UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060628-3-(1)

1	2	3	4

∑ 1-4	∑ 5-8

∑ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

(20) 1. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall k \in R)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(a_n < k)$ $\boxed{1}$

b) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2.n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 \cdot \dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{e^{-1}}{e}\right)^2 \cdot 1 = e^{-4} = \dfrac{1}{e^4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

c) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln\left(3^{n+2}-2^n\right)-\ln 3^n\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{3^{n+2}-2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left[3^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \ln 9$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

d) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{10.n-9}$; $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{10x-9}\,dx = \left| \begin{matrix} t = 10x-9 & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ dt = 10\cdot dx;\ dx = \frac{dt}{10} & x=1 \Rightarrow t=1 \end{matrix} \right| = \int_1^{\infty} \frac{1}{t}\frac{dt}{10} = \left[\frac{\ln|t|}{10}\right]_1^{\infty} = +\infty$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Dle integrálního kritéria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\boxed{1}$

e) Zapište limitní odmocninové kritérium pro konvergenci číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\boxed{1}$

Předpoklady : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy; existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = A \in R \cup \{+\infty\}$

Tvrzení (dvě): a) Jestliže $A<1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

b) Jestliže $A>1$, potom $\sum a_n$ diverguje $(k+\infty)$ $\boxed{1}$

(9) f) Najděte střed, poloměr a obor konvergence mocninné řady. Určete též, zda řada konverguje pro $x_1 = -6$ a pro $x_2 = 10$. (Vše odůvodněte !)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n.8^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(x-2)^{n+1}\cdot n\cdot 8^n}{(x-2)^n\cdot n+1\cdot 8^{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x-2|}{8}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{|x-2|}{8}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\dfrac{|x-2|}{8} < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 8 \Leftrightarrow x \in (-6;10)$. Dle podílového kritéria řada konverguje absolutně v $(-6;10)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$x_1 = -6$; $\sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ – řada konverguje dle Leibnitzova krit. $\boxed{1}$ | Střed k. $a = 2$ } $\boxed{1}$

$x_2 = 10$; $\sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – řada diverguje dle integrálního krit. $\boxed{1}$ | Poloměr k. $R = 8$

| Obor k. $M = \langle -6;10)$ $\boxed{1}$

(14) 2. a) Zapište obecně Laplaceův operátor. Tj. $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\boxed{1}$

b) Laplaceův operátor lze uplatnit na ..skalární.. funkci, výsledkem je ..skalární.. funkce. (doplňte) $\boxed{1}$

c) Určete první a stejnojmenné druhé parciální derivace funkce $f(x;y;z) = (x+z).\ln(y+z)$

v bodě $C = [5;2;-1]$. Tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln(y+z)$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(C) = 0$ | $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) = 0$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x+z}{y+z}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(C) = 4$ | $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \ln(y+z) + \dfrac{x+z}{y+z}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(C) = 4$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-(x+z)}{(y+z)^2}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) = -4$ $\boxed{1}$ | $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{y+z-(x+z)}{(y+z)^2} = \dfrac{-x+2y+z}{(y+z)^2}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(C) = -2$ $\boxed{1}$

d) Určete obecně a pro uvedenou funkci $f(x;y;z) = (x+z).\ln(y+z)$ Δf a $\Delta f(C)$. $\boxed{1}$

Tedy $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$ $\boxed{1}$ | $\Delta f(C) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(C) =$

$= 0 - \dfrac{x+z}{(y+z)^2} + \dfrac{-x+2y+z}{(y+z)^2} = \dfrac{-2x+2y}{(y+z)^2}$ $\boxed{1}$ | $= 0 - 4 - 2 = -6$ $\boxed{1}$

(5) 3. a) Předpokládáme, že bod $A \in Df$ je stacionárním bodem funkce $f(x,y) \in C^2$ /2

- Uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního minima v bodě A, tj. $D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0 \wedge f''_{xx}(A) > 0$
- Uveďte postačující podmínku (podmínky) pro existenci ostrého lokálního maxima v bodě A, tj. $D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0 \wedge f''_{xx}(A) < 0$
- Uveďte podmínku, která postačuje k tomu, aby funkce $f(x,y)$ neměla v bodě A lokální extrém, tj. $D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} < 0$

(13) b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y) = x^4 - 4.x.y + 2.y^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot x \cdot (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1$

