UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070612-2-(1)

1	2	3	4		Σ 1-4	Σ 5-8		Σ 1-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1. Je dána skalární funkce $f(x;y;z)=\dfrac{y^4-2.z}{z}+3.x^5$ a bod $A=[1;-2;2]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)=$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)=$

b) Určete $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)$, tj. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)=$

c) Určete derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A a ve směru $\bar{s}=(1;2;-4)$

$f'_{\bar{s}}(A)=\dfrac{df}{d\bar{s}}(A)=$

2. a) Napište definici, popř. vlastními slovy vysvětlete, co platí pro přírůstek funkce $f(X)$ o n proměnných, když je funkce $f(X)$ je v bodě $C=(c_1,\dots,c_n)\in Df$ **diferencovatelná**.

Odpověď: Funkce $f(X)$ je v bodě C **diferencovatelná,** když $f(C+H)-f(C)=$

b) Využijte větu o koeficientech diferenciálu a zapište diferenciál funkce $f(X)$ v bodě C pro přírůstek $H=(h_1;\dots;h_n)$. Tj. $df_C(H)=$

c) Využijte větu o koeficientech diferenciálu a zapište obecně diferenciál funkce $f(X)$ v libovolném bodě X pro přírůstek $d\bar{x}=(dx_1;\dots;dx_n)$. Tj. $df=$

b) Je dána funkce $f(x;y;u)=\sqrt{y}.x^2-\ln(5.u-9)$ a bod $C=(x_c;y_c;u_c)=\left(\dfrac{3}{2};4;2\right)$.

apište diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\bar{x}$, tj. $df_C=?$ a diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\bar{x}=(0{,}20;0{,}16;0{,}10)$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(C)=$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(C)=$ | $\dfrac{\partial f}{\partial u}=$ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(C)=$

$df_C=$ | $df_C(0{,}2;0{,}16;-0{,}1)=$

c) Veličina z je funkcí proměnných x, y, u, tj. $z=f(x;y;u)=\sqrt{y}.x^2-\ln(5.u-9)$. Měřením bylo zjištěno, že $x=(\bar{x}\pm\Delta x)=(1{,}50\pm0{,}01)$, $y=(4{,}00\pm0{,}16)$ a $u=(2{,}00\pm0{,}01)$. Určete střední hodnotu a absolutní chybu veličiny z. (Využijte předchozího diferenciálu df_C)

Tedy $\bar{z}=$ $\Delta z=$ $z=(\quad\pm\quad)$

3. a) Ověřte, že rovnicí $x + x.y + y^2 - 7.x^3 = 0$ a bodem $A = [1;2]$ je určena implicitně funkce $f : y = y(x)$ taková, že $y(1) = 2$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(1)$.

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(1)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 1$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) =$

4.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 2. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů.
Co je neznámou v diferenciální rovnici ?

4.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

4.3. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4.4. Najděte obecné řešení exaktní diferenciální rovnice $12.x^2 - 3.y + 1 + (1 - 3.x + 2.y).y' = 0$.

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070612-2-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 13.y = 0$.

5. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 13.y = -20.\cos x - 20.\sin x$. $\left(g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)];\ y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x).\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)] \right)$

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 13.y = -20.\cos x - 20.\sin x$ (využijte předchozí výsledky).

6.1 a) Uveďte, kdy je parametricky určená prostorová křivka hladká ....

b) Uveďte, kdy je parametricky určená prostorová křivka regulární ....

c) Definujte, co je uzavřená orientovaná cesta ....

d) Definuje, co je cirkulace vektorového pole. ....

6.2. Je dána křivka $K = \left\{ (x, y, z) \in R^3 ; x = t^2 \wedge y = 2.t^2 \wedge z = -t^2 \wedge t \in \langle 1; 2 \rangle \right\}$, skalární funkce $f(x,y,z) = \dfrac{2.y + 3.z}{x^2}$ a vektorová funkce $\vec{F} = (f_1; f_2 f_3) = \left(\dfrac{1}{x};\ 5.y;\ \dfrac{2}{z^2} \right)$,

a) Vypočtěte křivkový | $\dot{x} =$; $\dot{y} =$; $\dot{z} =$; $ds =$

integrál 1. druhu $\int\limits_K f(x,y,z).ds =$

---

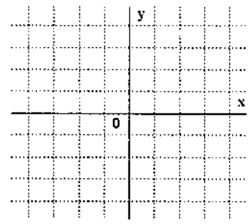
b) Vypočtěte křivkový | $dx =$; $dy =$; $dz =$ $d\vec{s} =$

integrál 2. druhu $\int\limits_K \vec{F}.d\vec{s} =$

7. a) Vypočítejte integrál $\iiint\limits_{M} e^{x}.dx.dy.dz =$

$$M: \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2 \\ -1 \le z \le x+1 \end{array}$$

b) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál, v němž je množina $A = \{(x;y) \in R^2; x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$. Množinu A načrtněte! A :



