UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060703-4-(1)

1	2	3	4	Σ 1-4	Σ 5-8	Σ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1\. a) Zapište podle definice, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu A, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(|a_n - A| < \varepsilon)$ $\boxed{1}$

b) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overset{\boxed{1}}{n+2-(n-2)}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = \frac{4}{\infty} = 0$ $\boxed{1}$

c) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{2-n^3}{n^2+2.n} = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{\overset{\boxed{1}}{\frac{2}{n^2} - n}}{1+\frac{2}{n}} = -\frac{\pi}{2}$ $\boxed{1}$

d) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\overset{\boxed{1}}{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \overset{\boxed{1}}{<} 1$

Dle limitního podílového kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

e) – Zapište obecně, co je částečný součet s_n číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. $s_n = a_1 + \dots + a_n$ $\boxed{1}$

– Zapište obecně, jak se vypočítá součet s číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ $\boxed{1}$

– Zapište, co znamená, že číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ $\boxed{1}$

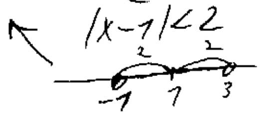
– Zapište, kdy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a nemá součet, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje $\boxed{1}$

– Zapište, kdy je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ geometrická. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je geometrická, když $\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\boxed{1}}{=} q \in R$, q - kvocient

– Zapište, kdy má geometrická řada součet a jak se vypočítá, tj. Pro $q \in \overset{\boxed{1}}{(-1;1)}$ $s = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 \overset{\boxed{1}}{\frac{1-q^n}{1-q}} = \frac{a_1}{1-q}$

f) Určete, zda je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$ geometrická, určete její interval konvergence a její součet.

$\forall n \in N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{(x-1)^n}{2^n}} = \frac{x-1}{2} \overset{\boxed{1}}{=} q \qquad I = (-1,3)$ $\boxed{1}$ $\qquad \frac{|x-1|}{2} < 1$ $\boxed{1}$ $\quad |x-1| < 2$



$s = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{\boxed{1}}{\frac{x-1}{2}} \cdot \frac{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^n}{1-\frac{x-1}{2}} = \frac{\frac{x-1}{2}}{\frac{2-x+1}{2}} = \frac{x-1}{3-x}$ $\boxed{1}$

(10) 2.1 a) Zapište, co je divergence a z jaké funkce ji lze počítat, co je výsledkem ? *Odpověď (doplňte) :*
Divergence je operátor *který(á) působí na funkci* vektorovou *výsledkem je funkce* skalární $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) Je dána vektorová funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = (2.x + y; y^2 + 3.z^2; x^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{3}{2}})$ a bod $A = [0;1;4]$,

Zapište obecně, co je $\operatorname{div}\vec{F}$ a určete $\operatorname{div}\vec{F}(A)$. *Řešení:* $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial f_1}{\partial x} \overset{\boxed{1}}{=} 2$ $\quad \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x}(A) \overset{\boxed{1}}{=} 2}$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial y} \overset{\boxed{1}}{=} 2y$ $\quad \boxed{\frac{\partial f_2}{\partial y}(A) \overset{\boxed{1}}{=} 2}$ $\quad \frac{\partial f_3}{\partial z} \overset{\boxed{1}}{=} -\frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{\frac{\partial f_3}{\partial z}(A) \overset{\boxed{1}}{=} -\frac{3}{2}\sqrt{4} = -3}$

$\operatorname{div}\vec{F}(A) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(A) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(A) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(A) = 2 + 2 - 3 = 1$ $\boxed{1}$

3.1. – Co vznikne z funkce n proměnných $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$, jestliže dojde k jejímu zúžení o proměnnou x_i? Vznikne funkce o n-1 proměnných, tj. funkce proměnných $x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n$ 1

– O které proměnné je nutno zúžit funkci $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$, aby z ní vznikla funkce jedné proměnné $g(x_k)=f(c_1,\dots,c_{k-1},x_k,c_{k+1},\dots,c_n)$? Funkci $f(x_1,\dots,x_n)$ je nutno zúžit o proměnné $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ 1

