UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070605-1-(1)

1	2	3	4		Σ 1-4	Σ 5-8		Σ 1-8

…………	…………	…………	…………………	………………………………
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1. Je dána skalární funkce $f(x;y;z)=\dfrac{x^5.(y^2-z)}{z}$ a bod $A=[1;4;2]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)=$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)=$

b) Určete $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)$, tj. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)=$

c) Určete derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s}=(-2;2;1)$

$f'_{\vec{s}}(A)=\dfrac{df}{d\vec{s}}(A)=$

2. a) Uveďte podle definice, co je (neostré) lokální minimum funkce $f(X)$ o n proměnných.

b) Uveďte nutnou podmínku lokálního extrému, tj. co platí pro parciální derivace funkce $f(X)$ n proměnných, která má v bodě $C\in Df$
lokální extrém a existují v bodě C parciální
derivace podle všech proměnných ?

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y)=\dfrac{x^3}{3}+x.y^2-x+1$ na $D(f)=R^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=$ $\qquad$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=$ $\qquad$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$

Stacionární body : $A_1=[\quad;\quad]$; $A_2=[\quad;\quad]$; $A_3=[\quad;\quad]$; $A_4=[\quad;\quad]$

3. a) Ověřte, že rovnicí $e^y + \sin y - x = 0$ a bodem $A = [1;0]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(1) = 0$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(1)$.

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(1)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 1$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) =$

4.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů. Co je neznámou v diferenciální rovnici ?

4.2. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \dfrac{y}{x+1} = 0$.

4.2. b) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \dfrac{y}{x+1} = (x+1)^3$. (Navažte na předchozí výsledek)

4.2. c) Najděte partikulární řešení předchozí diferenciální rovnice tak, aby $y(0) = 5$.

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070605-1-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 4.y = 0$.

5. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 4.y = 10.e^x$. ($g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x).\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)]$)

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice

$y'' - 4.y' + 4.y = 10.e^x$ (využijte předchozí výsledky).

6. a) Pro $J = \langle 1;5 \rangle \times \langle -2;3 \rangle$ zapište obecně dvojný integrál $\iint_J f(x,y).dx.dy$ jako dvojnásobný

Tedy : $\iint_J f(x,y).dx.dy =$

b) Vypočítejte integrál $\iiint_M \frac{1}{y}.dx.dy.dz =$

kde $M:$

$$1 \le x \le 2$$
$$1 \le y \le x$$
$$y \le z \le y + x$$

c) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \{(x;y) \in R^2; x \ge 0 \wedge 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, množinu A načrtněte.

$$\iint_A \frac{2.x}{(1 + x^2 + y^2).(x^2 + y^2)}.dx.dy =$$

7.1. V R^2 je dána trojúhelník $\overline{\Omega}: \begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1-u \end{matrix}$ a difeomorfizmus $\vec{g}: \begin{matrix} x = 2-u+v \\ y = -u+v \\ z = -2+v \end{matrix}$, kterým se zobrazí trojúhelník $\overline{\Omega}$ na trojúhelník $L \subset R^3$. a) Pro skalární funkci $f(x,y,z) = x - y + z$ vypočítejte plošný integrál
1. druhu přes plochu L, tj. $\iint\limits_{L} f.d\sigma =$

$g_{11} =$

$g_{22} =$

$g_{12} =$

$d\sigma =$

b) Pro vektorovou funkci $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = (x - y; y - z; z - x)$ vypočítejte plošný integrál 2. druhu přes orientovanou plo-
chu (L), tj. $\iint\limits_{(L)} \vec{F}.d\vec{\sigma} =$

8.1. Je dána obecně orientovaná křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a;b \rangle\}$.
a) Zapište obecně křivkový integrál ze skalární funkce $f = f(x,y,z)$ podél křivky κ a vyjádřete, jak se křivkový integrál vypočítá pomocí jednoduchého integrálu; zapište $ds =$

b) Zapište obecně křivkový integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x;y;z) = (f_1; f_2 f_3)$ podél křivky κ a vyjádřete, jak se křivkový integrál vypočítá pomocí jednoduchého integrálu.

