

1	2	3	4
---	---	---	---

Σ 1-4	Σ 5-8
-------	-------

Σ 1-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno
 1. a) Zapište definici vlastní limity posloupnosti, tj. zapište podle definice, co znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$$

b) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1}}{3^n + 2^n} =$

c) Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \cdot \log(3 \cdot n + 1) - \log(n^2 + 1)) =$

d) Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{4}{n^2 + 1}$$

konverguje absolutně nebo
 relativně nebo, zda diverguje.
 Uveďte postup a použitá kritéria.

e) Najděte střed, poloměr a obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 10^{-n} \cdot (x - 5)^n$.

2. Je dána skalární funkce $f(x; y; z) = \frac{x \cdot (y^3 + z)}{z}$ a bod $A = [3; 2; 1]$. a) Určete parciální

derivace funkce $f(x; y; z)$ v bodě A , tj. $\frac{\partial f}{\partial x} =$ $\frac{\partial f}{\partial x}(A) =$

$\frac{\partial f}{\partial y} =$ $\frac{\partial f}{\partial y}(A) =$

$\frac{\partial f}{\partial z} =$ $\frac{\partial f}{\partial z}(A) =$

b) Určete $\overrightarrow{\text{grad}} f(A)$, tj. $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) =$

c) Určete derivaci funkce $f(x; y; z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s} = (2; -2; 1)$

$f'_s(A) = \frac{df}{d\vec{s}}(A) =$

3. a) Uveďte podle definice, co je (neostré) lokální maximum funkce o n proměnných.

b) Uveďte nutnou podmínku lokálního extrému.

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x; y) = x^3 + y^2 - 3x - 4y + 1$ na $D(f) = \mathbb{R}^2$.

4. a) Ověřte, že rovnicí $y + e^{y-2} + x - 3e^x = 0$ a bodem $A = [0; 2]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(0) = 2$.

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(0)$.

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(0)$.

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 0$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) =$

5	6	7	8
---	---	---	---

Σ 5-8

.....
 datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

5.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů.

Co je neznámou v diferenciální rovnici ?

5.2. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{2 \cdot y}{x} = 0$.

5.2. b) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{2 \cdot y}{x} = \frac{x^2}{1 + x^2}$. (Navažte na předchozí výsledek)

5.2. c) Najděte partikulární řešení předchozí diferenciální rovnice tak, aby $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

6. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2 \cdot y' + y = 0$.

6. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 2 \cdot y' + y = 20 \cdot e^{-x}$. ($g(x) = e^{\alpha \cdot x} [P_1(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + P_2(x) \cdot \sin(\beta \cdot x)]$; $y_p = x^k \cdot e^{\alpha \cdot x} [Q_1(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + Q_2(x) \cdot \sin(\beta \cdot x)]$)

6. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2 \cdot y' + y = 20 \cdot e^{-x}$ (využijte předchozí výsledky).

7. Je dána vek. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = \left(2x + y; x + 3y^2; \frac{1}{z}\right)$ a body $A = [1; 1; 1]$, $B = \left[3; 2; e^2\right]$.

a) Ověřte, že vektorová funkce $\vec{F}$ je potenciální v oblasti, kde $z > 0$.

b) Nalezněte funkci, která je potenciálem vektorové funkce $\vec{F}$.

c) Vypočítejte křivkový integrál $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} =$

d) Definujte, co je uzavřená orientovaná cesta

e) Definujte, co je cirkulace vektorového pole.

f) Definujte, co je potenciál vektorové funkce $\vec{F}$

8. a) Pro $J = \langle 1; 5 \rangle \times \langle -2; 3 \rangle$ запиšte v obou možných pořadích integrace dvojný integrál $\iint_J f(x, y) \cdot dx \cdot dy$. Tedy 1) $\iint_J f(x, y) \cdot dx \cdot dy =$ a 2) $\iint_J f(x, y) \cdot dx \cdot dy =$

b) Vypočítejte integrál $\iiint_M \frac{1}{z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz =$

kde $M: 1 \leq z \leq 5$

$-z \leq y \leq z$

$y \leq x \leq y + z$

c) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině

$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$, množinu A načrtněte.

$\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot dx \cdot dy =$