$y_1 = 0 \quad y_2 = -1 \quad y_3 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow y = x$ Stacionární body $A_1 = [0,0], A_2 = [-1,-1], A_3 = [1,1]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1) = 0; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_2) = 12; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_3) = 12; D(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0 \Rightarrow$ v A_1 lok. ext. nex.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} = -4; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_3) = -4; D(A_2) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 16 = 32 > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_2) = 12 > 0$

v A_2 je lok. min. $f(A_2) = -1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_3) = 4, D(A_3) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 32 > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_3) = 12 > 0$

v A_3 je lok. min. $f(A_3) = -1$

c) Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x;y) = -2.x - y + 1$ vázané na množinu $x^2 - y = 0$. $\Rightarrow y = x^2$

$F(x) = f(x, x^2) = -2x - x^2 + 1$

$F'(x) = -2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ stac. bod $x_s = -1$

$F''(x) = -2; F''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow v\ x_s = -1$ má $F(x)$ lok. max $F(-1) = 2$

→ V bodě $S = [-1; 1]$ má funkce $f(x,y)$ lokální vázané maximum $f(S) = 2$

(12) 4. a) Ověřte, že rovnicí $e^{y-2} + y - x = 0$ a bodem $A = [3;2]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(3) = 2$. $F(x,y) = e^{y-2} + y - x$

$F(3,2) = e^{3-2} + 2 - 3 = 0$ – splněno

$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{y-2} + 1; \frac{\partial F}{\partial y}(A) = e^0 + 1 = 2 \neq 0$ – splněno

} Rovnicí a bodem A je určena implicitní funkce

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(3)$.

$e^{y-2} + y - x = 0 \,/\, \frac{\partial}{\partial x}$

$e^{y-2} y' + y' - 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{e^{y-2} + 1}; \quad y'(3) = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$

$(e^{y-2} + 1) y' = 1$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(3)$.

$e^{y-2} \cdot y' + y' - 1 = 0 \,/\, \frac{\partial}{\partial x}$

$e^{y-2} \cdot y' \cdot y' + e^{y-2} y'' + y'' = 0 \quad y'' = \frac{-e^{y-2}(y')^2}{e^{y-2} + 1}; \quad y''(3) = \frac{-e^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{e^0 + 1} = -\frac{1}{8}$

$(e^{y-2} + 1) y'' = -e^{y-2}(y')^2$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 3$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(3) + y'(3) \cdot (x-3) + \frac{y''(3)}{2!}(x-3)^2 = 2 + \frac{1}{2}(x-3) - \frac{1}{16}(x-3)^2$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060628-3-(3)

5	6	7	8

$\sum$ 5-8

datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

$\boxed{1}$ $(C^2$

5.1. a) Jaký tvar má obecně exaktní diferenciální rovnice ? $P(x,y) + Q(x,y)\cdot y' = 0$, kde $P(x,y), Q(x,y)$ jsou funkce třídy

b) Co platí obecně pro funkci $V(x;y)$, která je potenciálem diferenciální rovnice ? $\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ a $\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ $\boxed{1}$

c) Co je obecným řešením exaktní diferenciální rovnice ? Obecným řešením je (implicitní) funkce daná rovnicí $V(x,y) = C$, $C \in R$ $\boxed{1}$

5.2. Je dána diferenciální rovnice

$$3.x^2 + \left(2.y + \frac{1}{y}\right).y' = 0.$$

$P(x,y) = 3x^2$; $Q(x,y) = 2y + \frac{1}{y}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ $\boxed{1}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ $\boxed{1}$, tedy $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$

a) Ověřte, že je dif. rov. exaktní. $\Rightarrow$ Diferenciální rovnice je exaktní $\boxed{1}$

b) Vyřešte dif. rovnici, tj. určete její obecné řešení.

$P(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow V = \int 3x^2 dx = x^3 + \varphi(y)$ $\boxed{1}$

$\frac{\partial V}{\partial y} = \varphi'(y) = 2y + \frac{1}{y}$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow \varphi(y) = \int (2y + \frac{1}{y}) dy = y^2 + \ln y + C$, $C \in R$

$V(x,y) = x^3 + y^2 + \ln y + C$ $\boxed{1}$

Obecné řešení $y = y(x)$; $x^3 + y^2 + \ln y = C$ $\boxed{1}$

$y(1) = 2 \Rightarrow 1^3 + 2^2 + \ln 2 = C$, tj $C = 5 + \ln 2$ $\boxed{1}$

c) Určete partikulární řešení dif. rovnice, které splňuje podmínku $y(1) = 2$. Partikulární řešení je $y = y(x)$: $x^3 + y^2 + \ln y = 5 + \ln 2$ $\boxed{1}$

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' - 2.y' + y = 0$ pro neznámou funkci $y = y(x)$.