$\iint\limits_{A} (x^2 + y^2)^2 .x.dx.dy =$

$x = \rho.\cos\varphi$

$y =$

$x^2 + y^2 =$

$|J| =$

$A_{\rho,\varphi}: \quad \le \rho \le$

$\le \varphi \le$

8.1 Difeomorfizmus $\vec{g}: \begin{cases} x = 3.u \\ y = 1+u \\ z = 2.v \end{cases}$ zobrazuje čtverce $\overline{\Omega} \subset R^2$, $\overline{\Omega}: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$ na obdélník $L \subset R^3$. Vypočtěte plošný integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x,y,z) = (f_1; f_2; f_3) = (x.z \ ; \ x+y \ ; \ z)$ přes orientovanou plochu (L), tj. $\iint\limits_{(L)} \vec{F}.d\vec{\sigma} =$

8.2 Gaussova – Ostrogradského věta konstatuje, že plošný integrál z vektorového pole přes uzavřenou plochu $(\mathrm{hr}\,M)$, která je hranicí uzavřené omezené oblasti $M \subset R^3$, je roven trojnému integrálu z divergence vektorového pole přes množinu M.
Použitím G-O věty vypočtěte plošný integrál přes kladně orientovaný uzavřený povrch kvádru $M = \underbrace{\langle 0;2 \rangle}_{x} \times \underbrace{\langle 0;5 \rangle}_{y} \times \underbrace{\langle 0;1 \rangle}_{z}$ z vektorové funkce $\vec{F}(x,y,z) = (f_1; f_2; f_3) = (x.y + x; y + z; x.z)$.

Řešení: $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z} =$

$$\oiint\limits_{(\mathrm{hr}\,M)} \vec{F}.d\vec{\sigma} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div}\vec{F}.dx.dy.dz =$$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070612-2-(1)

1	2	3	4		Σ 1-4	Σ 5-8	Σ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Je dána skalární funkce $f(x;y;z)=\dfrac{y^4-2.z}{z}+3.x^5$ a bod $A=[1;-2;2]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}= 15x^4$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)= 15$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{4y^3}{z}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=\dfrac{4\cdot(-2)^3}{2}=-16$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{-2z-(y^4-2z)\cdot 1}{z^2}=-\dfrac{y^4}{z^2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)=-\dfrac{(-2)^4}{2^2}=-4$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) Určete $\overrightarrow{grad}\, f(A)$, tj. $\overrightarrow{grad}\, f(A)=(15;-16;-4)$

c) Určete derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s}=(1;2;-4)$

$f'_{\vec{s}}(A)=\dfrac{df}{d\vec{s}}(A)=\overrightarrow{grad}\, f(A)\cdot\dfrac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}=\dfrac{(15;-16;-4)\cdot(1;2;-4)}{\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=\dfrac{15-32+16}{\sqrt{21}}=-\dfrac{1}{\sqrt{21}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

2. a) Napište definici, popř. vlastními slovy vysvětlete, co platí pro přírůstek funkce $f(X)$ o n proměnných, když je funkce $f(X)$ je v bodě $C=(c_1,...,c_n)\in Df$ **diferencovatelná**. $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Odpověď: Funkce $f(X)$ je v bodě C **diferencovatelná,** když $f(C+H)-f(C)=\underbrace{a_1 h_1+\cdots+a_n h_n}_{df_C(H)}+\omega(H)$; $H=(h_1,...,h_n)\in R^n$

tj. Přírůstek funkce je součtem diferenciálu $df_C(H)$ a funkce $\omega(H)$, pro níž platí, že $\lim\limits_{H\to(0,...,0)}\dfrac{\omega(h_1,...,h_n)}{\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}}=0$ $\boxed{1}$; $a_1,...,a_n\in R$ konstanty | Diferenciál je lineární funkce přírůstků $h_1,...,h_n$ $\boxed{1}$

