UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060908-6-(1)

1	2	3	4		Σ 1-4	Σ 5-8		Σ 1-8

.... datum .... stud. obor .... ročník .... osobní číslo - STAG .... student - příjmení, jméno

1. a) Vyjádřete podle definice, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **majoritní** posloupností vůči posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ..když $(\forall n \in N)(a_n < b_n)$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete podle definice, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **neklesající** posloupností. .. když $(\forall n \in N)(a_n \leq a_{n+1})$ $\boxed{1}$

c) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \sqrt[n]{n}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \sqrt[n]{n}\right] = e + 1$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

d) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2.n^3-1)^2}{((3.n)^2+1)(1-5.n^4)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^6-4n^3+1}{9n^2-45n^6+1-5n^4} = \lim \frac{4-\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^6}}{\frac{9}{n^4}-45+\frac{1}{n^6}-\frac{5}{n^2}} = -\frac{4}{45}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

e) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^2}$ Řada s kladnými členy $\boxed{1}$ $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx = \left| \begin{matrix} t = 1+x & x\to\infty, t\to\infty \\ dt = dx & x = 1, t = 2 \end{matrix} \right| = \int\limits_2^{\infty}\frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^{\infty} = \lim\limits_{t\to\infty} -\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \in R$ integrál konverguje $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ (8)

Dle integrálního kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

f) Zapište všechny předpoklady a tvrzení limitního podílového kritéria pro konvergenci a divergenci mocninné řady. *Předpoklady : 1.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *je řada* s kladnými členy $\boxed{1}$

2. Existuje ... $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in R$, popř. $A = +\infty$ $\boxed{1}$

Tvrzení : a) Jestliže $A < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

b) Jestliže $A > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (k $+\infty$) $\boxed{1}$

g) Zapište první tři členy mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n.n!}$ a určete její střed, poloměr a obor konvergence. (Citujte použité kritérium)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{(x-1)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-1|}{2\cdot(n+1)} = 0 < 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Mocninná řada konverguje podle podílového kritéria pro $x \in I = M = (-\infty; +\infty)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Střed $a = 1$ $\boxed{1}$

Poloměr $R = +\infty$ $\boxed{1}$

2. a) Zapište podle definice Laplaceův operátor. Tj. : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\boxed{1}$

b) Laplaceův operátor působí na funkci *skalární* – ~~*vektorovou*~~ *)., výsledkem je funkce *skalární* - ~~*vektorová*~~ *). $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

c) Je dána funkce $f(x;y;z) = \cos x + \ln y + \operatorname{tg} z$ a bod $A = [0;1;0]$. d) Zapište obecně, co je Δf.

Tj. $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ $\boxed{1}$ e) Vypočtěte parc. derivace: $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x$ $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x\right.$ $\boxed{\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(A) = -1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}\right.$ $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}\right.$ $\boxed{\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(A) = -1}$ $\left|\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\cos^2 z}\right.$ $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2\cdot\frac{1}{\cos^3 z}(-\sin z)\right.$ $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) = 0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

f) Vypočtěte $\Delta f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) = -1-1+0 = -2$ $\boxed{1}$

*) nehodící se škrtněte

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060908-6-(2)

3. a) Napište podle definice, co znamená, že funkce $f(X)$ o n proměnných $x_1,\dots x_n$ je diferencovatelná v bodě $C\in D(f)$.

Funkce $f(X)$ o n proměnných $x_1,\dots,x_n \in R$ je diferencovatelná v bodě $C=(c_1,\dots,c_n)\in Df$, právě když pro přírůstek funkce platí: $f(C+H)-f(C) = a_1 h_1+\dots+a_n h_n+\omega(H)$, $\boxed{1}$ kde $a_1,\dots,a_n$ jsou konstanty z R a $\omega(H)$ je taková funkce, že $\lim_{H\to(0,\dots,0)}\frac{\omega(h_1,\dots,h_n)}{\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}}=0$ $\boxed{1}$

b) Napište podle definice, co je diferenciál funkce $f(X)$ v bodě $C\in D(f)$.

