UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060905-5-(1)

1	2	3	4

$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8

$\sum$ 1-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1. a) Uveďte všechny alternativy, které mohou nastat pro $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jestliže je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní. *Tj.* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\boxed{1}$ nebo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ $\boxed{1}$ nebo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ neexistuje $\boxed{1}$

b) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right) = e^2 \cdot 1 = e^2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

c) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-5^{n+2}}{5^n+2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 5^2}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot 2} = \dfrac{0-25}{1+0} = -25$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

d) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{1+n^2}$; $\int_1^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\cdot\left[\operatorname{arctg} x\right]_1^{\infty} = 2\cdot\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - 2\cdot\operatorname{arctg} 1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \in R$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Dle integrálního kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$ $\Leftarrow$ tj. integrál konverguje $\boxed{1}$

e) Zapište všechny předpoklady a tvrzení integrálního kritéria pro konvergenci mocninné řady.

Předpoklady : 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada* s kladnými členy $\boxed{1}$

(předpoklad druhý :) 2. Existuje nerostoucí kladná funkce $f(x)$ definovaná na $\langle 1; +\infty)$ taková, že $\forall n \in N$ je $a_n = f(n)$ $\boxed{1}$

Tvrzení : Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$ právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ $\boxed{1}$

h) Zapište první čtyři členy mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{5^{n-1}}$ a určete její střed, poloměr, interval a obor konvergence. (Citujte vždy použité kritérium a nezapomeňte řešit konvergenci v hraničních bodech intervalu!)

$\sum\limits_{n=1}^{4} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4 = (x-5) + \dfrac{(x-5)^2}{5} + \dfrac{(x-5)^3}{25} + \dfrac{(x-5)^4}{125}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ limitní podílové kritérium $\boxed{1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(x-5)^{n+1}}{5^n}\cdot\dfrac{5^{n-1}}{(x-5)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x-5}{5}\right| = \dfrac{|x-5|}{5} < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 5 \Rightarrow$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow$ interval konvergence $I = (0; 10)$, Střed $x = 5$, poloměr $R = 5$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$x = 0 \Rightarrow \sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-5)^n}{5^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-5)\cdot(-1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5\cdot(-1)^{n+1}$ – řada diverguje pro $x=0$ – není splněna nutná podmínka konvergence $\left(\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}|5\cdot(-1)^{n+1}| = 5 \neq 0\right)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$x = 10 \Rightarrow \sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{5^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5 = +\infty$ – řada diverguje, protože $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $M = (0; 10)$ obor konvergence $\boxed{1}$

2.1 a) Zapište, co je gradient a z jaké funkce jej lze počítat, co je výsledkem ? *Odpověď (doplňte) :*
Gradient je operátor $\boxed{1}$*, který(á) působí na funkci* skalární $\boxed{1}$*, výsledkem je funkce* vektorová $\boxed{1}$

b) Je dána funkce $f(x;y;z) = 2.x - y^2 + \ln z + \dfrac{x}{z}$ a bod $A = [3;2;1]$. Určete $f(A) = 2\cdot 3 - 2^2 + \ln 1 + \frac{3}{1} = 5$ $\boxed{1}$

a zapište obecně, co je $\overrightarrow{\text{grad}}f$ a určete $\overrightarrow{\text{grad}}f(A)$. *Řešení (obecně) :* $\overrightarrow{\text{grad}}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}; \dfrac{\partial f}{\partial y}; \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2 + \dfrac{1}{z}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 3}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$ $\boxed{1}$ $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = -4}$ $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{z^2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial z}(A) = 1 - 3 = -2}$

$\overrightarrow{\text{grad}}f(A) = (3; -4; -2)$ $\boxed{1}$

3. a) Za předpokladu, že bod $A \in Df$ je stacionárním bodem funkce $f(x,y) \in C^2$

- uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního minima v bodě A, tj. $D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A); & f''_{xy}(A) \\ f''_{xy}(A); & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0 \wedge f''_{xx}(A) > 0$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$
- uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního maxima v bodě A, tj. $D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A); & f''_{xy}(A) \\ f''_{xy}(A); & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0 \wedge f''_{xx}(A) < 0$ $\boxed{1}$

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y) = 2.x^2 - 4.x.y + 5.y^2 - 6.x$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4y - 6 \overset{!}{=} 0$ $\boxed{1}$ Součet obou rovnic: $6y - 6 = 0 \Rightarrow y = 1$ Stac. bod

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4x + 10y \overset{!}{=} 0$ $\boxed{1}$ Dosazení $y=1$ do jedné z rovnic $\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ $A = [+\frac{5}{2}; 1]$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$ $\boxed{1}$; $f''_{xx}(A) = 4$ $\qquad D = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 16 = 24 > 0 \wedge$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} = -4$ $\boxed{1}$; $f''_{xy}(A) = -4$ $\qquad \wedge f''_{xx}(A) = 4 > 0$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$ V bodě A nastává lok. minimum $f(x,y)$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10$ $\boxed{1}$; $f''_{yy}(A) = 10$

$f(A) = 2\left(+\frac{5}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(+\frac{5}{2}\right)\cdot 1 + 5\cdot 1^2 - 6\left(+\frac{5}{2}\right) =$
$= \frac{25}{2} - 10 + 5 - 15 = -7{,}5$ $\boxed{1}$

c) Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x;y) = -x - 2.y - 1$ vázané na množinu $M = \{(x,y) \in R^2; y^2 - x = 0\}$. Vazbu lze vyjádřit explicitně: $x = y^2$. $\boxed{1}$

Vytvoření funkce $F(y) = f(y^2; y) = -y^2 - 2y - 1$ $\boxed{1}$

$F'_y(y) = -2y - 2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow y = -1$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ — to je stacionární bod funkce $F(y)$

$F''_{yy}(y) = -2 < 0$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$ V bodě $y = -1$ je lok. maximum funkce $F(y)$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$ V bodě $A = [1; -1]$ $\boxed{1}$ je lokální vázané maximum funkce $f(x,y)$, $f(A) = 0$ $\boxed{1}$

4. a) Ověřte, že rovnicí $y^2 - 3.y + 2.x - \ln x = 0$ a bodem $A = [1;2]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(1) = 2$. (Tedy : $F(x;y) = y^2 - 3.y + 2.x - \ln x$)

$F(1,2) = 2^2 - 3.2 + 2\cdot 1 - \ln 1 = 4 - 6 + 2 - 0 = 0$ – splněno $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - 3$; $\dfrac{\partial F}{\partial y}(A) = 2\cdot 2 - 3 = 1 \neq 0$ – splněno $\boxed{1}$

Uvedenou rovnicí a bodem A je určena implicitní funkce $f: y = y(x)$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(1)$.

$y^2 - 3y + 2x - \ln x = 0 \; / \frac{\partial()}{\partial x}$

$2.y.y' - 3y' + 2 - \frac{1}{x} = 0$ $\boxed{1}$

$y'(2y - 3) = x^{-1} - 2$

$y' = \dfrac{x^{-1} - 2}{2y - 3}$ $\boxed{1}$; $y'(1) = \dfrac{1^{-1} - 2}{2\cdot 2 - 3} = -1$ $\boxed{1}$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(1)$.

$2\cdot y\cdot y' - 3y' + 2 - x^{-1} = 0 \; / \frac{\partial()}{\partial x}$

$2\cdot y' y' + 2\cdot y\cdot y'' - 3y'' + x^{-2} = 0$ $\boxed{1}$

$(2y - 3)y'' = -2(y')^2 - x^{-2}$

$y'' = \dfrac{-2(y')^2 - x^{-2}}{2y - 3}$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow y''(1) = \dfrac{-2(-1)^2 - 1^{-2}}{2\cdot 1 - 3} = -3$ $\boxed{1}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 1$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(1) + y'(1)\cdot(x-1) + \frac{1}{2!}y''(1)\cdot(x-1)^2 = 2 - 1\cdot(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060905-5-(3)