8.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = 1 + 3.t \wedge y = 2 - t \wedge z = 3 \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\}$, skalární funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x-1}.\sqrt{2-y}.\sqrt{3.z}$ a vektorová funkce $\vec{F} = (f_1; f_2 f_3) = (\sqrt{x-1}; \sqrt{2-y}; \sqrt{3.z})$,

a) Vypočtěte křivkový | $\dot{x} =$; $\dot{y} =$; $\dot{z} =$; $ds =$

integrál 1. druhu $\int\limits_{\kappa} f(x,y,z).ds =$

---

b) Vypočtěte křivkový | $dx =$; $dy =$; $dz =$ $d\vec{s} =$

integrál 2. druhu $\int\limits_{\kappa} \vec{F}.d\vec{s} =$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070605-1-(1)

1	2	3	4

$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8

$\sum$ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Je dána skalární funkce $f(x;y;z)=\dfrac{x^5.(y^2-z)}{z}$ a bod $A=[1;4;2]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{5x^4(y^2-z)}{z}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)=\dfrac{5\cdot1^4\cdot(4^2-2)}{2}=35$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^5\cdot 2y}{z}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)=\dfrac{1^5\cdot2\cdot4}{2}=4$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{x^5\cdot(-1)\cdot z-x^5(y^2-z)\cdot1}{z^2}=\dfrac{-x^5z-x^5y^2+x^5z}{z^2}=\dfrac{-x^5y^2}{z^2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)=-\dfrac{1^5\cdot4^2}{2^2}=-4$ $\boxed{1}$

b) Určete $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(A)$, tj. $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(A)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A);\frac{\partial f}{\partial y}(A);\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(35;4;-4)$ $\boxed{1}$

c) Určete derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s}=(-2;2;1)$ $\boxed{1}$

$f'_{\vec{s}}(A)=\dfrac{df}{d\vec{s}}(A)=\dfrac{\overrightarrow{grad}\,f(A)\cdot\vec{s}}{\|\vec{s}\|}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $=\dfrac{(35;4;-4)\cdot(-2;2;1)}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\dfrac{-70+8-4}{\sqrt{9}}=-\dfrac{66}{3}=-22$ $\boxed{1}$

2. a) Uveďte podle definice, co je (neostré) lokální minimum funkce f n proměnných. $\boxed{1}$

Neostré lokální minimum je číslo $f(C)$ takové, že existuje okolí $O(C)$ bodu C, že pro každé $X\in O(C)$ platí $f(X)\geq f(C)$ $\boxed{1}$

b) Uveďte nutnou podmínku lokálního extrému, tj. co platí pro parciální derivace funkce $f(X)$ n proměnných, která má v bodě $C\in Df$ lokální extrém a existují v bodě C parciální derivace podle všech proměnných ?

Všechny parciální derivace 1. řádu v bodě C jsou rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(C)=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(C)=\dots=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(C)=0$ $\boxed{1}$

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y)=\dfrac{x^3}{3}+x.y^2-x+1$ na $D(f)=R^2$.

Stac. body

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^2+y^2-1\overset{!}{=}0$ $\boxed{2}$ $\Rightarrow \left.\begin{matrix}x^2+y^2-1=0\\ x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow y^2=1\Rightarrow|y|=1\Rightarrow y=\pm1 \Rightarrow A_1=[0,1]$ $\boxed{1}$

$A_2=[0,-1]$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2\cdot x\cdot y\overset{!}{=}0\Rightarrow x=0\vee y=0$ $\boxed{1}$ $\left.\begin{matrix}x^2+y^2-1=0\\ y=0\end{matrix}\right\}x^2=1\Rightarrow x=\pm1$ $A_3=[1,0]$ $\boxed{1}$