Diferenciál funkce f v bodě C je $df_C(H)=a_1\cdot h_1+\dots+a_n\cdot h_n$ $\boxed{1}$ a je lineární funkce přírůstků $h_1,\dots,h_n$ $\boxed{1}$

c) Čemu jsou rovny koeficienty v diferenciálu df_C, když $f(X)$ je funkce o n proměnných diferencovatelná v bodě C.

Koeficienty $a_1,\dots,a_n$ v diferenciálu jsou: $a_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}(C),\dots,a_n=\frac{\partial f}{\partial x_n}(C)$ $\boxed{1}$

d) Najděte diferenciál df_C funkce $f(x;y;z)=(x-y)(z^2+x)$ v bodě $C=[3;2;2]$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=z^2+x+x-y=2x-y+z^2$ $\boxed{1}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(C)=8}$ $\boxed{1}$ | $\frac{\partial f}{\partial y}=-z^2-x$ $\boxed{1}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(C)=-7}$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial f}{\partial z}=(x-y)\cdot 2z$ $\boxed{1}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(C)=4}$ $\boxed{1}$ | $df_C=\frac{\partial f}{\partial x}(C)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}(C)\cdot dy+\frac{\partial f}{\partial z}(C)\cdot dz=8\cdot dx-7dy+4\cdot dz$ $\boxed{1}$

e) Najděte diferenciál $df_C(0{,}01;0{,}01;0{,}01)$ funkce $f(x;y;z)=(x-y)(z^2+x)$ v bodě $C=[3;2;2]$ pro přírůstky $(h_1;h_2;h_3)=(0{,}01;0{,}01;0{,}01)$. *Tj.* $df_C(0{,}01;0{,}01;0{,}01)=8\cdot 0{,}01-7\cdot 0{,}01+4\cdot 0{,}01=0{,}05$ $\boxed{1}$

f) Veličiny $x_1,x_2,\dots x_n$ jsou změřeny tak, že $x_1=c_1\pm\Delta x_1,\dots,x_n=c_n\pm\Delta x_n$, kde $\Delta x_1,\dots,\Delta x_n$ jsou příslušné absolutní chyby. Veličina z se počítá z veličin $x_1,x_2,\dots x_n$ jako funkční hodnota funkce $f(x;y;z)$. Vyjádřete obecně vztah pro absolutní chybu Δz veličiny z. (Využijte podobnost s výrazem pro diferenciál.) *Tj.* $\Delta z=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(C)\right|\cdot\Delta x_1+\dots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(C)\right|\cdot\Delta x_n$ $\boxed{1}$

g) Veličina u je určena jako funkce proměnných x, y, z, tj. $f(x;y;z)=(x-y)(z^2+x)$. Měřením bylo zjištěno, že $x=(3{,}00\pm 0{,}01)$, $y=(2{,}00\pm 0{,}01)$ a $z=(2{,}00\pm 0{,}01)$. Určete střední hodnotu, absolutní chybu veličiny u. (Využijte vztah pro diferenciál téže funkce, který máte řešit výše.)

$\bar{u}=f(3,2,2)=(3-2)\cdot(2^2+3)=7$ $\boxed{1}$

$\Delta u=\left|\frac{\partial f}{\partial x}(C)\right|\cdot\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(C)\right|\cdot\Delta y+\left|\frac{\partial f}{\partial z}(C)\right|\cdot\Delta z=$ $\boxed{1}$

$=8\cdot 0{,}01+7\cdot 0{,}01+4\cdot 0{,}01=0{,}19$ $\boxed{1}$

$u=(7{,}00\pm 0{,}19)$ $\boxed{1}$

4. a) Ověřte, že rovnicí $y-3.y^{-1}-2.x+\ln x=0$ a bodem $A=[1;-1]$ je určena implicitně funkce $f: y=y(x)$ taková, že $y(1)=-1$. (Tedy : $F(x;y)=y-3.y^{-1}-2.x+\ln x$)

$F(1,-1)=-1-3\frac{1}{-1}-2\cdot 1+\ln 1=-1+3-2+0=0$ $\boxed{1}$ splněno

$\frac{\partial F}{\partial y}=1+3\cdot y^{-2}$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1)=1+3\frac{1}{(-1)^2}=4\neq 0$ $\boxed{1}$ splněno

Rovnicí a bodem A je určena implicitní funkce $y=y(x)$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(1)$.

