UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070619-3-(1)

1	2	3	4

Σ 1-4	Σ 5-8

Σ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. a) Zapište obecně Laplaceův operátor, tj. operátor delta. *Odpověď:* $\Delta =$

b) Laplaceův operátor lze použít na .... funkci, výsledkem je ....funkce.(doplňte)

c) Určete první a druhé parc. derivace z $f(x;y;z)=(z+y^2)(z+\ln x)$ obecně a v $C=[1;2;3]$

$\frac{\partial f}{\partial x}=$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)=$

$\frac{\partial f}{\partial y}=$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C)=$

$\frac{\partial f}{\partial z}=$ $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=$ $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(C)=$

d) Zapište Δf obecně a $\Delta f(C)$, tj. pro funkci $f(x;y;z)=(y+z)\ln(x+z)$ a bod $C=[1;2;3]$.

Tedy obecně, $\Delta f =$ *a v bodě C,* $\Delta f(C)=$

2. a) Předpokládáme, že bod $A \in Df$ je stacionárním bodem funkce $f(x,y)\in C^2$

- Uveďte postačující podmínky pro existenci ostrého lokálního maxima ve stacionárním bodě A.

- Uveďte podmínku, která postačuje k tomu, aby funkce $f(x,y)$ neměla ve stacionárním bodě A lokální extrém.

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y)=\frac{2.x^3}{3}-8.x-2.x.y+\frac{y^2}{2}+4.y$ na $D(f)=R^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=$

$\frac{\partial f}{\partial y}=$

Stacionární body : $A_1=[\quad;\quad]$; $A_2=[\quad;\quad]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$

c) **Doplňte poslední část definice** vázaného lokálního maxima v bodě C : ***Funkce*** $f(X)$ ***o n*** *proměnných má v bodě* $C\in M\subset Df\subset R^n$ *lokální maximum vzhledem k množině M, jestliže existuje okolí* $O(C)$ *bodu C takové, že pro každé* $X\in O(C)\cap M$ *platí ..*

d) Najděte lokální extrémy funkce $z=f(x;y)=x.e^x+y$ vázané na množinu $e^x-y=0$.

3.1. Ověřte, že rovnicí $y^3 + y - 8.x^{\frac{1}{2}} + 3.x + 2 = 0$ a bodem $A = [4;1]$ je určena implicitně funkce $y = y(x)$ tak, že $y(4) = 1$.

$F(x;y) =$

$F(A) =$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y) =$

$\frac{\partial F}{\partial y}(A) =$

Závěr :

3.2. Vyjádřete a) **první** derivaci $y'(x)$ a určete $y'(4)$; b) **druhou derivaci** $y''(x)$ a určete $y''(4)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 4$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) =$

4.1. a) **Co je neznámou** v obyčejné diferenciální rovnici ? ____________________

b) Co **musí** být nutně obsaženo v zápise dif. rovnice 1. řádu ? ____________________

c) Co **může** (ale nemusí) být obsaženo v zápise dif. rovnice 1. řádu ? ____________________

d) Co vždy obsahuje **zápis obecného řešení** dif. rovnice 1. řádu (kromě y, x) ? ____________________

4.2. $y'.e^y = \frac{1}{1+x^2}$ je daná diferenciální rovnice ;

a) najděte její obecné řešení ;

b) najděte partikulární řešení dané diferenciální rovnice tak, aby $y(0) = 2$.

4.3. Je dána diferenciální rovnice $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$. a) Jaká je to dif. rovnice ? ....

b) Najděte obecné řešení dané diferenciální rovnice. *Využijte substituci :* $u = \frac{y}{x}$, *tedy* $y =$

a $y' =$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070619-3-(3)

5	6	7	8	Σ 5-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice 2. řádu $y'' - 2.y' + 10.y = 0$.

b) Na základě speciálního tvaru pravé strany najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + 10y = -\cos(3.x) + \sin(3.x)$. ($g(x) = e^{\alpha x}.[P_1(x)\cos(\beta.x) + P_2(x)\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha x}.[Q_1(x)\cos(\beta.x) + Q_2(x)\sin(\beta.x)]$)

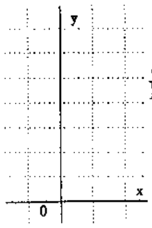
c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + 10.y = -\cos(3.x) + \sin(3.x)$ (využijte předchozí výsledky).

6.1. a) Zapište pomocí dvojného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M \subset R^2$.

