1 17	2 8	3 13	4 12

$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8

$\sum$ 1-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

17

1. a) Zapište definici vlastní limity posloupnosti, tj. zapište podle definice, co znamená, že

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(|a_n - A| < \varepsilon)$ 2

b) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2.3^{n+1} - 3.2^{n+1}}{3^n + 2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\cdot 3 - 3\cdot 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 6$ 2

c) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2.\log(3.n+1) - \log(n^2+1)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \log \dfrac{(3n+1)^2}{n^2+1}$ 1 $= \lim\limits_{n\to\infty} \log \dfrac{9n^2+6n+1}{n^2+1} =$

$= \lim \log \dfrac{9 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \log 9$ 1

d) Rozhodněte, zda řada konverguje absolutně nebo relativně nebo, zda diverguje. Uveďte postup a použitá kritéria.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{4}{n^2+1}$, $\sum |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2+1}$ $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{4}{x^2+1}dx$ 1 $= [4 \operatorname{arctg} x]_1^{\infty}$ 1 $= \lim\limits_{x\to+\infty} 4\cdot \operatorname{arctg} x -$

$- 4 \operatorname{arctg} 1 = 4\cdot\frac{\pi}{2} - 4\cdot\frac{\pi}{4} = 2\pi - \pi = \pi \in R$ 1

dle integrálního kritéria $\sum |a_n|$ konverguje $\Rightarrow$ 1

$\Rightarrow \sum a_n$ konverguje absolutně 1

e) Najděte střed, poloměr a obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.10^{-n}.(x-5)^n$. 1

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n+1)\cdot 10^{-n-1}\cdot(x-5)^{n+1}}{n\cdot 10^{-n}(x-5)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |(1+\frac{1}{n})\, 10^{-1}(x-5)| = \dfrac{|x-5|}{10} < 1 \Leftrightarrow$ 1 1

$|x-5| < 10 \Leftrightarrow x \in (-5; 15)$

Pro $x \in (-5; 15)$ řada konverguje absolutně

$a = 5;\ r = 10;\ J = (-5; 15)$ 1

$x = -5$ $\sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 10^{-n}(-10)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n$ – neex tj $\neq 0 \Rightarrow$ pro $x=-5$ r. div. 1

$x = 15$ $\sum a_n = \sum n 10^{-n} 10^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n = +\infty \Rightarrow$ pro $x = 15$ r. diverguje 1 $M = (-5; 15)$

8

2. Je dána skalární funkce $f(x;y;z) = \dfrac{x.(y^3+z)}{z}$ a bod $A = [3;2;1]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^3+z}{z}$ 1 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 9$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{z} 3y^2$ 1 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 36$ 1

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x\cdot \dfrac{z - (y^3+z)}{z^2} = -\dfrac{xy^3}{z^2}$ 1 $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A) = -24$

b) Určete $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(A)$, tj. $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(A) = (9, 36, -24)$ 1

c) Určete derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s} = (2;-2;1)$ 1

$f'_{\vec{s}}(A) = \dfrac{df}{d\vec{s}}(A) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f(A)\cdot\dfrac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}$ 1 $= \dfrac{(9,36,-24)(2,-2,1)}{\sqrt{4+4+1}}$ 1 $= \dfrac{18-72-24}{3} = -\dfrac{78}{3} = -26$

5	6	7	8		$\sum$ 5-8

…………	…………	…………	…………………	…………………………
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

13

3. a) Uveďte podle definice, co je (neostré) lokální maximum funkce více proměnných.

Je to číslo $f(C)$ takové, že existuje okolí $O(C)$ bodu C takové, že pro každé $X \in O(C)$ platí $f(X) \leq f(C)$ 1

b) Uveďte nutnou podmínku lokálního extrému.