– Jak je definována parciální derivace funkce $f(x_1,\dots,x_n)$ podle proměnné x_k v bodě $C=(c_1,\cdots,c_n)\in Df$. *Tj.* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_1,\dots,c_n)=\frac{dg(x_k)}{dx_k}$ 1, kde $g(x_k)=f(c_1,\dots,c_{k-1},x_k,c_{k+1},\dots,c_n)$, je to číslo, které je rovno derivaci funkce $g(x_k)$ v bodě $c_k\in R$, $g(x_k)$ je zúžením funkce $f(x_1,\dots,x_n)$ o proměnné $x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n$

– Pro funkci $f(x;y)$ v bodě $A=[x_0;y_0]$ napište obecně Taylorův polynom.

$$T_2(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot(y-y_0)+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y-y_0)^2}{2!}$$ 1 1

3.2. Pro $f(x;y)=x.e^{y-1}+y.\sin(x-3)$ a bod $A=[3;1]$ najděte Taylorův polynom $T_2(x,y)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{y-1}+y\cdot\cos(x-3)$ 1 1; $\frac{\partial f}{\partial x}(A)=2$ | $\frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot e^{y-1}+\sin(x-3)$ 1; $\frac{\partial f}{\partial y}(A)=3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-y\sin(x-3)$ 1; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=0$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x\cdot e^{y-1}$ 1; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=e^{y-1}+\cos(x-3)$ 1 $\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}(A)=2$ $f(A)=3\cdot e^0+1\cdot\sin 0=3$ 1

$$df_A(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(A)(y-y_0)=2\cdot(x-3)+3(y-1)$$

$$d^2f_A(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x-x_0)^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\cdot(y-y_0)^2=$$
$$=0\cdot(x-3)^2+2\cdot2\cdot(x-3)(y-1)+3\cdot(y-1)^2=4\cdot(x-3)\cdot(y-1)+3\cdot(y-1)^2$$ 1 1

$$T_2(x,y)=f(A)+df_A(x-x_0,y-y_0)+\frac{d^2f_A(x-x_0,y-y_0)}{2!}=3+\underbrace{2\cdot(x-3)+3(y-1)}_{1}+2\cdot(x-3)(y-1)+\frac{3}{2}(y-1)^2$$ 1

(12) 4. a) Ověřte, že rovnicí $4.y+\ln y-(x-1)^2=0$ a bodem $A=[3;1]$ je určena implicitně funkce $f:y=y(x)$ taková, že $y(3)=1$. $F(x,y)=4y+\ln y-(x-1)^2$

$F(3,1)=4\cdot1+\ln1-(3-1)^2=0$ 1 splněno
$\frac{\partial F}{\partial y}=4+\frac{1}{y}$; $\frac{\partial F}{\partial y}(A)=4+\frac{1}{1}=5\neq0$ 1 splněno
$\Rightarrow$ Rovnicí $4y+\ln y-(x-1)^2=0$ a bodem $A=[3,1]$ je určena 1 implicitní funkce $y=y(x)$, kde $y(3)=1$

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(3)$.

$4y+\ln y-(x-1)^2=0 \;/\frac{d()}{dx}$

$4y'+\frac{1}{y}y'-2(x-1)=0$ 1 $\Rightarrow y'=\frac{2(x-1)}{4+\frac{1}{y}}$ 1; $y'(3)=\frac{2(3-1)}{4+\frac{1}{1}}=\frac{4}{5}$ 1

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(3)$.

$4y'+\frac{y'}{y}-2(x-1)=0 \;/\frac{d()}{dx}$ $\rightarrow 4y''+\frac{y''}{y}-\frac{(y')^2}{y^2}-2=0\Rightarrow y''=\frac{\frac{(y')^2}{y^2}+2}{4+\frac{1}{y}}$ 1

$4y''+\frac{y''y-y'\cdot y'}{y^2}-2=0$ 1

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c=3$ pro implicitní funkci $y=y(x)$.

