UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060613-2-(1)

1	2	3	4		∑ 1-4	∑ 5-8		∑ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

(11) 1. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall K \in R)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(a_n > K)$ 1

b) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2.n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\right)^n\right]^2$ 1 $= \left(\frac{e}{e^{-2}}\right)^2 = (e^3)^2 = e^6$ 1

c) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2.n^2-1)^2}{(3.n)^4} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^4-4n^2+1}{81n^4}$ 1 $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{81} = \frac{4}{81}$ 1

d) Zapište Leibnitzovo kritérium pro konvergenci číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Předpoklady: 1) $\sum a_n$ je řada s alternujícími členy, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n|a_n|$ (nebo $=\sum(-1)^{n+1}|a_n|$)

2) $\forall n \in N: |a_n| \geq |a_{n+1}| > 0$ 1 Tvrzení: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. 1

3) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$

e) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje či diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{1}{\sqrt{n}}$ 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s alternujícími členy 1

2) $\forall n \in N \quad |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = |a_{n+1}| > 0$ 1

3) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ 1

$\Rightarrow$ Dle Leibnitzova kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje 2

f) Rozhodněte, zda níže uvedená řada konverguje nebo diverguje. (Uveďte použité kritérium.)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 1 $= \int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{\infty}$ 1 $= \left[2\sqrt{x}\right]_1^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} 2\sqrt{x} - 2\cdot\sqrt{1} = \infty - 2 = +\infty$, 1 tj. integrál diverguje

Dle integrálního kritéria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ 2

(8) 2. Je dána skalární funkce $f(x;y;z) = 2.x + \frac{y^5 - z}{z}$ a bod $A = [3;1;-1]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ 1 $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5y^4}{z}$ 1 $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -5$ 1

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{(-1)z - (y^5 - z)\cdot 1}{z^2} = \frac{-z - y^5 + z}{z^2} = -\frac{y^5}{z^2}$ 1 $\quad \frac{\partial f}{\partial z}(A) = -1$

b) Určete $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)$, tj. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A) = (2; -5; -1)$ 1

c) Určete derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s} = (1;3;-1)$

$f'_{\vec{s}}(A) = \frac{df}{d\vec{s}}(A) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)\cdot\frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \frac{(2;-5;-1)\cdot(1,3,-1)}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{2-15+1}{\sqrt{11}} = -\frac{12}{\sqrt{11}} = -\frac{12}{11}\sqrt{11}$

1 1 1

3. a) Napište podle definice, co platí pro přírůstek z bodu C funkce $f(X)$ o n proměnných, když je funkce $f(X)$ v bodě C **diferencovatelná** ? Vysvětlete význam jednotlivých symbolů.

Tj.: Funkce $f(X)$ je v bodě C **diferencovatelná,** když $f(C+H)-f(C)=a_1 \cdot h_1+\dots+a_n \cdot h_n+\omega(H)$ $\boxed{1}$

$C=(c_1,\dots,c_n)\in Df$; $H=(h_1,\dots,h_n)\in R_n$ - vektor přírůstků; $a_1,\dots,a_n \in R$ - konstanty

$\omega(H)$ je funkce přírůstků taková, že $\lim\limits_{H\to(0,\dots,0)} \dfrac{\omega(h_1,\dots,h_n)}{\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}}=0$ $\boxed{1}$

b) Využijte větu o koeficientech diferenciálu a zapište diferenciál funkce $f(X)$ v bodě C pro přírůstek $H=(h_1;\dots;h_n)$. Tj. $df_C(H)= a_1 \cdot h_1+\dots+a_n \cdot h_n$, kde $a_1,\dots,a_n$ jsou konstanty - koeficienty přírůstků proměnných $\boxed{1}$

c) Využijte větu o koeficientech diferenciálu a zapište obecně diferenciál funkce $f(X)$ v libovolném bodě X pro přírůstek $d\vec{x}=(dx_1;\dots;dx_n)$. Tj. $df=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1+\dots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n$ $\boxed{1}$

b) Je dána funkce $f(x;y;u)=\sqrt[3]{y}.x^3-\ln(2.u-3)$ a bod $C=(x_c;y_c;u_c)=(3;27;2)$.
Zapište diferenciál funkce f v bodě C pro přírůstek $d\vec{x}$ (tj. $df_C=?$) a diferenciál funkce f v C pro přírůstek $d\vec{x}=(0{,}1;-0{,}1;0{,}1)$, tj. $df_C(0{,}1;-0{,}1;0{,}1)=?$ | $\dfrac{\partial f}{\partial u}=-\dfrac{2}{2u-3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(C)=-2$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=3\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{y}\,\Big|_C=3\cdot 3^2\cdot\sqrt[3]{27}$ $\boxed{1}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(C)=81$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\cdot x^3\Big|_C=\dfrac{3^3}{3\cdot(\sqrt[3]{27})^2}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(C)=1$ $\boxed{1}$