Char. rovnice

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ $\boxed{1}$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1$ $\boxed{1}$

Obecné řešení $y_h = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$; $C_1 \in R \wedge C_2 \in R$ $\boxed{1}$

6. b) Metodou variace konstant vyřešte nehomogenní diferenc. rovnici $y'' - 2.y' + y = \frac{e^x}{x}$.

$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$; $C_1 = C_1(x)$; $C_2 = C_2(x)$ $\boxed{1}$

Variace konstant

$y' = C_1' e^x + C_1 e^x + C_2' x \cdot e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x$

$C_1' e^x + C_2' x \cdot e^x = 0$ $\boxed{1}$

$C_1' \cdot e^x + C_2' e^x + C_2' x \cdot e^x = \frac{e^{2x}}{x}$ $\boxed{1}$

$W = \begin{vmatrix} e^x ; & x \cdot e^x \\ e^x ; & (1+x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} + x e^{2x} - x \cdot e^{2x} = e^{2x}$ $\boxed{1}$

$D_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & ; x \cdot e^x \\ \frac{e^x}{x} & ; (1+x)e^x \end{vmatrix} = -e^{2x}$ $\boxed{1}$; $C_1' = \frac{D_{C_1'}}{W} = \frac{-e^{2x}}{e^{2x}} = -1$ $\boxed{1}$

$C_1 = \int -1\, dx = -x + K_1$, $K_1 \in R$ $\boxed{1}$

$D_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^x ; & 0 \\ e^x ; & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$ $\boxed{1}$

$C_2' = \frac{D_{C_2'}}{W} = \frac{e^{2x}}{x \cdot e^{2x}} = \frac{1}{x}$ $\boxed{1}$

$C_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + K_2$, $K_2 \in R$ $\boxed{1}$

Obecné řešení dif. rov. $\boxed{1}$

$y = (-x + K_1)e^x + (\ln|x| + K_2) \cdot x \cdot e^x$

$= -x \cdot e^x + x \cdot \ln|x| \cdot e^x +$

$+ K_1 \cdot e^x + K_2 \cdot x \cdot e^x$

7.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a;b \rangle\}$.

a) Zapište křivkovým integrálem, jak se vypočítá délka křivky κ, zapište ~~ho~~ pomocí jednoduchého integrálu s proměnnou t.

$$l = \int_{\kappa} 1 \cdot ds = \int_a^b 1 \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt \quad \boxed{1} \ \boxed{1}$$

b) Zapište křivkovým integrálem, jak se vypočítá práce v silovém poli $\vec{F}(x;y;z) = (f_1; f_2 f_3)$ podél křivky κ, zapište (to také) pomocí jednoduchého integrálu s proměnnou t. $\boxed{1}$

$$W = \int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{s} \overset{\boxed{1}}{=} \int_{\kappa} f_1 dx + f_2 \cdot dy + f_3 dz = \int_a^b f_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t)\, dt + f_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{y}(t) dt + f_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt$$

7.2. Vypočítejte délku křivky $\kappa = \left\{(x,y,z) \in R^3; x = t \wedge y = 2.t \wedge z = t^{\frac{3}{2}} \wedge t \in \langle 0;4 \rangle\right\}$.

$$\dot{x} = 1 \ \boxed{1};\ \dot{y} = 2 \ \boxed{1};\ \dot{z} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \ \boxed{1};\ ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \sqrt{1^2 + 2^2 + \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{t}\right)^2}\, dt = \sqrt{5 + \tfrac{9}{4} t} \cdot dt \ \boxed{1}$$

$$s = \int_{\kappa} 1 \cdot ds = \int_0^4 \sqrt{5 + \tfrac{9}{4} t}\, dt \ \boxed{1} = \left| \begin{array}{l} u = 5 + \frac{9}{4} t \ \boxed{1};\ t = 4 \Rightarrow u = 14 \\ du = \frac{9}{4} dt;\ t = 0 \Rightarrow u = 5 \\ dt = \frac{4}{9} du \end{array} \right| = \int_5^{14} \sqrt{u}\, \frac{4}{9} du \ \boxed{1} = \left[\frac{4 \cdot 2 \cdot u \sqrt{u}}{9 \cdot 3}\right]_5^{14} \boxed{1} = \frac{8}{27}\left[14\sqrt{14} - 5 \cdot \sqrt{5}\right] \boxed{1}$$