Pokud $f(X)$ je funkce o n proměnných, která má ve vnitřním bodě $C \in D_f$ lokální extrém a pokud existují všechny parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě C, potom $\frac{\partial f}{\partial x_1}(C) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(C) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(C) = 0$ 1

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y) = x^3 + y^2 - 3.x - 4.y + 1$ na $D(f) = R^2$. 1

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -1$ 1 1

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ 1 1 Stac. body $A_1 = [1;2]$; $A_2 = [-1;2]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$ 1 $\quad D_{A_1} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$ 1 $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1) = 6 > 0$ } v A_1 ex. lokální minimum $f(A_1) = 1^3 + 2^2 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 1 = -5$ 1

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ 1 $\quad D_{A_2} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$ 1 $\Rightarrow$ v A_2 lokální extrém neexistuje 1

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

12

4. a) Ověřte, že rovnicí $y + e^{y-2} + x - 3.e^x = 0$ a bodem $A = [0;2]$ je určena implicitně funkce $f : y = y(x)$ taková, že $y(0) = 2$. $F(x,y) = y + e^{y-2} + x - 3 \cdot e^x$

$F(0,2) = 2 + e^{2-2} + 0 - 3 \cdot e^0 = 0$ – splněno 1

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + e^{y-2}$ 1, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 + e^{2-2} = 2 \neq$ splněno } Rovnicí a bodem A je určena implicitní funkce 1

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(0)$.

$y + e^{y-2} + x - 3 \cdot e^x = 0 \; / \frac{\partial}{\partial x}$

$y' + e^{y-2} \cdot y' + 1 - 3 \cdot e^x = 0$

$y'(1 + e^{y-2}) = 3 \cdot e^x - 1 \Rightarrow y' = \frac{3 \cdot e^x - 1}{1 + e^{y-2}}$ 2, $y'(0) = \frac{3 \cdot e^0 - 1}{1 + e^{2-2}} = \frac{2}{2} = 1$ 1

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(0)$.

$y' + e^{y-2} \cdot y' + 1 - 3 \cdot e^x = 0 \; / \frac{\partial}{\partial x}$

$y'' + e^{y-2}(y')^2 + e^{y-2} \cdot y'' - 3e^x = 0$

$y''(1 + e^{y-2}) = 3 \cdot e^x - e^{y-2} \cdot (y')^2 \Rightarrow y'' = \frac{3e^x - e^{y-2}(y')^2}{1 + e^{y-2}}$ 2 ; $y''(0) = \frac{3-1}{1+1} = 1$ 1

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 0$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 = 2 + x + \frac{1}{2} x^2$

1 1 1

5 13	6 12	7 15	8 10

$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

13

5.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů. Co je neznámou v diferenciální rovnici?

1 $F(x, y, y') = 0$, Neznámou v dif. rovnici je funkce $y = y(x)$ 1, x nezávisle proměnná, y' derivace neznámé, F - funkce tří proměnných 1

5.2. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{2.y}{x} = 0$.

1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow |y| = |C \cdot x^2|$$

1

$$y_h = C \cdot x^2;\ C \in R$$ 1

5.2. b) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{2.y}{x} = \frac{x^2}{1+x^2}$. (Navažte na předchozí výsledek) Variace konstanty $y = C \cdot x^2$, $C = C(x)$ 1

$$y' = C' x^2 + 2 \cdot C \cdot x$$ 1

Dosazení: 1

$$C' x^2 + 2 C x - \frac{2 C x^2}{x} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$C' = \frac{1}{1+x^2}$$ 1

$$\Rightarrow C = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + K;\ K \in R$$ 1

$$y = x^2(\operatorname{arctg} x + K)$$

$$y = x^2 \operatorname{arctg} x + K \cdot x^2$$ 1

5.2. c) Najděte partikulární řešení předchozí diferenciální rovnice tak, aby $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

$$0 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4} + K\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \Rightarrow K = -1 \qquad y_p = x^2 \operatorname{arctg} x - x^2$$ 1

12

6. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + y = 0$.

Char. rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ 1

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1$ 1

$$y_h = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$$ 1 1

6. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + y = 20.e^{-x}$. ($g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x)\cos(\beta.x) + P_2(x)\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x)\cos(\beta.x) + Q_2(x)\sin(\beta.x)]$) 1

$20 \cdot e^{-x} = g(x) \Rightarrow \alpha = -1\ \beta = 0,\ P_1(x) = 20\ P_2(x) = 0 \Rightarrow Q_1(x) = A$

$\alpha + \beta i = -1 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow k = 0$ 1

$y_p = A \cdot e^{-x}$ 1

$y_p' = -A e^{-x}$

$y_p'' = A e^{-x}$ 1

Dosazení:

$A \cdot e^{-x} - 2 \cdot (-A e^{-x}) + A \cdot e^{-x} = 20 \cdot e^{-x}$

$4A\, e^{-x} = 20\, e^{-x} \Rightarrow A = 5$ 1

$$\underline{y_p = 5 \cdot e^{-x}}$$ 1

6. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + y = 20.e^{-x}$ (využijte předchozí výsledky).

$$y = y_p + y_h = 5 \cdot e^{-x} + C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x,\ C_1, C_2 \in R$$

1 1

15

7. Je dána vek. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = \left(2.x + y \,;\, x + 3.y^2 ; \frac{1}{z}\right)$ a body $A = [1;1;1]$, $B = \left[3;2;e^2\right]$.

a) Ověřte, že vektorová funkce $\vec{F}$ je potenciální v oblasti, kde $z > 0$.

$\vec{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} ; -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z} ; \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = (0-0; 0-0; 1-1) = (0,0,0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ je potenciální, její křivkový integrál nezávisí na int. cestě

b) Nalezněte funkci, která je potenciálem vektorové funkce $\vec{F}$.

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y \Rightarrow U = \int (2x+y)\,dx = x^2 + x\cdot y + \varphi(y,z)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \stackrel{!}{=} x + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3y^2 \Rightarrow \varphi = \int 3y^2\,dy = y^3 + \psi(z) \Rightarrow U = x^2 + xy + y^3 + \psi(z)$

$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d\psi}{dz} = \frac{1}{z} \Rightarrow \psi = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| + C, C \in R \Rightarrow U = x^2 + xy + y^3 + \ln|z| + C$

c) Vypočtěte křivkový integrál $\int_A^B \vec{F}.d\vec{s} = [U]_A^B = 3^2 + 3\cdot 2 + 2^3 + \ln e^2 - (1^2 + 1\cdot 1 + 1^3 + \ln 1) =$
$= 9 + 6 + 8 + 2 - (1+1+1+0) = 25 - 3 = 22$

d) Definujte, co je uzavřená orientovaná cesta – její koncový bod je totožný s počátečním bodem

e) Definuje, co je cirkulace vektorového pole – křivkový integrál po uzavřené orientované cestě

f) Definujte, co je potenciál vektorové funkce $\vec{F}$ je skalární funkce U, pro níž je $\vec{grad}\,U = \vec{F}$

10

8. a) Pro $J = \langle 1;5 \rangle \times \langle -2;3 \rangle$ zapište v obou možných pořadích integrace dvojný integrál $\iint_J f(x,y).dx.dy$. Tedy 1) $\iint_J f(x,y).dx.dy = \int_1^5 dx \int_{-2}^3 f(x,y)\,dy$ a 2) $\iint_J f(x,y).dx.dy = \int_{-2}^3 dy \int_1^5 f(x,y)\,dx$

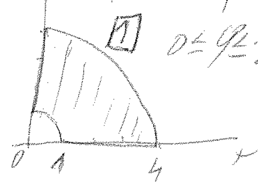
b) Vypočítejte integrál $\iiint_M \frac{1}{z}.dx.dy.dz = \int_1^5 dz \int_{-z}^{z} dy \int_y^{y+z} \frac{1}{z}\,dx = \int_1^5 dz \int_{-z}^{z} \frac{1}{z}\,dy\,[x]_y^{y+z} = \int_1^5 \frac{1}{z}\,dz \int_{-z}^{z} z\,dy =$

kde $M: \quad 1 \le z \le 5$
$\quad -z \le y \le z$
$\quad y \le x \le y + z$

$= \int_1^5 \frac{z}{z}\,dz\,[y]_{-z}^{z} = \int_1^5 dz\,[z+z] = \int_1^5 2z\,dz = [z^2]_1^5 = 24$

c) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \{(x;y) \in R^2 ; x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge 1 \le x^2 + y^2 \le 16\}$, množinu A načrtněte.