b) Využijte větu o koeficientech diferenciálu a zapište diferenciál funkce $f(X)$ v bodě C pro přírůstek $H=(h_1;...;h_n)$. Tj. $df_C(H)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(C)\cdot h_1+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(C)\cdot h_n$ $\boxed{1}$

c) Využijte větu o koeficientech diferenciálu a zapište obecně diferenciál funkce $f(X)$ v libovolném bodě X pro přírůstek $d\vec{x}=(dx_1;...;dx_n)$. Tj. $df=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n$ $\boxed{1}$

b) Je dána funkce $f(x;y;u)=\sqrt{y}.x^2-\ln(5.u-9)$ a bod $C=(x_c;y_c;u_c)=\left(\dfrac{3}{2};4;2\right)$.

apište diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x}$, tj. $df_C=?$ a diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x}=(0{,}2;0{,}16;-0{,}1)$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\sqrt{y}\cdot x$ $\boxed{1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(C)=2\cdot\sqrt{4}\cdot\dfrac{3}{2}=6$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\left(y^{\frac{1}{2}}\cdot x^2\right)'_y=\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}x^2=\dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}$ $\boxed{1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(C)=\dfrac{9}{16}$ | $\dfrac{\partial f}{\partial u}=-\dfrac{5}{5u-9}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(C)=-5$

$df_C=6\cdot dx+\dfrac{9}{16}\cdot dy-5\cdot du$ $\boxed{1}$ | $df_C(0{,}2;0{,}16;\ 0{,}10)=6\cdot 0{,}2+\dfrac{9}{16}\cdot 0{,}16-5\cdot 0{,}1=1{,}2+0{,}09-0{,}5=0{,}79$ $\boxed{1}$

c) Veličina z je funkcí proměnných x, y, u, tj. $z=f(x;y;u)=\sqrt{y}.x^2-\ln(5.u-9)$. Měřením bylo zjištěno, že $x=(\bar{x}\pm\Delta x)=(1{,}50\pm0{,}01)$, $y=(4{,}00\pm0{,}16)$ a $u=(2{,}00\pm0{,}01)$. Určete střední hodnotu a absolutní chybu veličiny z. (Využijte předchozího diferenciálu df_C) $\boxed{1}$

Tedy $\bar{z}=\sqrt{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\ln 1=\dfrac{9}{2}$ $\boxed{1}$ $\Delta z=\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|\Delta u=$ $\boxed{1}$ $z=(4{,}5\pm0{,}2)$

$=6\cdot 0{,}01+\dfrac{9}{16}\cdot 0{,}16+5\cdot 0{,}01=$ $\boxed{1}$

$=0{,}06+0{,}09+0{,}05=0{,}20$

3. a) Ověřte, že rovnicí $x + x.y + y^2 - 7.x^3 = 0$ a bodem $A = [1;2]$ je určena implicitně funkce $f : y = y(x)$ taková, že $y(1) = 2$. $\boxed{1}$

$F(x,y) = x + x\cdot y + y^2 - 7x^3$ Uvedenou rovnicí a bodem A je určena implicitní funkce $y = y(x)$

$F(1,2) = 1 + 1\cdot 2 + 2^2 - 7\cdot 1^3 = 0$ – splněno $F(A) = 0$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y$; $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 + 2\cdot 2 = 5 \neq 0$ – splněno $\frac{\partial F}{\partial y}(A) \neq 0$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(1)$.

$x + x\cdot y + y^2 - 7x^3 = 0 \,/\, \frac{d()}{dx}$

$1 + y + x\cdot y' + 2y\cdot y' - 21x^2 = 0$ $\boxed{1}$

$y'(x + 2y) = 21x^2 - 1 - y$

$\Rightarrow y' = \frac{21x^2 - 1 - y}{x + 2y}$ $\boxed{1}$; $y'(1) = \frac{21\cdot 1^2 - 1 - 2}{1 + 2\cdot 2} = \frac{18}{5} = 3{,}6$ $\boxed{1}$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(1)$.