6.2. b) Zapište pomocí dvojnásobného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M = \{(x, y); a \le x \le b \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

6.3 Množina $I = \underbrace{\langle 0;10 \rangle}_{x} \times \underbrace{\langle 0;\pi \rangle}_{y}$, vypočítejte $\iint_I (x + \sin y).dx.dy =$

6.4 Množina $M \in R^2$ je ohraničena přímkami $x = 0 \wedge x = 2 \wedge y = 0 \wedge y = e^x$. Znázorněte množinu M do obrázku, zapište ji jako množinu normální vůči jedné z os a vypočítejte



$$\iint_M \frac{e^{-x}}{x+1}.dx.dy =$$

7. Je dána křivka $K = \{(x,y,z) \in R^3; x = t \wedge y = t \wedge z = 2.t \wedge t \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle\}$, skalární funkce

$f(x,y,z) = 5.\cos x + \sin y + z$ a vektorová funkce $\vec{F} = (f_1; f_2 f_3) = (\sin x; \cos y; \cos z)$,

a) Vypočtěte křivkový $|\dot{x} =$; $\dot{y} =$; $\dot{z} =$; $ds =$

integrál 1. druhu $\int\limits_K f(x,y,z).ds =$

---

b) Vypočtěte křivkový | $dx =$; $dy =$; $dz =$ $d\vec{s} =$

integrál 2. druhu $\int\limits_K \vec{F}.d\vec{s} =$

8.1 Difeomorfizmus $\vec{g}: \begin{cases} x = 2.\cos v \\ y = 2.\sin v \\ z = 5.u \end{cases}$ zobrazuje obdélník $\overline{\Omega} \subset R^2$, $\overline{\Omega}: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2.\pi \end{cases}$ na plášť válce $L \subset R^3$. Vypočtěte plošný integrál ze skalární funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ přes plášť válce (L), tj. $\iint\limits_{(L)} \vec{F}.d\vec{\sigma} =$

$g_{11} =$

$g_{22} =$

$g_{12} =$

$d\sigma =$

8.2 Stokesova věta konstatuje, že křivkový integrál ve vektorovém poli přes uzavřenou orientovanou křivku (∂L), která je okrajem orientované, po částech hladké plochy $L \subset R^3$, je roven plošnému integrálu z rotace vektorového pole přes plochu L. Použitím Stokes. věty vypočtěte křivkový integrál ve vektorovém poli $\vec{F}(x,y,z) = (f_1; f_2; f_3) = (x + y; y + z^2; x + z)$ přes kladně orientovanou uzavřenou křivku, která tvoří okraj čtvercového hl. listu $L \subset R^3$, který je určen jako obraz čtverce $\overline{\Omega} \subset R^2$, $\overline{\Omega}: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$ v difeomorfizmu $\vec{g}: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u \end{cases}$. *Řešení:* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} =$

$$\oint\limits_{(\partial L)} \vec{F}.d\vec{s} = \iint\limits_{(L)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}.d\vec{\sigma} = \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} \mathrm{rot}_1\vec{F} & \mathrm{rot}_2\vec{F} & \mathrm{rot}_3\vec{F} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du.dv =$$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070619-3-(1)

1	2	3	4

$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8

$\sum$ 1-8

.... datum .... stud. obor .... ročník .... osobní číslo - STAG .... student - příjmení, jméno

1. a) Zapište obecně Laplaceův (delta) operátor. *Tj.* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\boxed{1}$

b) Laplaceův operátor lze použít na skalární $\boxed{1}$ funkci, výsledkem je skalární $\boxed{1}$ funkce.(doplňte)

c) Určete první a druhé parc. derivace z $f(x;y;z) = (z+y^2)(z+\ln x)$ obecně a v $C=[1;2;3]$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z+y^2}{x}$ $\boxed{1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{z+y^2}{x^2}$ $\boxed{1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) = -7$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cdot(z+\ln x)$ $\boxed{1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(z+\ln x)$ $\boxed{1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) = 6$

$\frac{\partial f}{\partial z} = z+\ln x + z + y^2 = 2z+\ln x + y^2$ $\boxed{1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$ $\boxed{1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(C) = 2$

d) Zapište Δf obecně a $\Delta f(C)$, tj. pro funkci $f(x;y;z) = (y+z)\ln(x+z)$ a bod $C=[1;2;3]$.