$A_4=[-1,0]$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2x$ $\boxed{1}$ $D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y$ $\boxed{1}$ $A_1: D_{A_1}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$ v A_1 lok extrém neex. $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x$ $\boxed{1}$ $A_2: D_{A_2}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-4<0\Rightarrow$ v A_2 lok. extrém neex. $\boxed{1}$

$A_3: D_{A_3}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0$ $\boxed{1}$ $\wedge\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_3)=2>0$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$ V bodě A_3 nastává lok. minimum $\boxed{1}$ $f(A_3)=\frac{1}{3}+0-1+1=\frac{1}{3}$ $\boxed{1}$

$A_4: D_{A_4}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}\overset{\boxed{1}}{=}4>0\ \wedge\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_4)=-2<0$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$ V bodě A_4 nastává lok. maximum $f A_4=-\frac{1}{3}+0+1+1=\frac{5}{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

3. a) Ověřte, že rovnicí $e^y + \sin y - x = 0$ a bodem $A = [1;0]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(1) = 0$.

$F(x,y) = e^y + \sin y - x$

$F(A) = F(1,0) = e^0 + \sin 0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$ – splněno $\boxed{1}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + \cos y$; $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = e^0 + \cos 0 = 1 + 1 = 2 \neq 0$ – splněno $\boxed{1}$

} Rovnice a bodem A je určena explicitně funkce, pro niž platí $y(1) = 0$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(1)$.

$e^y + \sin y - x = 0 \;/ \frac{d()}{dx}$; $y = y(x)$

$e^y \cdot y' + \cos y \cdot y' - 1 = 0$ $\boxed{1}$

$y'(e^y + \cos y) = 1$ $\boxed{1}$

$y' = \frac{1}{e^y + \cos y}$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow y'(1) = \frac{1}{e^0 + \cos 0} = \frac{1}{2}$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(1)$.

$e^y \cdot y' + \cos y \cdot y' - 1 = 0 \;/ \frac{d()}{dx}$ $y = y(x)$

$e^y \cdot y' \cdot y' + e^y \cdot y'' - \sin y \cdot y' \cdot y' + \cos y \cdot y'' = 0$ $\boxed{1}$

$y''(e^y + \cos y) = \sin y \cdot (y')^2 - e^y \cdot (y')^2$ $\boxed{1}$

$y'' = \frac{(\sin y - e^y)\cdot(y')^2}{e^y + \cos y}$ $\boxed{1}$; $y''(1) = \frac{(\sin 0 - e^0)\left(\frac{1}{2}\right)^2}{e^0 + \cos 0} = -\frac{1}{8}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 1$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(1) + y'(1)\cdot(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2 = 0 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2$ $\boxed{2}$

4.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů. Co je neznámou v diferenciální rovnici ? $\boxed{1}$

$F(x, y, y') = 0$; $\boxed{1}$ x – nezávislá proměnná funkce $y = y(x)$

$\boxed{1}$ $y = y(x)$ – neznámá funkce

$\boxed{1}$ $y' = y'(x)$ – derivace neznámé funkce

4.2. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{y}{x+1} = 0$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$ $\boxed{1}$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x+1}\,dx$

$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C|$; $C \in R - \{0\}$ $\boxed{1}$

$y = C\cdot(x+1)$, $C \in R$ $\boxed{1}$

4.2. b) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{y}{x+1} = (x+1)^3$. (Navažte na předchozí výsledek) $\boxed{1}$ Variace konstanty: Předpokládané obecné řešení $y = C(x+1)$, $C = C(x)$

$y' = C'(x+1) + C$ $\boxed{1}$

Dosazení:

$C'(x+1) + C - \frac{C(x+1)}{x+1} = (x+1)^3$ $\boxed{2}$

$C' = \frac{(x+1)^3}{x+1}$; tj. $C' = (x+1)^2$

$C = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + K$, $K \in R$ $\boxed{1}$

Obecné řešení: $\boxed{2}$

$y = \left(\frac{(x+1)^3}{3} + K\right)(x+1) = \frac{(x+1)^4}{3} + Kx + K$

4.2. c) Najděte partikulární řešení předchozí diferenciální rovnice tak, aby $y(0) = 5$.