$1 + y + x\cdot y' + 2\cdot y\cdot y' - 21x^2 = 0 \,/\, \frac{d()}{dx}$

$y' + y' + x\cdot y'' + 2y'\cdot y' + 2\cdot y\cdot y'' - 42x = 0$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow y''(x + 2y) = 42x - 2y' - 2(y')^2$

$y'' = \frac{42x - 2y' - 2(y')^2}{x + 2y}$ $\boxed{1}$; $y''(1) = \frac{42\cdot 1 - 2\frac{18}{5} - 2\left(\frac{18}{5}\right)^2}{1 + 2\cdot 2} = \frac{1050 - 180 - 648}{125} = \frac{222}{125}$ $\boxed{1}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 1$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)\cdot(x-1)^2 = 2 + \frac{18}{5}(x-1) + \frac{111}{125}(x-1)^2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

4.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 2. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů. Co je neznámou v diferenciální rovnici?

$F(y'', y', y, x) = 0$ $\boxed{1}$; y – neznámá funkce $\boxed{1}$, x – nezávisle proměnná funkce $y = y(x)$ $\boxed{1}$, y', y'' derivace neznámé funkce

4.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1$

$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = \int\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = x$ $\boxed{1}$ $+ \arcsin x + C$ $\boxed{1}$ $C \in R$

4.3. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' = \frac{1}{1 + x^2}$.

$y' = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C_1$ $\boxed{1}$

$y = \int(\operatorname{arctg} x + C_1)dx = \left| \begin{matrix} u' = 1 & v = \operatorname{arctg} x \\ u = x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right| = x\cdot\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx + C_1 x + C_2 = x\cdot\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 x + C_2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

4.4. Najděte obecné řešení exaktní diferenciální rovnice $12.x^2 - 3.y + 1 + (1 - 3.x + 2.y).y' = 0$.

$\underbrace{(12x^2 - 3y + 1)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(1 - 3x + 2y)}_{Q(x,y)}\cdot dy = 0$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -3$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -3$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ dif. rov. je exaktní $\boxed{1}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^2 - 3y + 1 \Rightarrow u = \int(12x^2 - 3y + 1)dx = 4x^3 - 3xy + x + \varphi(y)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x + \varphi'_y(y)$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = +1 - 3x + 2y$ $\boxed{1}$

$\Big\} -3x + \varphi'_y(y) = 1 - 3x + 2y \Rightarrow \varphi'(y) = 1 + 2y \Rightarrow$ $\boxed{1}$

$\varphi(y) = \int(1 + 2y)dy = y + y^2 + C$ $\boxed{1}$

$u(x,y) = 4x^3 - 3xy + x + y + y^2 + C$ $\boxed{1}$

Řešením dif. rovnice je $y = y(x)$ $\boxed{1}$: $4x^3 - 3xy + x + y + y^2 = C$ v implicitním tvaru

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070612-2-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 13.y = 0$. $C_1, C_2 \in R$

Char. rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ $\boxed{1}$

$D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = 16 - 52 = -36$

$\lambda_{1,2} = \frac{+4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \left\langle {2+3i \atop 2-3i} \right.$ $\boxed{1}$

$y_h = C_1 e^{2x}(\cos(3x)) + C_2 \cdot e^{2x}\sin(3x)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= e^{2x}(C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x))$

5. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice
$y'' - 4.y' + 13.y = -20.\cos x - 20.\sin x$. $(g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x).\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)])$

Pravá strana: $-20\cos x - 20\sin x = e^{\alpha x}[P_1(x)\cdot\cos(\beta x) + P_2(x)\cdot\sin(\beta x)]$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\alpha = 0$; $\beta = 1$; $P_1(x) = -20$; $P_2(x) = -20$; $\alpha + \beta i = 0 + i = 2 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow k = 0$

$y_p = A\cos x + B\cdot\sin x$ $\boxed{1}$

$y_p' = -A\sin x + B\cdot\cos x$ $\boxed{1}$

$y_p'' = -A\cos x - B\cdot\sin x$ $\boxed{1}$

Dosazení: $-A\cos x - B\cdot\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x + 13A\cos x + 13B\sin x = -20\cos x - 20\sin x$

$\cos x: 12A - 4B = -20 \Rightarrow B = +5 + 3A$

$\sin x: +4A + 12B = -20 \Rightarrow 4A + 12(+5 + 3A) = -20$

$40A = -80$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$A = -2$; $B = -1$

$y_p = -2\cos x - \sin x$ (13)