$y-3\cdot y^{-1}-2x+\ln x=0 \;/\;\frac{d}{dx}$

$y'-3\cdot(-1)\cdot y^{-2}\cdot y'-2+\frac{1}{x}=0$ $\boxed{1}$

$y'\left(1+\frac{3}{y^2}\right)=2-\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{y^2}}$ $\boxed{1}$

$y'(1)=\frac{2-1}{1+3}=\frac{1}{4}$ $\boxed{1}$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(1)$.

$y'+3\cdot y^{-2}\cdot y'-2+x^{-1}=0 \;/\;\frac{d}{dx}$

$y''+3\cdot(-2)\cdot y^{-3}\cdot y'\cdot y'+3\cdot y^{-2}\cdot y''-x^{-2}=0$ $\boxed{1}$

$y''\left(1+\frac{3}{y^2}\right)=\frac{6(y')^2}{y^3}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow y''=\frac{\frac{6(y')^2}{y^3}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{y^2}}$ $\boxed{1}$

$y''(1)=\frac{\frac{6\left(\frac{1}{4}\right)^2}{(-1)^3}+\frac{1}{1^2}}{1+\frac{3}{(-1)^2}}=\frac{-\frac{6}{16}+1}{4}=\frac{\frac{10}{16}}{4}=\frac{5}{32}$ $\boxed{1}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c=1$ pro implicitní funkci $y=y(x)$.

$T_2(x)=y(1)+y'(1)(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2=$

$=-1+\frac{1}{4}(x-1)+\frac{5}{64}(x-1)^2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060908-6-(3)

5	6	7	8

Σ 5-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

5.1. a) Zapište, jaký tvar má diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými. $y' = g(x)\cdot h(y)$ 1

b) Napište obecně postup, kterým se řeší diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými. $\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)\cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx \Rightarrow y = y(x)$ 1 1 1

c) Zapište obecně homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu. $y' + p(x)\cdot y = 0$ 1

d) Napište obecně postup, jímž se řeší homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu. $\frac{dy}{dx} = -p(x)\cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\cdot dx \Rightarrow$ $\Rightarrow |y| = e^{-\int p(x)\,dx + C} \Rightarrow y = K e^{-\int p(x)dx};\ K \in R$ 1 1 1 1 1

5.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = (1 + y^2)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

1 $\frac{dy}{dx} = (1+y^2)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$ 1 $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\cos^2 x}$ $\Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ $\operatorname{arctg} y = \operatorname{tg} x + C,\ C \in R$ 1 1 $\Rightarrow y = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x + C)$ 1 $C \in R$

5.3. Najděte obecné řešení homogenní difer. Rovnice

$$y' - \frac{1}{x+2}.y = 0$$

pro neznámou funkci $y = y(x)$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+2}$ 1 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+2}$ 1 $\ln|y| = \ln|x+2| + \ln|C|$ 1 $|y| = |C|\cdot|x+2|$ 1 $\Rightarrow y = C\cdot(x+2)$ 1 $C \in R$

5.4. Metodou variace konstanty najděte obecné řešení dif. rovnice: $y' - \frac{1}{x+2}.y = (x+2)e^x$.

$y = C\cdot(x+2);\ C = C(x)$ 1

$y' = C'(x+2) + C$ 1

dosazení: 1

$C'(x+2) + C - \frac{1}{x+2}\cdot C\cdot(x+2) = (x+2)\cdot e^x$

$C'(x+2) + C - C = (x+2)e^x$

$C' = e^x$ 1

$C = \int e^x dx$

$C = e^x + K,\ K \in R$ 1

Hledaná funkce 1

$y = (e^x + K)\cdot(x+2);\ y = (x+2)\cdot e^x + K(x+2)$ $K \in R$

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' + y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

char. rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ 1 $\lambda_{1,2} = \pm i$ 1 $y_h = C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x;\ C_1, C_2 \in R$ 1 1

6. b) Metodou variace konstant nebo pomocí speciálního tvaru pravé strany najděte obecné řešení diferenciální rovnice : $y'' + y = 2$.