5	6	7	8

$\sum$5-8

....
datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5.1. a) Zapište podle definice Wronského determinant dvou funkcí $y_1(x); y_2(x)$ a a vypočítejte konkrétně Wronského determinant funkcí $y_1(x) = \ln x$ a $y_2(x) = x.\ln x$

Obecně: $\boxed{1}$ $W = \begin{vmatrix} y_1(x) ; y_2(x) \\ y_1'(x) ; y_2'(x) \end{vmatrix}$

Konkrétně: $\boxed{1}$ $W = \begin{vmatrix} \ln x ; x\cdot\ln x \\ \frac{1}{x} ; \ln x + \frac{x}{x} \end{vmatrix} = \ln^2 x + \ln x - \frac{x}{x}\ln x = \ln^2 x$ $\boxed{1}$

b) Jakou hodnotu bude mít Wronského determinant, jestliže funkce $y_1(x); y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé na intervalu I ? *Tj.* W $\neq 0$ $\boxed{1}$

c) Jakou hodnotu bude mít Wronského determinant, jestliže funkce $y_1(x); y_2(x)$ jsou lineárně závislé na intervalu I ? *Tj.* W = 0 $\boxed{1}$

5.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice 3. řádu : $y''' = 4.x^{-3} + \sin x$;

$y'' = \int (4\cdot x^{-3} + \sin x)\,dx = \frac{4\cdot x^{-2}}{-2} - \cos x + C_1 = -2x^{-2} - \cos x + C_1$

$y' = \int (-2\cdot x^{-2} - \cos x + C_1)\,dx = \frac{-2x^{-1}}{-1} - \sin x + C_1\cdot x + C_2 = 2\cdot\frac{1}{x} - \sin x + C_1 x + C_2$

$y = \int (2\cdot\frac{1}{x} - \sin x + C_1 x + C_2)\,dx = 2\cdot\ln|x| + \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \; ; C_1, C_2, C_3 \in R$

5.3. Je dána diferenciální rovnice $(2.x + y) + (2.y + x - 1).y' = 0$.

a) Ověřte, že je daná dif. rov. exaktní. $P(x,y) = 2x + y$, $Q(x,y) = 2y + x - 1$

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ Dif. rovnice je exaktní $\boxed{1}$

b) Vyřešte danou dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení. Existuje potenciál $V(x,y)$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + y \Rightarrow V = \int (2x + y)\,dx = x^2 + xy + \varphi(y)$

$\frac{\partial V}{\partial y} = x + \varphi_y'(y) = 2y + x - 1 \Rightarrow \varphi'(y) = 2y - 1 \Rightarrow \varphi(y) = \int (2y - 1)\,dy = y^2 - y$

$V(x,y) = x^2 + x\cdot y + y^2 - y$; Řešením diferenciální rovnice v implicitním tvaru je dáno:

$y = y(x)$: $x^2 + y^2 + xy - y = C \; ; C \in R$

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' + y' - 2.y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

Char. rovnice $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$
$\lambda_1 = -2 \; , \lambda_2 = 1$

$y_h = C_1\cdot e^{-2x} + C_2\cdot e^{x} \; ; C_1, C_2 \in R$

6. b) Metodou variace konstant nebo pomocí speciálního tvaru pravé strany najděte obecné řešení diferenciální rovnice : $y'' + y' - 2.y = 5$. Variace konstant :

$y = C_1\cdot e^{-2x} + C_2\cdot e^{x}$; $C_1 = C_1(x)$; $C_2 = C_2(x)$; $y' = C_1' e^{-2x} - 2\cdot C_1\cdot e^{-2x} + C_2' e^{x} + C_2\cdot e^{x}$

$C_1'\cdot e^{-2x} + C_2'\cdot e^{x} = 0$
$C_1'(-2)\cdot e^{-2x} + C_2' e^{x} = 5$