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 13.y = -20.\cos x - 20.\sin x$ $\boxed{1}$
(využijte předchozí výsledky). $y = y_p + y_h = -2\cos x - \sin x + e^{2x}(C_1\cdot\cos(3x) + C_2\cdot\sin(3x))$ $\boxed{1}$

6.1 a) Uveďte, kdy je parametricky
určená prostorová křivka hladká .jestliže funkce $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ mají spojité první derivace $\boxed{1}$

b) Uveďte, kdy je parametricky
určená prostorová křivka regulární .jestliže $\forall t \in \langle a, b\rangle$ platí, že $\left[\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right] \neq [0,0,0]$ $\boxed{1}$

c) Definujte, co je
uzavřená orientovaná cesta - její koncový bod je totožný s počátečním bodem $\boxed{1}$

d) Definuje, co je
cirkulace vektorového pole. - křivkový integrál 2. druhu po uzavřené orientované cestě $\boxed{1}$

6.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x, y, z) \in R^3; x = t^2 \wedge y = 2.t^2 \wedge z = -t^2 \wedge t \in \langle 0;1\rangle\}$, skalární funkce $\boxed{1}$

$f(x,y,z) = \frac{2.y + 3.z}{x^2}$ a vektorová funkce $\vec{F} = (f_1; f_2 f_3) = \left(\frac{1}{x}; 5.y; \frac{2}{z^2}\right)$, $= \sqrt{4 + 16 + 4}\,t\,dt = \sqrt{24}\,t\,dt$ $\boxed{1}$

a) Vypočtěte křivkový $\dot{x} = 2t$; $\dot{y} = 4t$; $\dot{z} = -2t$; $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \sqrt{(2t)^2 + (4t)^2 + (-2t)^2}\,dt =$ $\boxed{1}$

integrál 1. druhu $\int\limits_\kappa f(x,y,z).ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \int\limits_1^2 \frac{2\cdot 2t^2 + 3\cdot(-t^2)}{(t^2)^2}\cdot\sqrt{24}\cdot t\,dt =$ $\boxed{1}$

$= \int\limits_1^2 \frac{t^2}{t^4}\cdot\sqrt{24}\cdot t\,dt = \int\limits_1^2 \frac{1}{t}\cdot\sqrt{24}\cdot dt = \sqrt{24}[\ln t]_1^2 = \sqrt{24}(\ln 2 - \ln 1) = \sqrt{24}\cdot\ln 2 = 2\sqrt{6}\cdot\ln 2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) Vypočtěte křivkový $dx = 2t\,dt$; $dy = 4t\,dt$; $dz = -2t\,dt$ $d\vec{s} = (2t; 4t; -2t)\,dt$

integrál 2. druhu $\int\limits_\kappa \vec{F}.d\vec{s} = \int\limits_\kappa \left(\frac{1}{x}\cdot dx + 5y\,dy + \frac{2}{z^2}\,dz\right) = \int\limits_1^2 \frac{1}{t^2}\cdot 2t\,dt + 5\cdot 2t^2\cdot 4t\,dt + \frac{2}{t^4}(-2)t\,dt =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \int\limits_1^2 \left(2\frac{1}{t} + 40\cdot t^3 - 4\cdot t^{-3}\right)dt = \left[2\ln|t| + 10t^4 - \frac{4\cdot t^{-2}}{-2}\right]_1^2 =$ $\boxed{1}$

$= \left[\ln t^2 + 10\cdot t^4 + 2\frac{1}{t^2}\right]_1^2 = \ln 2^2 + 10\cdot 2^4 + 2\frac{1}{2^2} - \ln 1 - 10 - 2 =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \ln 4 + 160 + \frac{1}{2} - 0 - 12 = 148{,}5 + \ln 4$ $\boxed{1}$

7. a) Vypočítejte integrál $\iiint\limits_M e^x . dx.dy.dz = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_{-1}^{x+1} e^x dz = \int_0^1 dx \int_1^2 \left[e^x . z\right]_{-1}^{x+1} dy = \int_0^1 dx \int_1^2 \left(e^x(x+1)+e^x\right) dy =$

M: $0 \le x \le 1$

$1 \le y \le 2$

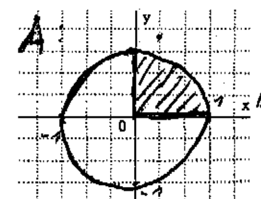
$-1 \le z \le x+1$

$= \int_0^1 dx \int_1^2 e^x(x+2)\, dy = \int_0^1 e^x(x+2)\left[y\right]_1^2 dx = \int_0^1 e^x(x+2)\, dx =$