$y''(3)=\frac{\frac{(4/5)^2}{1^2}+2}{4+\frac{1}{1}}=\frac{\frac{16}{25}+2}{5}=\frac{\frac{66}{25}}{5}=\frac{66}{125}$ 1

$$T_2(x)=y(3)+y'(3)(x-3)+\frac{y''(3)\cdot(x-3)^2}{2}=1+\frac{4}{5}(x-3)+\frac{33}{125}(x-3)^2$$ 1 1 1

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060703-4-(3)

5	6	7	8		Σ 5-8

…………… …………… …………… ……………………… ………………………………

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5.1. a) Zapište obecně obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu. $\boxed{1}$ $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, x - proměnná, $y = y(x)$, $y', \dots, y^{(n)}$ derivace

b) Co musí být nutně obsaženo v zápise obyč. diferenciální rovnice n-tého řádu ? $\boxed{1}$ Dif. rovnice n-tého řádu musí obsahovat $y^{(n)}$ tj. musí obsahovat n-tou derivaci neznámé funkce

c) Co je řešením obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu ? $\boxed{1}$ Řešením je neznámá funkce $y = y(x)$

5.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice 3. řádu,

$y''' = 2.x^{-3} + \cos x$;

$$y'' = \int (2x^{-3} + \cos x)\,dx = -x^{-2} + \sin x + C_1,\ C_1 \in R \quad \boxed{1}\ \boxed{1}$$

$$y' = \int (-x^{-2} + \sin x + C_1)\,dx = \boxed{1}\, x^{-1} - \boxed{1} \cos x + \boxed{1}\, C_1 x + C_2,\ C_2 \in R$$

$$y = \int \left(\frac{1}{x} - \cos x + C_1 x + C_2\right) dx = \boxed{1} \ln|x| - \boxed{1} \sin x + \boxed{1} \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3,\ C_3 \in R$$

5.3. Je dána diferenciální rovnice $(2.x + y) + (3.y^2 + x).y' = 0$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(2x+y)}{\partial y} - \frac{\partial(3y^2+x)}{\partial x} = \boxed{1}\ 1 - \boxed{1}\ 1 = 0$$

a) Ověřte, že je daná dif. rov. exaktní. $\Rightarrow$ Dif. rovnice je exaktní $\boxed{1}$

b) Vyřešte danou dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y \ \boxed{1} \Rightarrow U = \int (2x + y)\,dx = x^2 \ \boxed{1} + x \cdot y + \varphi(y) \ \boxed{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'_y(y) \stackrel{!}{=} \boxed{1}\ 3y^2 + x \Rightarrow \varphi'_y(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \int 3y^2\,dy = y^3 \ \boxed{1}$$

$U(x,y) = x^2 + x \cdot y + y^3$ $\boxed{1}$; Řešením je implicitní funkce $y = y(x)$ daná rovnicí $x^2 + x \cdot y + y^3 = C$ $\boxed{1}$, $C \in R$

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' + y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

Char. rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ $\boxed{1}$ $\quad y_h = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\lambda_{1,2} = \pm i$ $\boxed{1}$

6. b) Metodou variace konstant nebo pomocí speciálního tvaru pravé strany najděte obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice : $y'' + y = \sin x$.

Variace konstant : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ $\boxed{1}$; $C_1 = C_1(x)$; $C_2 = C_2(x)$

$y' = C_1' \cos x - C_1 \sin x + C_2' \sin x + C_2 \cdot \cos x$ $\boxed{1}$

$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$ $\boxed{1}$

$C_1'(-\sin x) + C_2' \cdot \cos x = \sin x$ $\boxed{1}$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \boxed{1} = 1 ; \quad D_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} \boxed{1} = -\sin^2 x$$

$$C_1' = \frac{D_{C_1'}}{W} = -\sin^2 x \ \boxed{1} ; \quad C_1 = \int -\sin^2 x\,dx \ \boxed{1} = \int \left(\frac{1}{2}\cos(2x) \ \boxed{1} - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} \ \boxed{1} - \frac{1}{2} x \ \boxed{1} + K_1,\ K_1 \in R$$

$$D_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sin x \end{vmatrix} \boxed{1} = \sin x \cos x ; \quad C_2 = \int \sin x \cos x\,dx \ \boxed{1} =$$

$$= \int \frac{1}{2} \sin 2x \ \boxed{1}\ dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \ \boxed{1} + K_2,\ K_2 \in R ; \quad y = \left(\frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{2} x + K_1\right) \cos x \ \boxed{1} + \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + K_2\right) \sin x \ \boxed{1}$$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060703-4-(3)

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

……………	……………	……………	……………………………	……………………………………
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

5.1. a) Zapište obecně obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu. ______________________

b) Co musí být nutně obsaženo v zápise obyč. diferenciální rovnice n-tého řádu ? ______________________

c) Co je řešením obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu ? ______________________