$A_{\rho\varphi}: 1 \le \rho \le 4$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$



$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.dx.dy = \iint_{A_{\rho\varphi}} \frac{1}{\rho^2 \cdot \rho} |J|\,d\rho\,d\varphi = \int_1^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{\rho^2 \cdot \rho}\,d\varphi =$

$x = \rho \cdot \cos\varphi$
$y = \rho \cdot \sin\varphi$
$|J| = \rho$
$x^2 + y^2 = \rho^2$

$= \int_1^4 \rho^{-2}\,d\rho\,[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\rho^{-1}}{-1}\right]_1^4 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{1}{\rho}\right]_1^4 =$

$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{8}$

1 17	2 8	3 13	4 12		$\sum$ 1-4	$\sum$ 5-8		$\sum$ 1-8

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

17

1. a) Zapište definici vlastní limity posloupnosti, tj. zapište podle definice, co znamená, že

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(|a_n - A| < \varepsilon)$ $\boxed{2}$

b) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2.3^{n+1} - 3.2^{n+1}}{3^n + 2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\cdot 3 - 3\cdot 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 6$ $\boxed{2}$

c) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2.\log(3.n+1) - \log(n^2+1)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \log \dfrac{(3n+1)^2}{n^2+1}$ $\boxed{1}$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \log \dfrac{9n^2+6n+1}{n^2+1} =$

$= \lim \log \dfrac{9 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \log 9$ $\boxed{1}$

d) Rozhodněte, zda řada konverguje absolutně nebo relativně nebo, zda diverguje. Uveďte postup a použitá kritéria.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{4}{n^2+1}$, $\sum |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2+1}$ $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{4}{x^2+1}\,dx = [4\,\mathrm{arctg}\,x]_1^{\infty}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} 4\,\mathrm{arctg}\,x -$

$- 4\,\mathrm{arctg}\,1 = 4\frac{\pi}{2} - 4\cdot\frac{\pi}{4} = 2\pi - \pi = \pi \in R$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ dle integrálního kritéria $\sum |a_n|$ konverguje $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum a_n$ konverguje absolutně $\boxed{1}$

e) Najděte střed, poloměr a obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.10^{-n}.(x-5)^n$. $\boxed{1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n+1)\cdot 10^{-n-1}\cdot(x-5)^{n+1}}{n\cdot 10^{-n}(x-5)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |(1+\frac{1}{n})\, 10^{-1}(x-5)| = \dfrac{|x-5|}{10} < 1 \Leftrightarrow$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$|x-5| < 10 \Leftrightarrow x \in (-5; 15)$

Pro $x \in (-5;15)$ řada konverguje absolutně

$a = 5;\ r = 10;\ I = (-5;15)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$x = -5$ $\sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 10^{-n}(-10)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n$ - neex tj $\neq 0 \Rightarrow$ pro $x=-5$ ř. div.

$x = 15$ $\sum a_n = \sum n 10^{-n} 10^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n = +\infty \Rightarrow$ pro $x = 15$ ř. diverguje $\boxed{1}$ $M = (-5;15)$

8

2. Je dána skalární funkce $f(x;y;z) = \dfrac{x.(y^3+z)}{z}$ a bod $A = [3;2;1]$. a) Určete parciální derivace funkce $f(x;y;z)$ v bodě A, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^3+z}{z}$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 9$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{z} 3y^2$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 36$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x \cdot \dfrac{z - (y^3+z)}{z^2} = -\dfrac{xy^3}{z^2}$ $\boxed{1}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(A) = -24$

b) Určete $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(A)$, tj. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(A) = (9, 36, -24)$ $\boxed{1}$

c) Určete derivaci funkce $f(x;y;z)$ v bodě A a ve směru $\vec{s} = (2;-2;1)$ $\boxed{1}$

$f'_{\vec{s}}(A) = \dfrac{df}{d\vec{s}}(A) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(A) \cdot \dfrac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} = \dfrac{(9,36,-24)(2,-2,1)}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{18-72-24}{3} = -\dfrac{78}{3} = -26$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

5	6	7	8

$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

13

3. a) Uveďte podle definice, co je (neostré) lokální maximum funkce více proměnných.

Je to číslo $f(C)$ takové, že existuje okolí $O(C)$ bodu C takové, že pro každé $X \in O(C)$ platí $f(X) \leq f(C)$ 1

b) Uveďte nutnou podmínku lokálního extrému.