$y(0) = 5 \Rightarrow 5 = \frac{(0+1)^4}{3} + K\cdot 0 + K \Rightarrow K = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$ $\boxed{2}$

Partikulární řešení $y = \frac{(x+1)^4}{3} + \frac{14}{3}(x+1)$ $\boxed{1}$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 – EX-IMAT2-070605-1-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

....

datum   stud. obor   ročník   osobní číslo - STAG   student - příjmení, jméno

5. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 4.y = 0$.

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $\boxed{1}$

$\lambda_{1,2} = 2$ $\boxed{1}$

$y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x}$; $C_1, C_2 \in R$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ (4)

5. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 4.y = 10.e^x$. ($g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x).\cos(\beta.x) + P_2(x).\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x).\cos(\beta.x) + Q_2(x).\sin(\beta.x)]$)

$g(x) = 10 \cdot e^x = e^{1 \cdot x}(10 \cdot \cos(0x) + 0 \cdot \sin(0 \cdot x)) \Rightarrow \alpha = 1$; $\beta = 0$; $\alpha + \beta i = 1 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow k = 0$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$y_p = e^{1 \cdot x}(A \cos(0 \cdot x) + B \cdot \sin(0x)) = A \cdot e^x$ $\boxed{1}$

$y'_p = A e^x$

$y''_p = A e^x$ $\boxed{1}$ Dosazení $A \cdot e^x - 4 \cdot A \cdot e^x + 4 \cdot A \cdot e^x = 10 \cdot e^x \Rightarrow A = 10$ $\boxed{1}$

$y_p = 10 \cdot e^x$ $\boxed{1}$

5. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4.y' + 4.y = 10.e^x$ (využijte předchozí výsledky).

$y = y_p + y_h = 10 \cdot e^x + C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ (1)

6.a) Pro $J = \langle 1;5 \rangle \times \langle -2;3 \rangle$ zapište obecně dvojný integrál $\iint_J f(x,y).dx.dy$ jako dvojnásobný (1)

Tedy : $\iint_J f(x,y).dx.dy = \int_1^5 dx \int_{-2}^3 f(x,y)\,dy$ $\boxed{1}$

b) Vypočítejte integrál $\iiint_M \frac{1}{y}.dx.dy.dz = \int_1^2 dx \int_1^x dy \int_y^{y+x} \frac{1}{y} dz = \int_1^2 dx \int_1^x dy \left[\frac{z}{y}\right]_y^{y+x} = \int_1^2 dx \int_1^x \left(\frac{y+x}{y} - \frac{y}{y}\right) dy =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ (10)

kde M: $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le x$, $y \le z \le y + x$

$= \int_1^2 dx \int_1^x \left(1 + \frac{x}{y} - 1\right) dy = \int_1^2 dx \left[x \ln|y|\right]_1^x = \int_1^2 [x \cdot \ln x - x \cdot \ln 1]\,dx =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \int_1^2 x \cdot \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} u' = x & v = \ln x \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \left(\frac{2^2}{2} \ln 2 - 0\right) - \int_1^2 \frac{x}{2} dx = 2 \ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= 2 \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \ln 2 - \frac{3}{4}$ $\boxed{1}$

c) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \{(x;y) \in R^2; x \ge 0 \wedge 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, množinu A načrtněte.