$y = C_1\cos x + C_2\cdot\sin x;\ C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$ 1

$y' = C_1'\cos x - C_1\cdot\sin x + C_2'\sin x + C_2\cdot\cos x$ 1

$C_1'\cos x + C_2'\cdot\sin x = 0$ 1

$C_1'(-\sin x) + C_2'\cdot\cos x = 2$ 1

$D = W = \begin{vmatrix} \cos x; & \sin x \\ -\sin x; & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$ 1

$D_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0; & \sin x \\ 2; & \cos x \end{vmatrix} = -2\sin x;\ C_1' = \frac{D_{C_1'}}{D} = -2\sin x \Rightarrow C_1 = \int -2\sin x\,dx = 2\cos x + K_1,\ K_1 \in R$ 1 1 1

$D_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos x; & 0 \\ -\sin x; & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\cos x;\ C_2' = \frac{D_{C_2'}}{D} = 2\cos x$ 1 1

$C_2 = \int 2\cdot\cos x\,dx =$

$= 2\cdot\sin x + K_2,\ K_2 \in R$ 1

$y = (2\cdot\cos x + K_1)\cos x + (2\cdot\sin x + K_2)\sin x$ 1 1

$y = 2\cdot\cos^2 x + 2\cdot\sin^2 x + K_1\cos x + K_2\cdot\sin x$

$y = 2 + K_1\cos x + K_2\cdot\sin x$ 1

7.1. Je dána prostor. křivka $\kappa = \left\{ (x,y,z) \in R^3 ; x = 5.\cos t \wedge y = 5.\sin t \wedge z = \frac{5}{\pi}.t \wedge t \in \langle 0; 2.\pi \rangle \right\}$. $\boxed{1}$

a) Napište vzoreček pro výpočet délky parametricky zadané prostorové křivky. $S = \int_K 1 \cdot ds \boxed{1} = \int_a^b 1 \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt$

b) Vypočítejte délku výše dané prostorové křivky.

$\dot{x} = -5\sin t \boxed{1};\ \dot{y} = 5\cdot\cos t \boxed{1};\ \dot{z} = \frac{5}{\pi} \boxed{1}$

$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-5\cdot\sin t)^2 + (5\cdot\cos t)^2 + \left(\frac{5}{\pi}\right)^2}\, dt \boxed{1} = \int_0^{2\pi} \sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t + \frac{25}{\pi^2}}\, dt = \int_0^{2\pi} 5\sqrt{1+\frac{1}{\pi^2}}\, dt \boxed{1} = \left[\frac{5}{\pi}\sqrt{\pi^2+1}\, t\right]_0^{2\pi} = \boxed{1} = 10\sqrt{1+\pi^2}$

7.2. Vekt. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = \left(y.z + 2.x ; x.z - \frac{1}{y^2} ; x.y + \frac{1}{z} \right)$, body $A = [0;1;1], B = [2;2;2]$.

a) Vypočítejte $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F}$ a ověřte, že vektorová funkce $\vec{F}$ je potenciální v oblasti, kde $z > 0$.

$\mathrm{rot}\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \boxed{1} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} ; \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} ; \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \boxed{1} = (x - x \boxed{1} ; y - y \boxed{1} ; z - z \boxed{1}) = (0,0,0) \boxed{1} \Rightarrow \boxed{1}$ Vekt. funkce $\vec{F}$ je potenciální.

b) Nalezněte funkci, která je potenciálem vektorové funkce $\vec{F}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot z + 2x \boxed{1} \Rightarrow u = \int (y\cdot z + 2x)\, dx = x\cdot y \cdot z + x^2 + \varphi(y,z) \boxed{1}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot z + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} \boxed{1} \stackrel{!}{=} x\cdot z - \frac{1}{y^2} \boxed{1} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -y^{-2} \boxed{1} \Rightarrow \varphi = \int -y^{-2}\, dy = \frac{1}{y} + \psi(z) \boxed{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = x\cdot y \cdot z + x^2 + \frac{1}{y} + \psi(z) \boxed{1}$