Pokud $f(X)$ je funkce o n proměnných, která má ve vnitřním bodě $C \in D f$ lokální extrém a pokud existují všechny parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě C, potom $\frac{\partial f}{\partial x_1}(C) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(C) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(C) = 0$ 1

b) Najděte lokální extrémy funkce $f(x;y) = x^3 + y^2 - 3.x - 4.y + 1$ na $D(f) = R^2$. 1

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 \overset{1}{=} 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff (x+1)(x-1) = 0 \iff x_1 = 1 \vee x_2 = -1$ 1

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 \overset{1}{=} 0 \iff y - 2 = 0 \iff y = 2$ 1 Stac. body $A_1 = [1;2]$, $A_2 = [-1;2]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$ 1 $\quad D_{A_1} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$ 1, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1) = 6 > 0$ $\Big\}$ v A_1 ex. lokální minimum $f(A_1) = 1^3 + 2^2 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 1 = -5$ 1

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ 1 $\quad D_{A_2} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$ 1 $\Rightarrow$ v A_2 lokální extrém neexistuje 1

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

12

4. a) Ověřte, že rovnicí $y + e^{y-2} + x - 3.e^x = 0$ a bodem $A = [0;2]$ je určena implicitně funkce $f: y = y(x)$ taková, že $y(0) = 2$. $F(x,y) = y + e^{y-2} + x - 3 \cdot e^x$

$F(0,2) = 2 + e^{2-2} + 0 - 3 \cdot e^0 = 0$ – splněno 1

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + e^{y-2}$ 1, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 + e^{2-2} = 2 \neq$ splněno $\Big\}$ Rovnicí a bodem A je určena implicitní funkce 1

b) Vyjádřete první derivaci $y'(x)$ a vypočtěte $y'(0)$.

$y + e^{y-2} + x - 3 \cdot e^x = 0 \,/\, \frac{\partial}{\partial x}$

$y' + e^{y-2} \cdot y' + 1 - 3 \cdot e^x = 0$

$y'(1 + e^{y-2}) = 3 \cdot e^x - 1 \Rightarrow y' = \frac{3 \cdot e^x - 1}{1 + e^{y-2}}$ 2, $y'(0) = \frac{3 \cdot e^0 - 1}{1 + e^{2-2}} = \frac{2}{2} = 1$ 1

c) Vyjádřete druhou derivaci $y''(x)$ a vypočtěte $y''(0)$.

$y' + e^{y-2} \cdot y' + 1 - 3 \cdot e^x = 0 \,/\, \frac{\partial}{\partial x}$

$y'' + e^{y-2}(y')^2 + e^{y-2} \cdot y'' - 3e^x = 0$

$y''(1 + e^{y-2}) = 3 \cdot e^x - e^{y-2} \cdot (y')^2 \Rightarrow y'' = \frac{3e^x - e^{y-2}(y')^2}{1 + e^{y-2}}$ 2; $y''(0) = \frac{3-1}{1+1} = 1$ 1

d) Zapište Taylorův polynom $T_2(x)$ v bodě $c = 0$ pro implicitní funkci $y = y(x)$.

$T_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 = 2 + x + \frac{1}{2} x^2$

1 1 1

5 13	6 12	7 15	8 10		$\sum$ 5-8

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

13

5.1. Zapište obecně diferenciální rovnici 1. řádu a vysvětlete význam jednotlivých symbolů. Co je neznámou v diferenciální rovnici ?

1 $F(x, y, y') = 0$, Neznámou v dif. rovnici x nezávisle proměnná je funkce $y = y(x)$ 1 y' derivace neznámé, F – funkce tří proměnných 1

5.2. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \dfrac{2.y}{x} = 0$.

1

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = 2\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow |y| = |C\cdot x^2|$

1

$y_h = C\cdot x^2;\ C \in R$ 1

5.2. b) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \dfrac{2.y}{x} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. (Navažte na předchozí výsledek)

Variace konstanty $y = C\cdot x^2,\ C = C(x)$ 1

$y' = C'x^2 + 2\cdot C\cdot x$ 1

Dosazení 1

$C'\cdot x^2 + 2C\cdot x - \dfrac{2\cdot C\cdot x^2}{x} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

$C' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 1

$\Rightarrow C = \int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + K;\ K \in R$ 1

$y = x^2(\operatorname{arctg} x + K)$

$y = x^2\operatorname{arctg} x + K\cdot x^2$ 1

5.2. c) Najděte partikulární řešení předchozí diferenciální rovnice tak, aby $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

$0 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4} + K\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \Rightarrow K = -1$ $y_p = x^2\operatorname{arctg} x - x^2$ 1

12

6. a) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + y = 0$.