$\iint_A \frac{2.x}{(1 + x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}.dx.dy = \iint_{A\rho\varphi} \frac{2 \cdot \rho \cdot \cos\varphi}{(1+\rho^2) \cdot \rho^2} \rho \cdot d\rho\, d\varphi = \iint_{A\rho\varphi} \frac{2 \cdot \cos\varphi}{1+\rho^2} d\rho\, d\varphi =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ (8)

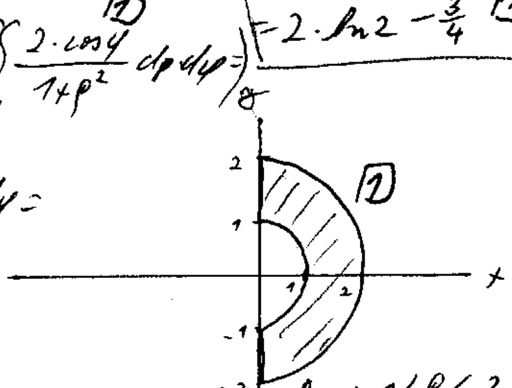
$x = \rho \cdot \cos\varphi$
$y = \rho \cdot \sin\varphi$ $\boxed{1}$
$|J| = \rho$ $\boxed{1}$
$x^2 + y^2 = \rho^2$

$= \int_1^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cdot \cos\varphi}{1+\rho^2} d\varphi = 2 \int_1^2 \frac{1}{1+\rho^2} d\rho \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi =$ $\boxed{1}$

$= 2 \cdot [\operatorname{arctg} \rho]_1^2 \cdot [\sin\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= 2 \cdot [\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1] \cdot [\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})] =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= 2\left[\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}\right] \cdot [1 - (-1)] = 4 \operatorname{arctg} 2 - \pi$ $\boxed{1}$



$A\rho\varphi$: $1 \le \rho \le 2$ $\boxed{1}$

$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\boxed{1}$

(14)

7.1. V R^2 je dána trojúhelník $\overline{\Omega}: 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1-u$ a difeomorfizmus $\vec{g}: x = 2-u+v,\ y = -u+v,\ z = -2+v$, kterým se zobrazí trojúhelník $\overline{\Omega}$ na trojúhelník $L \subset R^3$. a) Pro skalární funkci $f(x,y,z) = x - y + z$ vypočítejte plošný integrál 1. druhu přes plochu L, tj. $\iint_L f.d\sigma = \iint_\Omega f(x,y,z)\cdot\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv \stackrel{\boxed{1}}{=} \iint_\Omega (2-u+v+u-v-2+v)\sqrt{2}\,du\,dv$

$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = (-1)^2+(-1)^2+0^2 = 2$ $\boxed{1}$

$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1^2+1^2+1^2 = 3$ $\boxed{1}$

$g_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 = -2$ $\boxed{1}$

$d\sigma = \sqrt{g_{11}\cdot g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv = \sqrt{2\cdot 3 - (-2)^2}\,du\cdot dv = \sqrt{2}\,du\cdot dv$ $\boxed{1}$

$= \iint_\Omega v\sqrt{2}\,du\cdot dv \stackrel{\boxed{1}}{=} \int_0^1 du \int_0^{1-u} v\cdot\sqrt{2}\,dv = \int_0^1 du\left[\sqrt{2}\cdot\frac{v^2}{2}\right]_0^{1-u} = \int_0^1 \sqrt{2}\left[\frac{(1-u)^2}{2} - 0\right] du =$

$= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{2}(1-2u+u^2)\,du \stackrel{\boxed{1}}{=} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(u - u^2 + \frac{u^3}{3}\right)\right]_0^1 =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - 1^2 + \frac{1^3}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$ $\boxed{1}$ (10)

b) Pro vektorovou funkci $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = (x-y; y-z; z-x)$ vypočítejte plošný integrál 2. druhu přes orientovanou plochu (L), tj. $\iint_{(L)} \vec{F}.d\vec{\sigma} = \iint_\Omega \begin{vmatrix} f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv \stackrel{\boxed{1}}{=} \iint_\Omega \begin{vmatrix} 2 & 2-u & u-4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} du\,dv =$ $\boxed{1}$ (9)

$= \iint_\Omega \left[-2 - (2-u)(-1) + (u-4)\cdot 0\right] du\,dv \stackrel{\boxed{1}}{=} \iint_\Omega (-u)\,du\,dv \stackrel{\boxed{1}}{=} \int_0^1 du \int_0^{1-u} (-u)\,dv \stackrel{\boxed{1}}{=} \int_0^1 \left[-u\cdot v\right]_0^{1-u} du \stackrel{\boxed{1}}{=} \int_0^1 -u(1-u)\,du =$