Tedy obecně, $\Delta f = -\frac{z+y^2}{x^2} + 2(z+\ln x) + 2$ $\boxed{1}$ *a v bodě C,* $\Delta f(C) = -7+6+2 = 1$ $\boxed{1}$

2. a) Předpokládáme, že bod $A \in Df$ je stacionárním bodem funkce $f(x,y) \in C^2$

- Uveďte postačující podmínku(-y) pro existenci ostrého lokálního maxima v (stac.) bodě A, tj. $D_A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix} > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$
- Uveďte podmínku, která postačuje k tomu, aby funkce $f(x,y)$ neměla v (stac.) bodě A lokální extrém, tj. $D_A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix} < 0$ $\boxed{1}$

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y) = \frac{2.x^3}{3} - 8.x - 2.x.y + \frac{y^2}{2} + 4.y$ na $D(f) = R^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 - 8 - 2y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = x^2 - 4$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + y + 4 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = 2x - 4$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$ $\boxed{1}$

$y_1 = -4 \quad y_2 = 0$

Stacionární body : $A_1 = [0;-4]$; $\boxed{1}$ $A_2 = [2;0]$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1) = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_2) = 8$; A_1: $D_{A_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A_1), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow \nexists$ A_1 lok. extr. $\boxed{1}$ neexistuje

$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = -2$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$ $\boxed{1}$

A_2: $D_{A_2} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$; $\boxed{1}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_2) = 8 > 0 \Rightarrow \exists A_2$ $\boxed{1}$ nastává lok. minimum $\boxed{1}$ $f(A_2) = \frac{2\cdot 2^3}{3} - 8\cdot 2 = \frac{32}{3} - \frac{48}{3} = -\frac{16}{3}$ $\boxed{1}$

c) **Doplňte poslední část definice** vázaného lokálního maxima v bodě C : ***Funkce*** $f(X)$ ***o n*** *proměnných má v bodě* $C \in M \subset Df \subset R^n$ *lokální maximum vzhledem k množině M, jestliže existuje okolí* $O(C)$ *bodu C takové, že pro každé* $X \in O(C) \cap M$ *platí..* $f(X) \le f(C)$ $\boxed{2}$

d) Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x;y) = x.e^x + y$ vázané na množinu $e^x - y = 0$. $\Rightarrow y = e^x$ $\boxed{1}$

$F(x) = f(x, e^x) = x\cdot e^x + e^x = (x+1)e^x$ $\boxed{1}$

$F'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)\cdot e^x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = -2$ – stacionární bod $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$F''(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$ $\boxed{1}$; $F''(-2) = (-2+3)\cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \Rightarrow F(x)$ má lok. $\boxed{1}$

minimum v $x = -2 \Rightarrow f(x,y)$ má v bodě $A = [-2, e^{-2}]$ lok. vázané minimum $\boxed{1}$ $f(A) = -2e^{-2} + e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

3.1. Ověřte, že rovnicí $y^3 + y - 8.x^{\frac{1}{2}} + 3.x + 2 = 0$ a bodem $|F(x;y) = y^3 + y - 8\cdot x^{\frac{1}{2}} + 3\cdot x + 2$

$A = [4;1]$ je určena implicitně funkce $y = y(x)$ tak, že $y(4) = 1$. $|F(A) = 1^3 + 1 - 8\cdot\sqrt{4} + 3\cdot 4 + 2 = 0$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x;y) = 3y^2 + 1$ $\boxed{1}$ $\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(A) = 3\cdot 1^2 + 1 = 4 \neq 0$ $\boxed{1}$

Závěr : Rovnicí $F(x,y) = 0$ a bodem A je určena implicitně funkce $y = y(x)$, že $y(4) = 1$ $\boxed{1}$

3.2. Vyjádřete a) **první** derivaci $y'(x)$ a určete $y'(4)$; b) **druhou derivaci** $y''(x)$ a určete $y''(4)$.

$y^3 + y - 8\cdot x^{\frac{1}{2}} + 3x + 2 = 0 \;/\; \frac{d()}{dx}$

$3y^2\cdot y' + y' - \frac{8}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3 = 0$ $\boxed{1}$

$(3y^2+1)\cdot y' = 4\cdot x^{-\frac{1}{2}} - 3$

$y' = \dfrac{\frac{4}{\sqrt{x}} - 3}{3y^2+1}$ $\boxed{1}$; $y'(4) = \dfrac{\frac{4}{\sqrt{4}} - 3}{3\cdot 1^2 + 1} = \dfrac{-1}{4} = -\dfrac{1}{4}$ $\boxed{1}$

$3y^2\cdot y' + y' - 4\cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3 = 0 \;/\; \frac{d()}{dx}$