$D = W = \begin{vmatrix} e^{-2x} ; e^{x} \\ -2e^{-2x} ; e^{x} \end{vmatrix} = e^{-x} + 2e^{-x} = 3\cdot e^{-x}$

$D_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^{-2x} ; 0 \\ -2e^{-2x} ; 5 \end{vmatrix} = 5\cdot e^{-2x}$; $C_2' = \frac{D_{C_2'}}{D} = \frac{5\cdot e^{-2x}}{3\cdot e^{-x}} = \frac{5}{3}e^{-x} \Rightarrow$

$C_2 = \int \frac{5}{3}e^{-x}\,dx = -\frac{5}{3}e^{-x} + K_2, K_2 \in R$

$D_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 ; e^{x} \\ 5 ; e^{x} \end{vmatrix} = -5\cdot e^{x} \Rightarrow C_1' = \frac{D_{C_1'}}{D} = \frac{-5e^{x}}{3\cdot e^{-x}} = -\frac{5}{3}e^{2x}$

$C_1 = \int -\frac{5}{3}e^{2x}\,dx = -\frac{5}{6}e^{2x} + K_1, K_1 \in R$

Obecné řešení:

$y = (-\frac{5}{6}e^{2x} + K_1)\cdot e^{-2x} + (-\frac{5}{3}e^{-x} + K_2)\cdot e^{x} = -\frac{5}{6} + K_1\cdot e^{-2x} - \frac{5}{3} + K_2\cdot e^{x} = -\frac{5}{2} + K_1\cdot e^{-2x} + K_2\cdot e^{x}$

7.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a;b \rangle\}$.

Podle příslušné definice objasněte, kdy je prostorová křivka

a) hladká .. pokud funkce $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$ mají spojité první derivace $\boxed{1}$

b) jednoduchá .. pokud neexistují dva různé parametry, kterými by byl určen stejný bod křivky $\boxed{1}$

c) regulární .. pokud $\forall t \in \langle a;b\rangle$ $\left[\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right] \neq [0;0;0]$ $\boxed{1}$

d) uzavřená .. pokud počáteční i koncový parametr určují týž bod, tj. $x(a) = x(b), y(a) = y(b)$ a $z(a) = z(b)$ $\boxed{1}$

Čím je určena orientace prostorové křivky ? Křivka je orientována ve smyslu rostoucího parametru $\boxed{1}$

7.2. Parametrizujte úsečku AB, kde $A = [1;-2]$ a $B = [5;-5]$, tak, aby bod A byl počátečním bodem a B koncovým bodem.

$\vec{s} = \vec{AB} = B - A = (4;-3)$

$AB = \{(x,y) \in R^2; x = 1 + 4t \wedge y = -2 - 3t \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

7.3. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu z vekt. funkce $\vec{F} = (f_1;f_2) = \left(\sin\left(-\frac{x}{5}\right);\cos(y-1)\right)$

po orientované křivce $\kappa = \{(x,y) \in R^2; x = -5.t \wedge y = 1 + t \wedge t \in \langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle\}$. $x = -5t;\ dx = -5dt$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$; $y = 1+t;\ dy = dt$

$\int\limits_\kappa \vec{F}.d\vec{s} = \int\limits_\kappa \sin\left(-\frac{x}{5}\right).dx + \cos(y-1).dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{-5t}{-5}\right)(-5)dt + \cos(1+t-1)dt =$

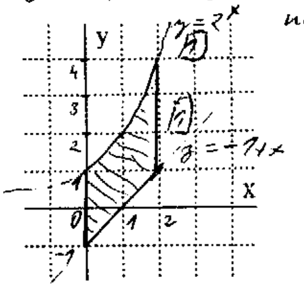
$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin t \cdot (-5) + \cos t]\,dt = \left[5\cdot\cos t + \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5\cdot\cos\frac{\pi}{2} - 5\cdot\cos 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = -5+1 = -4$ $\boxed{1}$