$= \int_0^1 (u^2 - u)\,du \stackrel{\boxed{1}}{=} \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right]_0^1 \stackrel{\boxed{1}}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

8.1. Je dána obecně orientovaná křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a;b \rangle\}$.

a) Zapište obecně křivkový integrál ze skalární funkce $f = f(x,y,z)$ podél křivky κ a vyjádřete, jak se křivkový integrál vypočítá pomocí jednoduchého integrálu; zapište $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$ $\boxed{1}$

$\int_\kappa f(x,y,z)\,ds \stackrel{\boxed{1}}{=} \int_a^b f(x(t); y(t); z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$ $\boxed{1}$

b) Zapište obecně křivkový integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x;y;z) = (f_1; f_2 f_3)$ podél křivky κ a vyjádřete, jak se křivkový integrál vypočítá pomocí jednoduchého integrálu.

$\int_\kappa \vec{F}\cdot d\vec{s} \stackrel{\boxed{1}}{=} \int_\kappa (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz) = \int_a^b \left(f_1(x,y,z)_t\cdot\dot{x} + f_2(x,y,z)_t\cdot\dot{y} + f_3(x,y,z)_t\cdot\dot{z}\right)dt$ $\boxed{1}$ (4)

8.2. Je dána křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = 1+3.t \wedge y = 2-t \wedge z = 3 \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\}$, skalární funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x-1}.\sqrt{2-y}.\sqrt{3.z}$ a vektorová funkce $\vec{F} \stackrel{\boxed{1}}{=} (f_1; f_2 f_3) = (\sqrt{x-1}; \sqrt{2-y}; \sqrt{3.z})$, $\boxed{1}$

a) Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu $\int_\kappa f(x,y,z).ds =$ | $\dot{x} = 3$; $\dot{y} = -1$; $\dot{z} = 0$; $ds = \sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}\,dt = \sqrt{10}\,dt$

$\int_\kappa f(x,y,z).ds = \int_0^1 \sqrt{1+3t-1}\cdot\sqrt{2-(2-t)}\cdot\sqrt{3\cdot 3}\cdot\sqrt{10}\,dt = \boxed{1}$

$= \int_0^1 \sqrt{3t}\cdot\sqrt{t}\cdot 3\cdot\sqrt{10}\,dt \stackrel{\boxed{1}}{=} \int_0^1 3\cdot\sqrt{30}\cdot t\,dt = 3\cdot\sqrt{30}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \stackrel{\boxed{1}}{=} 3\sqrt{30}\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{3}{2}\sqrt{30}$ (5)

b) Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu $\int_\kappa \vec{F}.d\vec{s} =$ | $dx = 3\cdot dt$; $dy = (-1)\,dt$; $dz = 0\cdot dt$ $\boxed{1}$ $d\vec{s} = (3; -1; 0)\,dt$

$\int_\kappa \vec{F}.d\vec{s} = \int_\kappa (\sqrt{x-1}; \sqrt{2-y}; \sqrt{3z})\cdot(dx; dy; dz) = \int_0^1 (\sqrt{3t}; \sqrt{t}; 3)(3; -1; 0)\,dt \stackrel{\boxed{1}}{=}$

$= \int_0^1 (3\sqrt{3}\sqrt{t} - \sqrt{t} + 0)\,dt \stackrel{\boxed{1}}{=} \int_0^1 (3\sqrt{3}-1)\,t^{\frac{1}{2}}\,dt = (3\sqrt{3}-1)\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \stackrel{\boxed{1}}{=} (3\sqrt{3}-1)\left[\frac{2}{3}t\cdot\sqrt{t}\right]_0^1 =$ (5)

$= (3\sqrt{3}-1)\cdot\left(\frac{2}{3}-0\right) \stackrel{\boxed{1}}{=} 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$