$6y\cdot y'\cdot y' + 3y^2\cdot y'' + y'' + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = 0$ $\boxed{1}$

$(3y^2+1)\,y'' = -6y(y')^2 - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$ $\boxed{1}$

$y'' = -\dfrac{6y(y')^2 + \frac{2}{x\sqrt{x}}}{3y^2+1}$ $\boxed{1}$; $y''(4) = -\dfrac{6\cdot 1\cdot(-\frac{1}{4})^2 + \frac{2}{4\cdot\sqrt{4}}}{3\cdot 1^2 + 1} = -\dfrac{5}{32}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 4$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(4) + y'(4)\cdot(x-4) + \frac{1}{2!}y''(4)\cdot(x-4)^2 = 1 - \frac{1}{4}(x-4) - \frac{5}{64}(x-4)^2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

4.1. a) **Co je neznámou** v obyčejné diferenciální rovnici ? Neznámou je funkce $y = y(x)$ $\boxed{1}$

b) Co **musí** být nutně obsaženo v zápise dif. rovnice 1. řádu ? Musí být obsažena derivace y' $\boxed{1}$

c) Co **může** (ale nemusí) být obsaženo v zápise dif. rovnice 1. řádu ? neznámá funkce y, nezávislé proměnná x $\boxed{1}$

d) Co vždy obsahuje **zápis obecného řešení** dif. rovnice 1. řádu (kromě y, x) ? Libovolnou konstantu $C \in R$ $\boxed{1}$

4.2. Je dána diferenciální rovnice $y'.e^y = \dfrac{1}{1+x^2}$. a) Najděte její obecné řešení. ------------------

$\frac{dy}{dx}\cdot e^y = \frac{1}{1+x^2}$

$\boxed{1}$ $e^y\,dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\int e^y\,dy = \int\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$e^y = \operatorname{arctg} x + C,\ C\in R \;/\ln()$ $\boxed{1}$

$y = \ln(\operatorname{arctg} x + C)$ $\boxed{1}$

4.2. b) Najděte partikulární řešení dané diferenciální rovnice tak, aby $y(0) = 2$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = \ln(\operatorname{arctg} 0 + C)$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow \ln C = 2 \Rightarrow C = e^2$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow y_p = \ln(\operatorname{arctg} x + e^2)$

4.3. Je dána diferenciální rovnice $y' = \dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$. a) Jaká je to dif. rovnice ? homogenní $\boxed{1}$

b) Najděte obecné řešení dané diferenciální rovnice. *Využijte substituce :* $u = \dfrac{y}{x}$, *tedy* $y = x\cdot u$ $\boxed{1}$

a $y' = u + x\cdot u'$ $\boxed{1}$

$u + x\cdot u' = u - u^2$ $\boxed{1}$

$x\cdot\frac{du}{dx} = -u^2$

$-\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$ $\boxed{1}$

$-\int u^{-2}\,du = \int\frac{1}{x}\,dx$

$-\frac{u^{-1}}{(-1)} = \ln|x| + C$; $C\in R$ $\boxed{1}$

$\frac{1}{u} = \ln|x| + C$

$u = \frac{1}{\ln|x| + C}$ $\boxed{1}$

$\frac{y}{x} = \frac{1}{\ln|x| + C}$ $\boxed{1}$

$y = \frac{x}{\ln|x| + C}$ $\boxed{1}$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070619-3-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

.... datum   .... stud. obor   .... ročník   .... osobní číslo - STAG   .... student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' - 2.y' + 10.y = 0$. (1)

Char. rovnice : $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ (1) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}}{2a} = \frac{2 \pm i\sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 1+3i \\ 1-3i \end{cases}$; $y_h = C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \cdot \sin(3x)$ (1) (1)

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$ (4)

5.. b) Na základě speciálního tvaru pravé strany najděte partikulární řešení diferenciální rovnice
$y'' - 2.y' + 10.y = -\cos(3.x) + \sin(3.x)$.

