

1	2	3	4
---	---	---	---

Σ 1-4	Σ 5-8
-------	-------

Σ 1-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ def.

b) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n-2} \right)^{2n} =$

c) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n^2 - 1)^2}{(3n)^4} =$

d) Zapište Leibnitzovo kritérium pro konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

e) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje či diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

f) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. Je dána skalární funkce $f(x; y; z) = 2x + \frac{y^5 - z}{z}$ a bod $A = [3; 1; -1]$. a) Určete parciální

derivace funkce $f(x; y; z)$ v bodě A , tj. $\frac{\partial f}{\partial x} =$ $\frac{\partial f}{\partial x}(A) =$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(A) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(A) =$$

b) Určete $\overrightarrow{\text{grad}} f(A)$, tj. $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) =$

c) Určete derivaci funkce $f(x; y; z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s} = (1; 3; -1)$

$$f'_s(A) = \frac{df}{d\vec{s}}(A) =$$

3. a) Napište podle definice, co platí pro přírůstek z bodu C funkce $f(X)$ o n proměnných, když je funkce $f(X)$ v bodě C **diferencovatelná**? Vysvětlete význam jednotlivých symbolů.

Tj.: Funkce $f(X)$ je v bodě C **diferencovatelná**, když pro přírůstek funkce z bodu C platí :

$$f(C + H) - f(C) =$$

b) Využijte větu o koeficientech diferenciálu a запиšte diferenciál funkce $f(X)$ v bodě C pro přírůstek $H = (h_1; \dots; h_n)$. Tj. $df_C(H) =$

c) Využijte větu o koeficientech diferenciálu a запиšte obecně diferenciál funkce $f(X)$

v libovolném bodě X pro přírůstek $d\vec{x} = (dx_1; \dots; dx_n)$. Tj. $df =$

b) Je dána funkce $f(x; y; u) = \sqrt[3]{y} \cdot x^3 - \ln(2 \cdot u - 3)$ a bod $C = (x_c; y_c; u_c) = (3; 27; 2)$.

Zapište diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x}$ (tj. $df_C = ?$) a diferenciál funkce f v C pro přírůstek $d\vec{x} = (0,1; -0,1; 0,1)$, tj. $df_C(0,1; -0,1; 0,1) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \quad \frac{\partial f}{\partial x}(C) = \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} = \quad \frac{\partial f}{\partial y}(C) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \quad \frac{\partial f}{\partial u}(C) = \quad \left| df_C =$$

$$df_C(0,1; -0,1; 0,1) =$$

c) Veličina z je funkcí proměnných x, y, u, tj. $z = f(x; y; u) = \sqrt[3]{y} \cdot x^3 - \ln(2 \cdot u - 3)$. Měřením bylo zjištěno, že $x = (\bar{x} \pm \Delta x) = (3,00 \pm 0,01)$, $y = (27,0 \pm 0,1)$ a $u = (2,00 \pm 0,05)$. Určete střední hodnotu a absolutní chybu veličiny z. (Využijte předchozího diferenciálu!)

$$\text{Tedy } \bar{z} = \quad \left| \Delta z = \right. \\ z = (\quad \pm \quad)$$

4. a) Ověřte, že rovnicí $\cos y + y - \sin x - x - 1 = 0$ a bodem $A = [0; 0]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(0) = 0$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(0)$.

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(0)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 0$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$$T_2(x) =$$

5	6	7	8
---	---	---	---

Σ 5-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5.1. a) Zapište obecně nebo jako příklad nějakou
 nehomogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu. _____

b) Co musí nutně obsahovat ve svém
 zápise diferenciální rovnice druhého řádu. _____

c) Co je obsaženo v každém zápise funkce,
 která je obecným řešením diferenciální rovnice _____

5.2. a) Vyřešte dif. rovnici $u' \cdot x = u^{-2}$ pro nez- | b) Vyřešte dif. rovnici $-\frac{y}{x} + y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{-2}$

námou funkci $u = u(x)$.

(Volte substituci : $y = u \cdot x$) $y' =$

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' + y = 0$ pro neznámou funkci $y = y(x)$.

6. b) Metodou variace konstant vyřešte nehomogenní diferenciální rovnici $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

7.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a; b \rangle\}$.

a) Zapište podle definice křivkový integrál ze skalární funkce $f(x; y; z)$ podél křivky κ a jak se vypočítá.

b) Zapište podle definice křivkový integrál z vektorové funkce $\vec{F}(x; y; z)$ podél křivky κ a jak se vypočítá.

7.2. Parametrizujte úsečku AB, kde $A = [1; 1]$ a $B = [3; 3]$, a vypočtěte $\int_{AB} \frac{x^2}{y} ds$.

7.3. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu v rovině z funkce $\vec{F} = (x + y; x)$ po křivce κ , která je grafem kubické paraboly $y = x^3$ a která začíná v bodě $A = [0; 0]$ a končí v bodu $B = [2; 8]$. (Zapište parametricky křivku κ !)

$$\kappa = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = \quad \wedge y = \quad \wedge t \in \langle \quad; \quad \rangle\}; \quad dx = \quad; \quad dy = \quad; \quad d\vec{s} = \quad$$

$$\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

8. a) Co je a jak se vypočítá dolní integrální součet funkce f na dvojrozměrném intervalu J při dělení D .

$$Tj. \quad s(f, D) =$$

b) Množina M je určena nerovnostmi a hraničními křivkami, tj. $M: 0 \leq x \leq 1, y = \sqrt{x}, y = x^2$.

Množinu M načrtněte a zapište pomocí nerovnic a vypočtěte integrál $\iint_M (x^2 + y) dx \cdot dy =$

c) Je dána množina $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$ Množinu A načrtněte a substitucí do polárních souřadnic vypočtěte integrál $\iint_A e^{x^2+y^2} \cdot dx \cdot dy$