$df_C=81\cdot dx+dy-2\,du$ $\boxed{1}$ $df_C(0{,}1;-0{,}1;0{,}1)=81\cdot 0{,}1+(-0{,}1)-2\cdot 0{,}1=8{,}1-0{,}1-0{,}2=7{,}8$

c) Veličina z je funkcí proměnných x, y, u, tj. $z=f(x;y;u)=\sqrt[3]{y}.x^3-\ln(2.u-3)$. Měřením bylo zjištěno, že $x=(\bar{x}\pm\Delta x)=(3{,}00\pm 0{,}01)$, $y=(27{,}0\pm 0{,}1)$ a $u=(2{,}00\pm 0{,}05)$. Určete $\boxed{1}$
střední hodnotu a absolutní chybu veličiny z. (Využijte předchozího diferenciálu!) $=0{,}81+0{,}1+0{,}1=1{,}01$

Tedy $\bar{z}=\sqrt[3]{27}\cdot 3^3-\ln 1=81$ $\boxed{1}$ $\Delta z=\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|\Delta u=81\cdot 0{,}01+0{,}1+2\cdot 0{,}05$ $z=(81\pm 1{,}01)=(81{,}0\pm 1{,}1)$ $\boxed{1}$

(12) 4. a) Ověřte, že rovnicí $\cos y+y-\sin x-x-1=0$ a bodem $A=[0;0]$ je určena implicitně funkce $f: y=y(x)$ taková, že $y(0)=0$. $F(A)=\cos 0+0-\sin 0-0-1=0$ - splněno $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\sin y+1$; $\dfrac{\partial F}{\partial y}(A)=1\neq 0$ - splněno $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ Uvedenou rovnicí je určena implicitní funkce v okolí bodu c = 0

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(0)$. $\boxed{2}$ $\boxed{1}$

$\cos y+y-\sin x-x-1=0 \;\Big|\dfrac{d}{dx}$

$-\sin y\cdot y'+y'-\cos x-1=0 \implies y'=\dfrac{1+\cos x}{1-\sin y}$; $y'(0)=\dfrac{1+\cos 0}{1-\sin 0}=2$

$(1-\sin y)\,y'=1+\cos x$

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(0)$.

$(1-\sin y)\cdot y'=1+\cos x \;\Big|\dfrac{d}{dx}$

$-\cos y\cdot(y')^2+(1-\sin y)\cdot y''=-\sin x \implies y''=\dfrac{(y')^2\cos y-\sin x}{1-\sin y}$ $\boxed{2}$

$y''(0)=\dfrac{2^2\cdot\cos 0-\sin 0}{1-\sin 0}=4$ $\boxed{1}$

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c=0$ pro implicitní funkci $y=y(x)$.

$T_2(x)=y(0)+y'(0)\cdot x+\dfrac{y''(0)}{2!}x^2=0+2\cdot x+\dfrac{4}{2}x^2=2x+2x^2$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

UEIT - Zkouškový set z předmětu IMAT2 a IMA2E – EXM2060613-2-(3)

5	6	7	8

$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

11

5.1. a) Zapište obecně nebo jako příklad nějakou nehomogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu. $y'' + p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y = g(x),\ y = y(x)$ 1

b) Co musí nutně obsahovat ve svém zápise diferenciální rovnice druhého řádu. y'', tj. druhou derivaci neznámé funkce 1

c) Co je obsaženo v každém zápise funkce, která je obecným řešením diferenciální rovnice $C \in R$, tj. libovolná reálná konstanta 1

5.2. a) Vyřešte dif. rovnici $u'.x = u^{-2}$ pro neznámou funkci $u = u(x)$.