$\left(g(x) = e^{\alpha.x}.\left[P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)\right];\ y_p = x^k.e^{\alpha.x}.\left[Q_1(x).\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)\right]\right)$

Pravá strana: $-\cos(3x) + \sin(3x) \overset{(1)}{=} e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\cdot\sin(\beta x)) \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 3, P_1(x) = -1$ (1)

$P_2(x) = 1$ (1)

$\alpha + \beta i = 3i \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow k = 0$

Partikulární řešení ve tvaru pravé strany:

$y_p \overset{(1)}{=} A\cos(3x) + B\cdot\sin(3x)$

$y_p' \overset{(1)}{=} -3A\sin(3x) + 3B\cdot\cos(3x)$

$y_p'' \overset{(1)}{=} -9A\cos(3x) - 9B\cdot\sin(3x)$

Dosazení: $y_p'' - 2y_p' + 10y_p = -\cos(3x) + \sin(3x)$

$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) + 6A\sin(3x) - 6B\cdot\cos 3x + 10A\cos(3x) + 10B\sin(3x) \overset{(1)}{=} -\cos(3x) + \sin(3x)$

$\cos(3x): A - 6B = -1$

$\sin(3x): 6A + B = 1 \ /\cdot 6 \Rightarrow B = 1 - 6A = \frac{37}{37} - \frac{30}{37} = \frac{7}{37}$ (1) $\Rightarrow y_p = \frac{5}{37}\cos(3x) + \frac{7}{37}\sin(3x)$ (1) (10)

$A - 6B = -1$

$36A + 6B = 6 \ + \Rightarrow 37A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{37}$ (1)

5.3. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + 10.y = -\cos(3.x) + \sin(3.x)$
(využijte předchozí výsledky).

$y = y_p + y_h \overset{(1)}{=} \frac{5}{37}\cos(3x) + \frac{7}{37}\sin(3x) + C_1 \cdot e^x\cos(3x) + C_2 \cdot e^x \cdot \sin(3x)$ (1) (2)

6.1. a) Zapište pomocí dvojného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M \subset R^2$. $\iint_M 1 \cdot dx\,dy$ (1) (1)

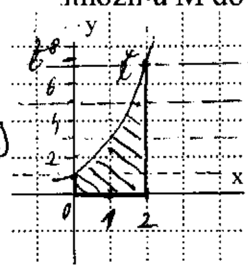
6.2. b) Zapište pomocí dvojnásobného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M = \{(x,y); a \le x \le b \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ $\iint_M 1\cdot dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} 1 \cdot dy$ (1) (1)

6.3 Množina $I = \langle 0;10\rangle_x \times \langle 0;\pi\rangle_y$, vypočítejte $\iint_I (x + \sin y).dx.dy = \int_0^{10} dx \int_0^{\pi} (x + \sin y)\,dy =$ (1)

$= \int_0^{10} \left[x \cdot y - \cos y\right]_0^{\pi} dx$ (1) (1) $= \int_0^{10} [x\cdot\pi - \cos\pi - (x \cdot 0 - \cos 0)]\,dx = \int_0^{10} (x\cdot\pi + 1 + 1)\,dx =$ (6)

$\int_0^{10} (x\cdot\pi + 2)\,dx$ (1) $= \left[\frac{x^2\cdot\pi}{2} + 2x\right]_0^{10}$ (1) $= \frac{10^2\pi}{2} + 2\cdot 10 - 0 = 50\pi + 20$ (1)

6.4 Množina $M \in R^2$ je ohraničena přímkami $x = 0 \wedge x = 2 \wedge y = 0 \wedge y = e^x$. Znázorněte množinu M do obrázku, zapište ji jako množinu normální vůči jedné z os a vypočítejte



(2)

$\iint_M \frac{e^{-x}}{x+1}.dx.dy = \int_0^2 dx \int_0^{e^x} \frac{e^{-x}}{x+1}\,dy$ (1) $= \int_0^2 \frac{e^{-x}}{x+1}\left[y\right]_0^{e^x} dx$ (1) $= \int_0^2 \frac{e^{-x}\cdot e^x}{x+1}\,dx =$

$= \int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx$ (1) $= \left|\begin{array}{l} \text{substituce} \\ t = x+1;\ x = 2 \Rightarrow t = 3 \\ dt = dx;\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right| = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt =$ (1) (10)

$= \left[\ln|t|\right]_1^3$ (1) $= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$ (1)

M: $0 \le x \le 2$ (1)

$0 \le y \le e^x$ (1)