$= \begin{vmatrix} u' = e^x & v = x+2 \\ u = e^x & v' = 1 \end{vmatrix} = \left[e^x(x+2)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e \cdot 3 - e^0 \cdot 2 - \left[e^x\right]_0^1 = 3e - 2 - e + 1 =$

$= 2e - 1$

b) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál, v němž je množina $A = \{(x;y) \in R^2 ; x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$. Množinu A načrtněte! A :



$\iint\limits_A \left(x^2+y^2\right)^2 . x.dx.dy = \iint\limits_{A_{\rho\varphi}} (\rho^2)^2 \cdot \rho \cdot \cos\varphi \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^6 \cos\varphi\, d\varphi =$

$x = \rho.\cos\varphi$

$y = \rho \cdot \sin\varphi$

$x^2 + y^2 = \rho^2$

$|J| = \rho$

$= \int_0^1 \rho^6 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = \left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^1 \cdot \left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{1}{7} \cdot \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$

$A_{\rho\varphi}$: $0 \le \rho \le 1$

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

8.1 Difeomorfizmus $\vec{g}: \begin{cases} x = 3.u \\ y = 1 + u \\ z = 2.v \end{cases}$ zobrazuje čtverce $\overline{\Omega} \subset R^2$, $\overline{\Omega}: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$ na obdélník

$L \subset R^3$. Vypočtěte plošný integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x,y,z) = (f_1; f_2; f_3) = (x.z\ ;\ x+y\ ;\ z)$ přes orientovanou plochu (L), tj. $\iint\limits_{(L)} \vec{F}.d\vec{\sigma} = \iint\limits_{\overline{\Omega}} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = \iint\limits_{\overline{\Omega}} \begin{vmatrix} 3u \cdot 2v & 1+4u & 2v \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} du\, dv = \iint\limits_{\overline{\Omega}} \left(12uv - (1+4u)6\right)$

$= \iint\limits_{\overline{\Omega}} (12u \cdot v - 6 - 24u)\, du\, dv = \int_0^1 du \int_0^1 (12uv - 24u - 6)\, dv = \int_0^1 du \left[6uv^2 - 24uv - 6v\right]_0^1 =$

$= \int_0^1 (6u - 24u - 6)\, du = \left[3u^2 - 12u^2 - 6u\right]_0^1 = 3 - 12 - 6 - 0 = -15$

8.2 Gaussova – Ostrogradského věta konstatuje, že plošný integrál z vektorového pole přes uzavřenou plochu $(\mathrm{hr}\, M)$, která je hranicí uzavřené omezené oblasti $M \subset R^3$, je roven trojnému integrálu z divergence vektorového pole přes množinu M.

Použitím G-O věty vypočtěte plošný integrál přes kladně orientovaný uzavřený povrch kvádru $M = \underbrace{\langle 0;2 \rangle}_{x} \times \underbrace{\langle 0;5 \rangle}_{y} \times \underbrace{\langle 0;1 \rangle}_{z}$ z vektor. funkce $\vec{F}(x,y,z) = (f_1;f_2;f_3) = (x.y + x; y + z; x.z)$.

Řešení: $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = y + 1 + 1 + x = x + y + 2$

$\oint\!\!\oint\limits_{(\mathrm{hr}M)} \vec{F}.d\vec{\sigma} = \iiint\limits_M \operatorname{div}\vec{F}.dx.dy.dz = \int_0^2 dx \int_0^5 dy \int_0^1 (x+y+2)\, dz = \int_0^2 dx \int_0^5 \left[xz + yz + 2z\right]_0^1 dy =$

$= \int_0^2 dx \int_0^5 (x + y + 2)\, dy = \int_0^2 dx \left[xy + \frac{y^2}{2} + 2y\right]_0^5 = \int_0^2 \left(5x + \frac{25}{2} + 10\right) dx =$

$= \int_0^2 \left(5x + \frac{45}{2}\right) dx = \left[\frac{5x^2}{2} + \frac{45}{2}x\right]_0^2 = \frac{5 \cdot 2^2}{2} + \frac{45}{2} \cdot 2 - 0 = 10 + 45 = 55$