$\frac{\partial u}{\partial z} = x \cdot y + \psi' \boxed{1} \stackrel{!}{=} x\cdot y + \frac{1}{z} \boxed{1} \Rightarrow \psi' = \frac{1}{z} \boxed{1} \Rightarrow \psi = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + C \boxed{1}, C \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow u = x\cdot y\cdot z + x^2 + \frac{1}{y} + \ln|z| + C \boxed{1}$

c) Vypočtěte křivkový integrál $\int_A^B \vec{F}.d\vec{s} = \left[x\cdot y \cdot z + x^2 + \frac{1}{y} + \ln|z| \right]_{A=[0,1,1]}^{B=[2,2,2]} \boxed{1} = \left[2\cdot 2 \cdot 2 + 2^2 + \frac{1}{2} + \ln 2 - (0 + 0 + 1 - \ln 1) \right] =$

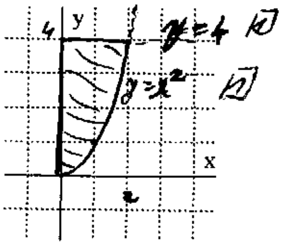
$= 8 + 4 + \frac{1}{2} + \ln 2 - 1 = 11{,}5 + \ln 2 \boxed{1}$

8.1. Vypočítejte $\iint_A f(x;y).dx.dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 y.dy = \int_0^2 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^4 \boxed{1} =$

$= \int_0^2 \left(8 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx \boxed{1} = \left[8x - \frac{x^5}{10} \right]_0^2 = 16 - \frac{32}{10} = \frac{128}{10} = 12{,}8 \boxed{1}$

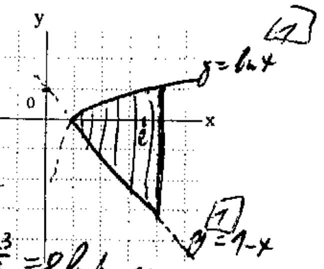
– Množinu $A \subset R^2$ zapište jako normální množinu $A_{x,y} : 0 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 4$

vzhledem k druh souřadné ose a množinu A načrtněte. →→→→ | A :



8.2. Znázorněte množinu $M = \{(x,y) \subset R^2 ; 1 \le x \le 4 \wedge 1 - x \le y \le \ln x\}$

a vypočítejte $\iint_M x.dx.dy = \int_1^4 dx \int_{1-x}^{\ln x} x \cdot dy = \int_1^4 x \left[y \right]_{1-x}^{\ln x} dx =$ | M :



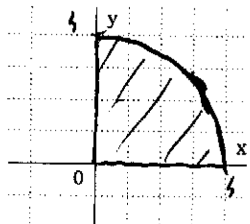
$= \int_1^4 (x \cdot \ln x - x + x^2)\, dx \boxed{1} = \left| \begin{matrix} u' = x & v = \ln x \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx + \int_1^4 (-x + x^2)\, dx$

$= 8 \cdot \ln 4 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^4 + \left[\frac{-x^2}{2} \right]_1^4 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = 8 \ln 4 - \frac{16}{4} + \frac{1}{4} - \frac{16}{2} + \frac{1}{2} + \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 8 \ln 4 - \frac{45}{4} + \frac{63}{3} = 8 \ln 4 - 11{,}25 + 21 = 8 \ln 4 + 9{,}75$

8.3 Množ. $A = \{(x;y) \in R^2 ; x^2 + y^2 \le 16 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$

Množinu A načrtněte a substitucí do polárních souřadnic

vypočtěte $\iint_A \sqrt[4]{x^2 + y^2}.dx.dy = \iint \sqrt[4]{\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi =$



$x = \rho \cdot \cos \varphi \boxed{1}$

$y = \rho \cdot \sin \varphi \boxed{1}$

$x^2 + y^2 = \rho^2 \boxed{1}$

$|J| = \rho \boxed{1}$

$A_{\rho,\varphi} : 0 \le \rho \le 4 \boxed{1}$

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \boxed{1}$

$= \int_0^4 \rho^{\frac{3}{2}} \cdot d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot d\varphi = \left[\frac{2 \cdot \rho^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^4 \cdot \left[\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \left[\frac{2}{5} (\sqrt{\rho})^5 \right]_0^4 \cdot \frac{\pi}{2} \boxed{1} = \left[\frac{2}{5} (\sqrt{4})^5 - 0 \right] \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{64}{5} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{32}{5} \pi = 6{,}4 \cdot \pi$