$$\frac{du}{dx}\cdot x = u^{-2} \quad 1$$

$$\int u^2\,du = \int \frac{dx}{x} \quad 1$$

$$\frac{u^3}{3} = \ln|x| + C,\ C \in R \quad 1$$

$$u = \sqrt[3]{3(\ln|x| + C)} \quad 1$$

b) Vyřešte dif. rovnici $-\frac{y}{x} + y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{-2}$

(Volte substituci $y = u.x$) $y' = u'\cdot x + u$ 1

$$-u + u'x + u = u^{-2}$$

$$u'x = u^{-2} \quad 1$$

$$\int u^2\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u = \sqrt[3]{3(\ln|x| + C)} \quad 1$$

$$y = x\cdot\sqrt[3]{3(\ln|x| + C)} \quad 1,\ C \in R$$

10 (4

6. a) Najděte obecné řešení homogenní dif. rovnice $y'' + y = 0$ pro neznámou funkci $y = y(x)$.

Char. rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ 1

$\lambda_{1,2} = \pm i$ 1 $\quad y = C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x,\ C_1, C_2 \in R$ 1 1

(12) 6. b) Metodou variace konstant vyřešte nehomogenní diferenciální rovnici $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

$$y = C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x,\ C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x) \quad 1$$

$$y' = C_1'\cos x + C_1(-\sin x) + C_2'\cdot\sin x + C_2\cdot\cos x \quad 1$$

$$C_1'\cos x + C_2'\cdot\sin x = 0 \quad 1$$

$$C_1'(-\sin x) + C_2'\cos x = \frac{1}{\sin x} \quad 1$$

$$D = \begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix} = 1 \quad 1$$

$$D_{C_1'} = \begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \frac{1}{\sin x} & \cos x\end{vmatrix} = -1 \quad 1$$

$$C_1' = \frac{D_{C_1'}}{D} = -1 \Rightarrow C_1 = \int(-1)dx = -x + K_1,\ K_1 \in R \quad 1 \quad 1$$

$$D_{C_2'} = \begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \frac{1}{\sin x}\end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad 1$$

$$C_2' = \frac{D_{C_2'}}{D} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad 1$$

$$C_2 = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx = \left|\begin{matrix}t = \sin x\\ dt = \cos x\,dx\end{matrix}\right| = \int\frac{1}{t}dt = \ln|t| + K_2 = \ln\sin x + K_2 \quad 1$$

Obecné řešení dif. rovnice 1

$$y = (-x + K_1)\cos x + (\ln|\sin x| + K_2)\sin x$$

$$y = -x\cdot\cos x + \ln|\sin x|\cdot\sin x + K_1\cdot\cos x + K_2\cdot\sin x$$

$\boxed{17}$ 7.1. Je dána prostorová křivka $\kappa = \{(x,y,z) \in R^3 ; x = x(t) \wedge y = y(t) \wedge z = z(t) \wedge t \in \langle a ; b \rangle\}$.

a) Zapište podle definice křivkový integrál ze skalární funkce $f(x;y;z)$ podél křivky κ a napište, jak se vypočítá. $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$$\int_\kappa f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[\dot x(t)]^2+[\dot y(t)]^2+[\dot z(t)]^2}\,dt$$

b) Zapište podle definice křivkový integrál z vektorové funkce $\vec F(x;y;z)$ podél křivky κ a napište, jak se vypočítá. $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$$\int_\kappa \vec F\cdot d\vec s = \int_\kappa (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz) = \int_a^b \left(f_1(x(t),y(t),z(t))\dot x + f_2(x(t),y(t),z(t))\dot y + f_3(x(t),y(t),z(t))\dot z\right)dt$$

7.2. Parametrizujte úsečku AB, kde $A = [1;1]$ a $B = [3;3]$ a vypočtěte $\int_{AB} \frac{x^2}{y}.ds$.

$\vec a = \vec{AB} = (2,2)$

AB: $x = 1+2t$, $\dot x = 2$
$\boxed{1}$ $y = 1+2t$, $\dot y = 2$
$\boxed{1}$ $t \in \langle 0,1\rangle$

$\boxed{1}$ $ds = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt = \sqrt{2^2+2^2}\,dt = \sqrt8\,dt$

$$\int_{AB}\frac{x^2}{y}\,ds = \int_0^1 \frac{(1+2t)^2}{(1+2t)}\sqrt8\,dt = \int_0^1 (1+2t)\sqrt8\,dt = [t+t^2]_0^1\sqrt8 = [1+1]\sqrt8 = 2\sqrt8 = 4\cdot\sqrt2 \quad \boxed{2}$$

7.3. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu v rovině z funkce $\vec F = (x+y ; x)$ po křivce κ, která je grafem kubické paraboly $y = x^3$ a která začíná v bodě $A = [0;0]$ a končí v bodu $B = [2;8]$. (Zapište parametricky křivku κ!)