5.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice 3. řádu : $y''' = 2.x^{-3} + \cos x$;

$y' =$

$y'' =$

$y =$

5.3. Je dána diferenciální rovnice ______________________

$(2.x + y) + (3.y^2 + x).y' = 0$.

a) Ověřte, že je daná dif. rov. exaktní.

b) Vyřešte danou dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení. ______________________

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' - y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

Char. rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ $\boxed{1}$ $\quad y_h = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\lambda^2 = 1$

$\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\boxed{1}$

6. b) Metodou variace konstant najděte obecné řešení diferenciální rovnice : $y'' - y = \sin x$.

Variace konstant : $y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x}$ $\boxed{1}$; $C_1 = C_1(x)$; $C_2 = C_2(x)$

$y' = C_1' \cdot e^{x} + C_1 \cdot e^{x} + C_2' e^{-x} - C_2 \cdot e^{-x}$ $\boxed{1}$

$C_1' e^{x} + C_2' \cdot e^{-x} = 0$ $\boxed{1}$

$\underline{C_1' e^{x} - C_2' e^{-x} = \sin x}$ $\boxed{1}$

$W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$; $D_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \sin x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x} \sin x$ $\boxed{1}$; $C_1' = \frac{D_{C_1'}}{W} = \frac{-e^{-x} \sin x}{-2} = \frac{\sin x}{2 \cdot e^{x}}$ $\boxed{1}$

$D_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & \sin x \end{vmatrix} = e^{x} \cdot \sin x$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$; $C_2' = \frac{D_{C_2'}}{W} = \frac{e^{x} \cdot \sin x}{-2}$ $\boxed{1}$; $C_1 = \int \frac{\sin x}{2 \cdot e^{x}} dx + k_1$, $k_1 \in R$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$; $C_2 = \int -\frac{1}{2} e^{x} \cdot \sin x + k_2$, $k_2 \in R$ $\boxed{1}$

obecné řešení $y = \left(\int \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{e^{x}} dx + k_1 \right) e^{x} + \left(\int -\frac{1}{2} e^{x} \cdot \sin x \, dx + k_2 \right) e^{-x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060703-4-(4)

7.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a;b \rangle\}$.

Podle příslušné definice objasněte, kdy prostorová křivka vyjádřená parametricky je :

a) hladká ; jestliže $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ mají spojité první derivace $\boxed{1}$

b) jednoduchá, jestliže žádnými dvěma různými parametry není určen stejný bod křivky $\boxed{1}$

c) regulární, jestliže $\forall t \in \langle a,b \rangle \left[\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right] \neq [0,0,0]$ $\boxed{1}$

d) uzavřená, jestliže počáteční a koncový parametr určují týž bod, tj. $x(a) = x(b), y(a) = y(b)$ a $z(a) = z(b)$ $\boxed{1}$

Čím je určena orientace prostorové křivky ? Křivka při dané parametrizaci je orientována ve smyslu rostoucího parametru $\boxed{1}$

7.2. Parametrizujte úsečku AB, kde $A = [-1;3]$ a $B = [3;-2]$, tak, aby bod A byl počátečním bodem a B koncovým bodem.

$\vec{s} = \vec{AB} = B - A = (4;-5)$ $\boxed{1}$

$AB = \{(x,y) \in R^2; x = -1 + 4t \wedge y = 3 - 5t \wedge t \in \langle 0,1 \rangle\}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

7.3. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu z vektorové funkce $\vec{F} = (f_1;f_2) = (\sqrt{x+1};\sqrt{x+1})$ $\boxed{1}$ po orientované křivce $\kappa = \{(x,y) \in R^2; x = 3 - 4.t \wedge y = -2 + 5.t \wedge t \in \langle 0;1 \rangle\}$. $x = 3 - 4t;\ dx = -4dt$ $\boxed{1}$

$y = -2 + 5t;\ dy = 5dt$ $\boxed{1}$

$\int_\kappa \vec{F}.d\vec{s} = \int_\kappa \sqrt{x+1}\,dx + \sqrt{x+1}\,dy = \int_0^1 \sqrt{3-4t+1}\cdot(-4)dt + \sqrt{3-4t+1}\cdot 5dt =$

