

1	2	3	4
---	---	---	---

Σ 1-4	Σ 5-8
-------	-------

Σ 1-8

- datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno
1. a) Zapište podle definice, že posloup-
nost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu A, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow$ def.
- b) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) =$
- c) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctg \frac{2-n^3}{n^2+2n} =$
- d) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

e) – Zapište obecně, co je částečný součet s_n číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. $s_n =$

– Zapište obecně, jak se vypočítá součet s číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. $s =$

– Zapište, co znamená, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$, tj.

– Zapište, kdy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a nemá součet, tj.

– Zapište, kdy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ geometrická.

– Zapište, kdy má geometrická řada součet a jak se vypočítá, tj.

f) Určete, zda je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$ geometrická, určete její interval konvergence a její součet.

2.1 a) Zapište, co je divergence a z jaké funkce ji lze počítat, co je výsledkem? Odpověď (doplňte):
Divergence je, který(á) působí na funkci ... , výsledkem je funkce ...

b) Je dána vektorová funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = (2x + y; y^2 + 3z^2; x^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{3}{2}})$ a bod $A = [0; 1; 4]$,

Zapište obecně, co je $\text{div} \vec{F}$ a určete $\text{div} \vec{F}(A)$. Řešení: $\text{div} \vec{F} =$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(A) \right] = \left| \frac{\partial f_2}{\partial y} = \left[\frac{\partial f_2}{\partial y}(A) \right] = \left| \frac{\partial f_3}{\partial z} = \left[\frac{\partial f_3}{\partial z}(A) \right] =$$

$$\text{div} \vec{F}(A) =$$

3.1. – Co vznikne z funkce n proměnných $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, jestliže dojde k jejímu zúžení o proměnnou x_i ?

– O které proměnné je nutno zúžit funkci $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, aby z ní vznikla funkce jedné proměnné $g(x_k) = f(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$?

– Jak je definována parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_1, \dots, c_n) =$

funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ podle proměnné x_k v bodě $C = (c_1, \dots, c_n) \in Df$.

– Pro funkci $f(x; y)$ v bodě $A = [x_0; y_0]$ запиšte obecně Taylorův polynom.

$$T_2(x, y) =$$

3.2. Pro $f(x; y) = x \cdot e^{y-1} + y \cdot \sin(x - 3)$ a bod $A = [3; 1]$ najděte Taylorův polynom $T_2(x, y)$.

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x} = & ; \frac{\partial f}{\partial x}(A) = & \left| \frac{\partial f}{\partial y} = \right. & ; \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = & ; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \right. & ; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = & \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}(A) = & \left| f(A) = \right. \end{array}$$

4. a) Ověřte, že rovnicí $4 \cdot y + \ln y - (x - 1)^2 = 0$ a bodem $A = [3; 1]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(3) = 1$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(3)$. | c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(3)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 3$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$$T_2(x) =$$

5	6	7	8
---	---	---	---

Σ 5-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5.1. a) Zapište obecně obyčejnou
 diferenciální rovnici n-tého řádu.

b) Co musí být nutně obsaženo v zápise

obyč. diferenciální rovnice n-tého řádu ?

c) Co je řešením obyčejné

diferenciální rovnice n-tého řádu ?

5.2. Najděte obecné řešení diferenciální

rovnice 3. řádu : $y''' = 2 \cdot x^{-3} + \cos x$; $y' =$

$y'' =$

$y =$

5.3. Je dána diferenciální rovnice

$$(2 \cdot x + y) + (3 \cdot y^2 + x) \cdot y' = 0 .$$

a) Ověřte, že je daná dif. rov. exaktní.

b) Vyřešte danou dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení.

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' - y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

6. b) Metodou variace konstant najděte obecné řešení diferenciální rovnice : $y'' - y = \sin x$.

7.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a; b \rangle\}$.

Podle příslušné definice objasněte, kdy prostorová křivka vyjádřená parametricky je :

- a) hladká
- b) jednoduchá
- c) regulární
- d) uzavřená

Čím je určena orientace
prostorové křivky ?

7.2. Parametrizujte úsečku AB, kde $A = [-1; 3]$ _____

a $B = [3; -2]$, tak, aby bod A byl počátečním bodem a B koncovým bodem.

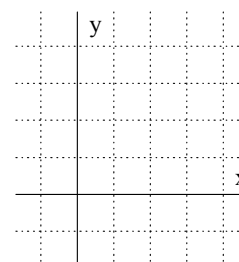
7.3. Vypočítejte křivkový integrál 2. druhu z vektorové funkce $\vec{F} = (f_1; f_2) = (\sqrt{x+1}; \sqrt{x+1})$
po orientované křivce $\kappa = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 3 - 4 \cdot t \wedge y = -2 + 5 \cdot t \wedge t \in \langle 0; 1 \rangle\}$.

$$\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

8.1. Zapište (obecně podle definice) množinu $A \subset \mathbb{R}^2$, jež je normální

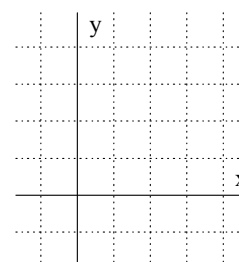
vzhledem k druhé souřadné ose.

8.2. Znázorněte množinu $M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 4\}$ a
vypočítejte obsah tohoto obrazce tvořeného body množiny M_0 .



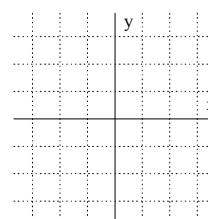
8.3 Znázorněte množinu $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 4\}$ a

vypočítejte $\iint_{M_1} \frac{1}{x} \cdot dx \cdot dy =$



8.4 Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9\}$,
množinu A načrtněte.

$$\iint_A \ln(1 + x^2 + y^2) dx \cdot dy =$$



$$\begin{aligned} x &= \\ y &= \\ |J| &= \\ x^2 + y^2 &= \\ A_{\varphi, \rho} : & \leq \rho \leq \\ & \leq \varphi \leq \end{aligned}$$