7.3. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu v prostoru z funkce $\vec{F} = \left(x; \frac{y}{x}; \frac{z}{x}\right)$ po orientované křivce $\kappa = \left\{(x,y,z) \in R^3; x = t \wedge y = 2.t \wedge z = t^{\frac{3}{2}} \wedge t \in \langle 1;4 \rangle\right\}$ (jiná dolní mez pro t !).

$$\dot{x} = 1;\ \dot{y} = 2;\ \dot{z} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}};\ d\vec{s} = (dx; dy; dz) = \left(dt; 2dt; \frac{3\sqrt{t}}{2} dt\right) \boxed{1};\ \int_{\kappa} \vec{F} . d\vec{s} = \int_{\kappa} x\, dx + \frac{y}{x} dy + \frac{z}{x} dz = \boxed{1}$$

$$= \int_1^4 t\, dt + \frac{2t}{t} \cdot 2dt + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{t} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} dt \ \boxed{1} = \int_1^4 \left(t + 4 + \frac{3}{2} t\right) dt = \int_1^4 \left(4 + \frac{5}{2} t\right) dt \ \boxed{1} = \left[4t + \frac{5}{4} t^2\right]_1^4 \boxed{1} =$$

$$= 4 \cdot 4 + \frac{5}{4} \cdot 4^2 - 4 \cdot 1 - \frac{5}{4} 1^2 = 16 + 20 - 4 - \frac{5}{4} = 30\tfrac{3}{4} \ \boxed{1}$$

8.1. a) Zapište dvojným integrálem, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny M.

$$P = \iint_M 1 \cdot dx\, dy \quad \boxed{1}$$

8.2. b) Zapište pomocí dvojnásobného integrálu, jak se vypočítá obsah rovinného obrazce tvořeného body množiny $M = \{(x,y); a \le x \le b \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

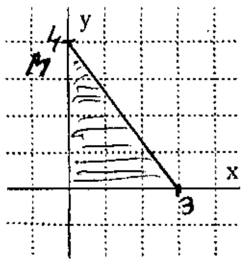
$$P = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} 1 \cdot dy \quad \boxed{1}$$

8.3 Množina $I = \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, vypočítejte $\iint_I (\sin y + \cos(x+y)) dx.dy =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y + \cos(x+y))\, dy \ \boxed{1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left[-\cos y + \sin(x+y)\right]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \boxed{1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\tfrac{\pi}{2} + \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) + \cos 0 \ (-\sin x)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(0 + \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) + 1 - \sin x\right) dx \ \boxed{1} = \left[-\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) + x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{1} = -\cos\pi + \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 0 - \cos 0 = 1 + \frac{\pi}{2} + 0 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} \ \boxed{1}$$

8.4 Množina $M \in R^2$ je ohraničena přímkami $x = 0 \wedge y = 0 \wedge 4.x + 3.y = 12$. Znázorněte množinu M do roviny x-y, zapište ji jako množinu normální vůči jedné z os a vypočítejte



$\boxed{1}$

$$\iint_M x.y.dx.dy = \int_0^3 dx \int_0^{4 - \frac{4}{3}x} x \cdot y\, dy \ \boxed{1} = \int_0^3 dx \left[\frac{x \cdot y^2}{2}\right]_0^{4 - \frac{4}{3}x} \boxed{1} = \int_0^3 \frac{x\left(4 - \frac{4}{3}x\right)^2}{2} dx \ \boxed{1} =$$

M: $\boxed{1}$ $0 \le x \le 3$

$\boxed{1}$ $0 \le y \le 4 - \frac{4}{3}x$

$$= \int_0^3 \frac{x\left(16 - \frac{32}{3}x + \frac{16}{9}x^2\right)}{2} dx = \int_0^3 \left(8x - \frac{16}{3}x^2 + \frac{8}{9}x^3\right) dx \ \boxed{1} =$$

$$= \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{16x^3}{3.3} + \frac{8}{9}\frac{x^4}{4}\right]_0^3 \boxed{1} = \left[4x^2 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^4\right]_0^3 =$$

$4x + 3y = 12 \ / : 12$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4 - \frac{4}{3}x$ $\boxed{1}$

$$= 4 \cdot 3^2 - \frac{16}{9} 3^3 + \frac{2}{9} 3^4 = 36 - 48 + 18 = 6 \ \boxed{1}$$