

1	2	3	4
---	---	---	---

Σ 1-4	Σ 5-8
-------	-------

Σ 1-8

-
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno
1. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow$
- b) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{2n+1} =$
- c) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(3^{n+2} - 2^n) - \ln 3^n] =$
- d) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n-9}$$

- e) Zapište limitní odmocninové kritérium pro konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Předpoklady :

Tvrzení (dvě) :

- f) Najděte střed, poloměr a obor konvergence mocninné řady. Určete též, zda řada konverguje pro $x_1 = -6$ a pro $x_2 = 10$. (Vše odůvodněte !)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 8^n}$$

2. a) Zapište obecně Laplaceův operátor. Tj. $\Delta =$
- b) Laplaceův operátor lze uplatnit na funkci, výsledkem je funkce. (doplňte)
- c) Určete první a stejnojmenné druhé partiální derivace funkce $f(x; y; z) = (x+z) \cdot \ln(y+z)$

v bodě $C = [5; 2; -1]$. Tj. $\frac{\partial f}{\partial x} =$ $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \right.$ $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) = \right.$

$\frac{\partial f}{\partial y} =$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$ $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) = \right.$

$\left| \frac{\partial f}{\partial z} = \right.$ $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \right.$ $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(C) = \right.$

- d) Zapište Δf obecně a $\Delta f(C)$ konkrétně, tj. pro funkci $f(x; y; z) = (x+z) \cdot \ln(y+z)$ a bod $C = [5; 2; -1]$.
- Tedy $\Delta f =$ $|\Delta f(C) =$

3. a) Předpokládáme, že bod $A \in Df$ je stacionárním bodem funkce $f(x, y) \in C^2$

- Uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního minima v bodě A, tj.

- Uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního maxima v bodě A, tj.

- Uveďte podmínku, která postačuje k tomu, aby funkce $f(x, y)$ neměla v bodě A lokální extrém, tj.

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x; y) = x^4 - 4.x.y + 2.y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

c) Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x; y) = -2.x - y + 1$ vázané na množinu $x^2 - y = 0$.

4. a) Ověřte, že rovnicí $e^{y-2} + y - x = 0$ a bodem $A = [3; 2]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(3) = 2$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(3)$.

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(3)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 3$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.
 $T_2(x) =$

5	6	7	8
---	---	---	---

Σ 5-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5.1. a) Jaký tvar má obecně

exaktní diferenciální rovnice ? _____

b) Co platí obecně pro funkci $V(x; y)$,

která je potenciálem diferenciální rovnice ? _____

c) Co je obecným řešením exaktní

diferenciální rovnice ? _____

5.2. Je dána diferenciální rovnice

$$3.x^2 + \left(2.y + \frac{1}{y}\right).y' = 0.$$

a) Ověřte, že je dif. rov. exaktní.

b) Vyřešte dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení. _____

c) Určete partikulární řešení dif. rovnice,

které splňuje podmínku $y(1) = 2$.

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' - 2.y' + y = 0$ pro neznámou $y = y(x)$.

6. b) Metodou variace konstant najděte obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice

$$y'' - 2.y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

7.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a; b \rangle \}$.

a) Zapište křivkovým integrálem, jak se vypočítá délka křivky κ zapište jej pomocí jednoduchého integrálu s proměnnou t .

b) Zapište křivkovým integrálem, jak se vypočítá práce v silovém poli $\vec{F}(x; y; z) = (f_1; f_2; f_3)$ podél křivky κ a zapište jej pomocí jednoduchého integrálu s proměnnou t .

7.2. Vypočítejte délku křivky $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = t \wedge y = 2 \cdot t \wedge z = t^{\frac{3}{2}} \wedge t \in \langle 1; 4 \rangle \right\}$.

7.3. Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu v prostoru z funkce $\vec{F} = \left(x; \frac{y}{x}; \frac{z}{x} \right)$ po orientované křivce $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = t \wedge y = 2 \cdot t \wedge z = t^{\frac{3}{2}} \wedge t \in \langle 1; 4 \rangle \right\}$.

$$\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

8.1. a) Zapište dvojným integrálem, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny M .

8.2. b) Zapište pomocí dvojnásobného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M = \{ (x, y); a \leq x \leq b \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$

8.3 Množina $I = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, vypočítejte $\iint_I (\sin y + \cos(x + y)) dx dy =$

8.4 Množina $M \in \mathbb{R}^2$ je ohraničena přímkami $x = 0 \wedge y = 0 \wedge 4x + 3y = 12$. Znázorněte množinu M do obrázku, zapište ji jako množinu normální vůči jedné z os a vypočítejte