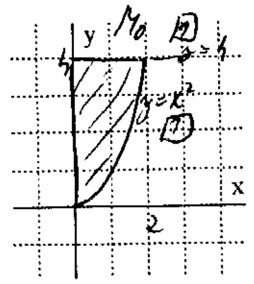
$= \int_0^1 \sqrt{4-4t}\,dt = \left| \begin{matrix} u = 4 - 4t \\ du = -4dt \Rightarrow dt = \frac{du}{-4} \end{matrix} \right| = \int_4^0 \sqrt{u}\,\frac{du}{-4} = \frac{1}{4}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{4}\left[u\cdot\sqrt{u}\right]_0^4 = \frac{1}{4}4\cdot\sqrt{4} = 2$

8.1. Zapište (obecně podle definice) množinu $A \subset R^2$, jež je normální vzhledem k druhé souřadné ose.

$A: a \le x \le b$ $\boxed{1}$

$y_1(x) \le y \le y_2(x)$ $\boxed{1}$, kde $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou spojité funkce na $\langle a, b \rangle$.

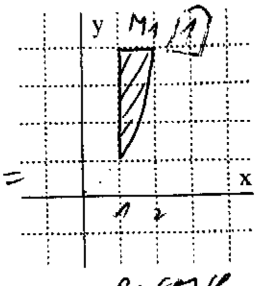
8.2. Znázorněte množinu $M_0 = \{(x,y) \subset R^2; 0 \le x \le 2 \wedge x^2 \le y \le 4\}$ a vypočítejte obsah tohoto obrazce tvořeného body množiny M_0. $\boxed{1}$



$\mu(M_0) = \iint_{M_0} 1\cdot dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 dy = \int_0^2 [y]_{x^2}^4 dx = \int_0^2 (4 - x^2)dx =$

$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24-8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}\,(m^2)$

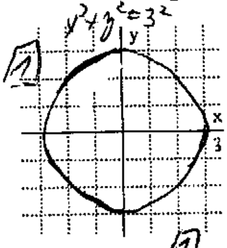
8.3 Znázorněte množinu $M_1 = \{(x,y) \subset R^2; 1 \le x \le 2 \wedge x^2 \le y \le 4\}$ a vypočítejte $\iint_{M_1} \frac{1}{x}.dx.dy = \int_1^2 dx \int_{x^2}^4 \frac{1}{x}\,dy = \int_1^2 dx \left[\frac{y}{x}\right]_{y=x^2}^{y=4} = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{x}\right)dx =$



$= \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx = \left[4\ln|x| - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{2^2}{2} - 4\underbrace{\ln 1}_{=0} + \frac{1}{2} =$

$= 4\ln 2 - 1{,}5 = \ln 16 - 1\frac{1}{2}$

8.4 Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \{(x;y) \in R^2; x^2 + y^2 \le 9\}$, množinu A načrtněte.



$x = \rho\cdot\cos\varphi$ $\boxed{1}$

$y = \rho\cdot\sin\varphi$ $\boxed{1}$

$|J| = \rho$ $\boxed{1}$

$x^2 + y^2 = \rho^2$

$A_{\varphi,\rho}: 0 \le \rho \le 3$ $\boxed{1}$

$0 \le \varphi \le 2\pi$ $\boxed{1}$

$\iint_A \ln(1 + x^2 + y^2)dx.dy = \iint_{A_{\varphi\rho}} \ln(1+\rho^2)\,\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi =$

$= \int_0^3 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} 1\cdot d\varphi = \left| \begin{matrix} t = 1+\rho^2 \\ dt = 2\rho\,d\rho,\ \rho\,d\rho = \frac{dt}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \rho = 3 \Rightarrow t = 10 \\ \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right|$

$= \int_1^{10} \ln t\,\frac{dt}{2}\cdot[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2}\int_1^{10} \ln t\,dt = \left| \begin{matrix} u' = 1 & v = \ln t \\ u = t & v' = \frac{1}{t} \end{matrix} \right| = \pi\left\{[t\cdot\ln t]_1^{10} - \int_1^{10}\frac{t}{t}\,dt\right\}$

$= \pi\{10\cdot\ln 10 - 1\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0} - [t]_1^{10}\} = \pi\{10\ln 10 - [10-1]\} = \pi\cdot\{10\ln 10 - 9\} = 10\cdot\ln 10 - 9\pi$