

1	2	3	4
---	---	---	---

Σ 1-4	Σ 5-8
-------	-------

Σ 1-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. a) Uveďte všechny alternativy, které mohou nastat pro $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, jestliže je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

divergentní. Tj. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =$ nebo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =$ nebo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =$

b) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n+1} =$

c) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 5^{n+2}}{5^n + 2^{n+1}} =$

d) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+n^2}$$

e) Zapište všechny předpoklady a tvrzení integrálního kritéria pro konvergenci mocninné řady. *Předpoklady* : 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada

(předpoklad druhý :) 2.

Tvrzení :

h) Zapište první čtyři členy mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{5^{n-1}}$ a určete její střed, poloměr, interval a obor konvergence. (Citujte vždy použité kritérium a **nezapomeňte** řešit konvergenci v hraničních bodech intervalu!)

$$\sum_{n=1}^4 a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$$

2.1 a) Zapište, co je gradient a z jaké funkce jej lze počítat, co je výsledkem? *Odpověď (doplňte)* : Gradient je, který(á) působí na funkci ... skalární - vektorovou ..., výsledkem je funkce ... skalární - vektorová

b) Je dána funkce $f(x; y; z) = 2x - y^2 + \ln z + \frac{x}{z}$ a bod $A = [3; 2; 1]$. Určete $f(A) =$

a zapište obecně, co je $\overrightarrow{\text{grad}} f$, a určete $\overrightarrow{\text{grad}} f(A)$. Řešení (obecně) : $\overrightarrow{\text{grad}} f =$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(A) =$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(A) =$$

3. a) Za předpokladu, že bod $A \in Df$ je stacionárním bodem funkce $f(x, y) \in C^2$

- uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního minima v bodě A, tj.

- uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního maxima v bodě A, tj.

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x; y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 6x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

c) Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x; y) = -x - 2y - 1$ vázané na množinu

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x = 0\}.$$

4. a) Ověřte, že rovnicí $y^2 - 3y + 2x - \ln x = 0$ a bodem $A = [1; 2]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(1) = 2$. (Tedy: $F(x; y) = y^2 - 3y + 2x - \ln x$)

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(1)$. | c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(1)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 1$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$$T_2(x) =$$

5	6	7	8
---	---	---	---

Σ 5-8

.....				
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

5.1. a) Zapište podle definice Wronského determinant dvou funkcí $y_1(x)$; $y_2(x)$ a

	Obecně :	Konkrétně :
a vypočítejte konkrétně Wronského determinant funkcí $y_1(x) = \ln x$ a $y_2(x) = x \cdot \ln x$	$W =$	$W =$

b) Jakou hodnotu bude mít Wronského determinant, jestliže funkce $y_1(x)$; $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé na intervalu I ? Tj. $W =$ _____

c) Jakou hodnotu bude mít Wronského determinant, jestliže funkce $y_1(x)$; $y_2(x)$ jsou lineárně závislé na intervalu I ? Tj. $W =$ _____

5.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice 3. řádu : $y''' = 4 \cdot x^{-3} + \sin x$; $y' =$ _____

$y'' =$ _____

$y =$ _____

5.3. Je dána diferenciální rovnice _____
 $(2 \cdot x + y) + (2 \cdot y + x - 1) \cdot y' = 0$.

a) Ověřte, že je daná dif. rov. exaktní.

b) Vyřešte danou dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení. _____

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' + y' - 2 \cdot y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

6. b) Metodou variace konstant nebo pomocí speciálního tvaru pravé strany najděte obecné řešení diferenciální rovnice : $y'' + y' - 2 \cdot y = 5$.

7.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a; b \rangle\}$.

Podle příslušné definice objasněte, kdy je prostorová křivka :

a) hladká

b) jednoduchá

c) regulární

d) uzavřená

Čím je určena orientace

prostorové křivky ?

7.2. Parametrizujte úsečku AB, kde $A = [1; -2]$

a $B = [5; -5]$, tak, aby bod A byl počátečním bodem a B koncovým bodem.

7.3. Vypočítejte křivkový integrál 2. druhu z vekt. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2) = \left(\sin\left(-\frac{x}{5}\right); \cos(y-1) \right)$

po orientované křivce $\kappa = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -5 \cdot t \wedge y = 1 + t \wedge t \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle\}$.

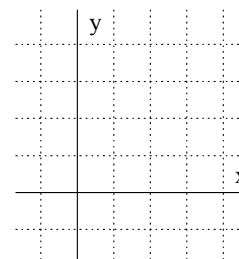
$$\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

8.1. Zapište (obecně, podle definice) množinu $A \subset \mathbb{R}^2$, která je normální

vzhledem k druhé souřadné ose.

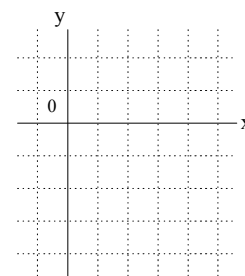
8.2. Znázorněte množinu $M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2 \wedge 2^x \leq y \leq -1 + x\}$

a vypočítejte obsah obrazce, který je tvořen body množiny M_0 .



8.3 Znázorněte množinu $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 2 \wedge x^2 - 2 \leq y \leq x\}$ a

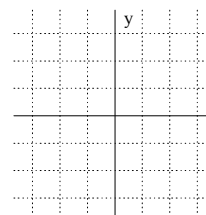
vypočítejte $\iint_{M_1} x \cdot dx \cdot dy =$



8.4 Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte uvedený

integrál, množinu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ načrtněte.

$$\iint_A \ln(x^2 + y^2) dx \cdot dy =$$



$$x =$$

$$y =$$

$$|J| =$$

$$x^2 + y^2 =$$

$$A_{\varphi, \rho} : \leq \rho \leq$$

$$\leq \varphi \leq$$