$\kappa = \{(x,y) \in R^2 ; x = t \wedge y = t^3 \wedge t \in \langle 0 ; 2 \rangle\}$; $dx = dt$ $\quad dy = 3t^2dt$

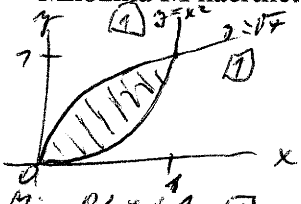
$d\vec s = (dt, 3t^2dt) = (1, 3t^2)dt$

$$\int_\kappa \vec F.d\vec s = \int_\kappa (x+y; x)\cdot(dx, dy) = \int_0^2 (t+t^3)dt + t\cdot 3t^2dt = \int_0^2 (t+4t^3)dt = \left[\frac{t^2}{2}+t^4\right]_0^2 =$$
$$= \frac{4}{2}+16 = 18 \quad \boxed{1}$$

$\boxed{18}$ (1) 8. a) Co je a jak se vypočítá dolní integrální součet funkce f na dvojrozměrném intervalu J při dělení D. Tj. $s(f,D) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot\mu(J_{ij})$, kde $m_{ij} = \inf_{J_{ij}} f$ – infimum funkce f na částečném intervalu J_{ij}, $\mu(J_{ij})$ je obsah intervalu J_{ij}. Je to číslo.

(7) b) Množina M je určena nerovnostmi a hraničními křivkami, tj. $M: 0 \le x \le 1$, $y = \sqrt x$, $y = x^2$.

Množinu M načrtněte a zapište pomocí nerovnic a vypočtěte integrál $\iint_M (x^2+y)dx.dy =$



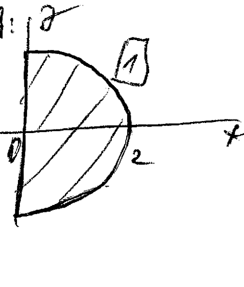
M: $0 \le x \le 1$
$x^2 \le y \le \sqrt x$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt x}(x^2+y)\,dy = \int_0^1 dx \left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt x} = \int_0^1 dx\left(x^2\sqrt x+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)$$
$$= \int_0^1\left(x^{\frac52}+\frac{x}{2}-\frac32x^4\right)dx = \left[\frac{2x^{\frac72}}{7}+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{2\cdot5}x^5\right]_0^1 = \frac27+\frac14-\frac{3}{10} = \frac{40+35-42}{140} = \frac{33}{140}$$

(10) c) Je dána množina $A = \{(x;y) \in R^2 ; x \ge 0 \wedge x^2+y^2 \le 4\}$ Množinu A načrtněte a substitucí do polárních souřadnic vypočtěte integrál $\iint_A e^{x^2+y^2}.dx.dy = \iint_{A_{\rho\varphi}} e^{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^2 e^{\rho^2}\rho\,d\rho\cdot\int_{-\frac\pi2}^{\frac\pi2}d\varphi =$

$\boxed{1}$ $x = \rho\cdot\cos\varphi$
$y = \rho\cdot\sin\varphi$
$\boxed{1}$ $|J| = \rho$

A:



$A_{\rho\varphi}$: $0 \le \rho \le 2$
$\boxed{1}$ $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$= \left|\begin{array}{l} t = \rho^2 \\ dt = 2\rho\,d\rho \\ \frac{dt}{2} = \rho\,d\rho \\ \rho = 0 \ t = 0 \\ \rho = 2 \ t = 4\end{array}\right| = \int_0^4 e^t\frac{dt}{2}\cdot[\varphi]_{-\frac\pi2}^{\frac\pi2} = \left[\frac{e^t}{2}\right]_0^4\cdot\left(\frac\pi2+\frac\pi2\right) =$$
$$= \frac12(e^4-e^0)\cdot\pi = \frac{(e^4-1)\pi}{2}$$