8.1. Zapište (obecně podle definice) množinu $A \subset R^2$, která je normální vzhledem k druhé souřadné ose.

$A:\ a \le x \le b$ $\boxed{1}$

$y_1(x) \le y \le y_2(x)$, kde $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou spojité funkce na $\langle a,b\rangle$ $\boxed{1}$

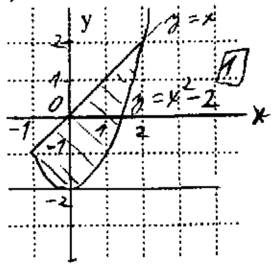
8.2. Znázorněte množinu $M_0 = \{(x,y) \subset R^2; 0 \le x \le 2 \wedge 2^x \le y \le -1 + x\}$ a vypočítejte obsah obrazce, který je tvořen body množiny M_0.



$P = \mu(M_0) = \iint\limits_{M_0} 1.dx.dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-1+x}^{2^x} 1.dy = \int\limits_0^2 [y]_{-1+x}^{2^x} dx = \int\limits_0^2 (2^x + 1 - x)dx$

$= \left[\frac{2^x}{\ln 2} + x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2^2}{\ln 2} + 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^0}{\ln 2} - 0 + 0 = \frac{4}{\ln 2} + 2 - 2 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2}$ $\boxed{1}$

8.3 Znázorněte množinu $M_1 = \{(x,y) \subset R^2; -1 \le x \le 2 \wedge x^2 - 2 \le y \le x\}$ a

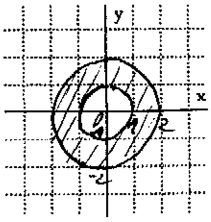


vypočítejte $\iint\limits_{M_1} x\,.dx.dy = \int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2-2}^{x} x\,dy = \int\limits_{-1}^2 x \cdot dx\,[y]_{x^2-2}^{x} = \int\limits_{-1}^2 x\,[x - x^2 + 2]\,dx =$

$= \int\limits_{-1}^2 (x^2 - x^3 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2\right]_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + 2^2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4} + (-1)^2\right) =$

$= \frac{8}{3} - 4 + 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 = 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25$ $\boxed{1}$

8.4 Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte uvedený integrál, množinu $A = \{(x;y) \in R^2; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ načrtněte



$x = \rho \cdot \cos\varphi$ $\boxed{1}$

$y = \rho \cdot \sin\varphi$ $\boxed{1}$

$|J| = \rho$ $\boxed{1}$

$x^2 + y^2 = \rho^2$

$A_{\varphi,\rho}: 1 \le \rho \le 2$ $\boxed{1}$

$0 \le \varphi \le 2\pi$ $\boxed{1}$

$\iint\limits_A \ln(x^2 + y^2)dx.dy = \iint\limits_{A_{\rho,\varphi}} \ln\rho^2 \cdot \rho\,d\rho \cdot d\varphi =$ $\boxed{1}$

$= \int\limits_1^2 \ln\rho^2 \cdot \rho\,d\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi = \left| \begin{array}{l} t = \rho^2 \\ dt = 2\rho \cdot d\rho;\ \rho\,d\rho = \frac{dt}{2} \end{array} \begin{array}{l} \rho = 2 \Rightarrow t = 4 \\ \rho = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| =$

$= \int\limits_1^4 \ln t\,\frac{dt}{2}\,[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2}\int\limits_1^4 \ln t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln t \\ u = t & v' = \frac{1}{t} \end{array} \right| = \pi\left\{[t \cdot \ln t]_1^4 - \int\limits_1^4 \frac{t}{t}\,dt\right\} =$

$= \pi\left\{4 \cdot \ln 4 - 1 \cdot \ln 1 - [t]_1^4\right\} = \pi\{4 \cdot \ln 4 - (4-1)\} = \pi\{4 \cdot \ln 4 - 3\} = 4\pi\ln 4 - 3\pi = 8\pi\ln 2 - 3\pi$ $\boxed{1}$