7. Je dána křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = t \wedge y = t \wedge z = 2.t \wedge t \in \langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle\}$, skalární funkce $f(x,y,z) = 5.\cos x + \sin y + z$ a vektorová funkce $\vec{F} = (f_1;f_2 f_3) = (\sin x;\cos y;\cos z)$, $\boxed{1}$

a) Vypočtěte křivkový | $\dot{x} = 1$; $\dot{y} = 1$; $\dot{z} = 2$; $ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = \sqrt{6}\cdot dt$ $\boxed{1}$ (7)

integral 1. druhu $\int_K f(x,y,z)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\cos t + \sin t + 2t)\sqrt{6}\,dt = \sqrt{6}\left[5.\sin t - \cos t + t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \sqrt{6}\left[5\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (5\sin 0 - \cos 0 + 0^2)\right] = \sqrt{6}\left[5 - 0 + \frac{\pi^2}{4} - 0 + 1\right] = 6\cdot\sqrt{6} + \frac{\pi^2}{4}\sqrt{6}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

---

b) Vypočtěte křivkový | $dx = dt$; $dy = dt$; $dz = 2dt$ $\boxed{1}$ $d\vec{s} = (1;1;2)dt$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

integrál 2. druhu $\int_K \vec{F}.d\vec{s} = \int_K (\sin x\cdot dx + \cos y\cdot dy + \cos z\cdot dz) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \cos t + 2\cos(2t))dt =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ (6)

$= \left[-\cos t + \sin t + \sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi - (-\cos 0 + \sin 0 + \sin 0)\right] =$

$= -0 + 1 + 0 + 1 - 0 = \mathbf{2}$ $\boxed{1}$

8.1 Difeomorfizmus $\vec{g}: \begin{cases} x = 2.\cos v \\ y = 2.\sin v \\ z = 5.u \end{cases}$ zobrazuje obdélník $\overline{\Omega} \subset R^2$, $\overline{\Omega}: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2.\pi \end{cases}$ na plášť

válce $L \subset R^3$. Vypočtěte plošný integrál ze skalární funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ přes plášť válce (L), $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

tj. $\iint_{(L)} \vec{F}.d\vec{\sigma} = \iint_{\Omega} f(x,y,z)\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv = \iint_{\Omega} [(2\cdot\cos v)^2 + (2\cdot\sin v)^2 + 5u]\cdot 10\cdot du\cdot dv =$ $\boxed{1}$ (9)

$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 0 + 0 + 5^2 = 25$ $\boxed{1}$ $= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} (40 + 50u)dv = \int_0^1 (40 + 50u)du\cdot\left[v\right]_0^{2\pi} =$

$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = (-2\sin v)^2 + (2\cdot\cos v)^2 + 0^2 = 4$ $\boxed{1}$ $= \left[40u + \frac{50u^2}{2}\right]_0^1\cdot 2\pi = (40 + 25)\cdot 2\pi = 130\pi$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = 0\cdot(-2\sin v) + 0\cdot 2\cos v + 5\cdot 0 = 0$ $\boxed{1}$; $d\sigma = \sqrt{g_{11}\cdot g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv = \sqrt{25\cdot 4 - 0^2}\,du\,dv = 10\,du\,dv$ $\boxed{1}$

8.2 Stokesova věta konstatuje, že křivkový integrál ve vektorovém poli přes uzavřenou orientovanou křivku (∂L), která je okrajem orientované, po částech hladké plochy $L \subset R^3$, je roven plošnému integrálu z rotace vektorového pole přes plochu L. Použitím Stokes. věty vypočtěte křivkový integrál ve vektorovém poli $\vec{F}(x,y,z) = (f_1;f_2;f_3) = (x + y; y + z^2; x + z)$ přes kladně orientovanou uzavřenou křivku, která tvoří okraj čtvercového hl. listu $L \subset R^3$, který je určen jako obraz čtverce $\overline{\Omega} \subset R^2$, $\overline{\Omega}: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$ v difeomorfizmu $\vec{g}: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u \end{cases}$. *Řešení:* $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) +$ $\boxed{3}$

$+ \vec{k}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = \vec{i}(2z - 0) - \vec{j}(0 - 1) + \vec{k}(1 - 0) = (2z, 1, 1)$

(8)

$$\oint_{(\partial L)} \vec{F}.d\vec{s} = \iint_{(L)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}.d\vec{\sigma} = \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} \text{rot}_1\vec{F} & \text{rot}_2\vec{F} & \text{rot}_3\vec{F} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du.dv = \iint_{\overline{\Omega}} \begin{vmatrix} 2\cdot u & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} du\,dv = \iint_{\overline{\Omega}} (-2u + 1)du\cdot dv =$$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$$= \int_0^1 du \int_0^1 (1 - 2u)dv = \int_0^1 \left[v - 2uv\right]_0^1 du = \int_0^1 (1 - 2u)du = \left[u - u^2\right]_0^1 = 1 - 1 - 0 = 0$$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$