d\sigma=\iint\limits_{\Omega}f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,d\sigma=\iint\limits_{\Omega}\left((2+2u)^2+(1+3v)^2-(5+8u+6v)\right)\sqrt{756}\,du\,dv\overset{\boxed{1}}{=}$

$\iint\limits_{\Omega}(4+8u+4u^2+1+6v+9v^2-5-8u-6v)\cdot\sqrt{756}\,du\,dv=$

$g_{11}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=2^2+0^2+8^2=68$ $\boxed{1}$

$g_{22}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=0^2+3^2+6^2=45$ $\boxed{1}$

$g_{12}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=2\cdot 0+0\cdot 3+8\cdot 6=48$ $\boxed{1}$

$d\sigma=\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv=\sqrt{68\cdot 45-48^2}\,du\,dv=\sqrt{3060-2304}\,du\,dv=\sqrt{756}\,du\,dv$ $\boxed{1}$

$=\iint\limits_{\Omega}(4+8u+4u^2+1+6v+9v^2-5-8u-6v)\,\sqrt{756}$

$=\iint\limits_{\Omega}(4u^2+9v^2)\sqrt{756}\,du\,dv=\int_0^1 du\int_0^1(4u^2+9v^2)\sqrt{756}$ $\boxed{1}$

$=\sqrt{756}\int_0^1\left[4u^2v+3v^3\right]_0^1 du=\sqrt{756}\int_0^1(4u^2+3)\,du=$ (11)

$=\sqrt{756}\left[\frac{4}{3}u^3+3u\right]_0^1=\sqrt{756}\left(\frac{4}{3}+3\right)=\frac{13}{3}\sqrt{756}$ $\boxed{1}$

$=26\cdot\sqrt{21}$

8.2. Pro difeomorfizmus z 8.1. a vektorovou funkci $\vec{F}=(f_1;f_2;f_3)=(1;z-4.x+3;z-2.y-3)$ vypočítejte plošný integrál 2. druhu přes orientovaný rovnoběžník (L), tj. $\iint\limits_{(L)}\vec{F}.d\vec{\sigma}$.

$f_1(x;y;z)=1\ \Rightarrow f_1(x(u;v);y(u;v);z(u;v))=1$ $\boxed{1}$

$f_2(x;y;z)=z-4.x+3\ \Rightarrow f_2(x(u;v);y(u;v);z(u;v))=5+8u+6v-8-8u+3=6v$ $\boxed{1}$

$f_3(x;y;z)=z-2.y-3\ \Rightarrow f_3(x(u;v);y(u;v);z(u;v))=5+8u+6v-2-6v-3=8u$ $\boxed{1}$

$$\iint\limits_{(L)}\vec{F}.d\vec{\sigma}=\iint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z)\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv=\iint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}1 & 6v & 8u\\ 2 & 0 & 8\\ 0 & 3 & 6\end{vmatrix}du\,dv=$$ (14)

$$\iint\limits_{\Omega}(-24-72v+48u)\,du\,dv=\int_0^1 du\int_0^1(-24-72v+48u)\,dv=\int_0^1\left[-24v-36v^2+48uv\right]_{v=0}^{v=1}du=$$

$$=\int_0^1(-24-36+48u)\,du=\left[-24u-36u+24u^2\right]_0^1=-24-36+24-0=-36$$ $\boxed{1}$