Char. rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ 1

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1$ 1

$y_h = C_1 e^x + C_2\cdot x\cdot e^x$ 1 1

6. b) Najděte na základě speciálního tvaru pravé strany partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + y = 20.e^{-x}$. 1 ($g(x) = e^{\alpha.x}.[P_1(x)\cos(\beta.x) + P_2(x)\sin(\beta.x)]$; $y_p = x^k.e^{\alpha.x}.[Q_1(x)\cos(\beta.x) + Q_2(x)\sin(\beta.x)]$)

$20\cdot e^{-x} = g(x) \Rightarrow \alpha = -1\ \beta = 0,\ P_1(x) = 20\ P_2(x) = 0 \Rightarrow Q_1(x) = A$

$\alpha + \beta i = -1 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow k = 0$ 1

$y_p = A\cdot e^{-x}$ 1

$y_p' = -Ae^{-x}$

$y_p'' = Ae^{-x}$ 1

Dosazení:

$A\cdot e^{-x} - 2\cdot(-Ae^{-x}) + A\cdot e^{-x} = 20\cdot e^{-x}$

$4A\,e^{-x} = 20\,e^{-x} \Rightarrow A = 5$ 1

$\underline{y_p = 5\cdot e^{-x}}$ 1

6. c) Zapište obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2.y' + y = 20.e^{-x}$ (využijte předchozí výsledky).

$y = y_p + y_h = 5\cdot e^{-x} + C_1 e^x + C_2 x\cdot e^x;\ C_1, C_2 \in R$

1 1

$\boxed{15}$ 7. Je dána vek. funkce $\vec{F} = (f_1; f_2; f_3) = \left(2.x + y\ ;\ x + 3.y^2;\ \frac{1}{z}\right)$ a body $A = [1;1;1]$, $B = \left[3;2;e^2\right]$.

a) Ověřte, že vektorová funkce $\vec{F}$ je potenciální v oblasti, kde $z > 0$.

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z};\ -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z};\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = (0-0;\ 0-0;\ 1-1) = (0,0,0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} \text{ je potenciální}$$

její křivkový integrál nezávisí na int. cestě

b) Nalezněte funkci, která je potenciálem vektorové funkce $\vec{F}$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y \Rightarrow U = \int (2x+y)\,dx = x^2 + x\cdot y + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \stackrel{!}{=} x + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3y^2 \Rightarrow \varphi = \int 3y^2\,dy = y^3 + \psi(z) \Rightarrow U = x^2 + xy + y^3 + \psi(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d\psi}{dz} = \frac{1}{z} \Rightarrow \psi = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| + C,\ C \in R \Rightarrow U = x^2 + xy + y^3 + \ln|z| + C$$

c) Vypočtěte křivkový integrál $\int_A^B \vec{F}.d\vec{s} = [U]_A^B = 3^2 + 3\cdot 2 + 2^3 + \ln e^2 - (1^2 + 1\cdot 1 + 1^3 + \ln 1) =$
$= 9 + 6 + 8 + 2 - (1 + 1 + 1 + 0) = 25 - 3 = 22$

d) Definujte, co je uzavřená orientovaná cesta – její koncový bod je totožný s počátečním bodem

e) Definuje, co je cirkulace vektorového pole – křivkový integrál po uzavřené orientované cestě

f) Definujte, co je potenciál vektorové funkce $\vec{F}$ je skalární funkce U, pro níž je $\operatorname{grad} U = \vec{F}$

$\boxed{10}$ 8. a) Pro $J = \langle 1;5 \rangle \times \langle -2;3 \rangle$ zapište v obou možných pořadích integrace dvojný integrál $\iint_J f(x,y).dx.dy$. Tedy 1) $\iint_J f(x,y).dx.dy = \int_1^5 dx \int_{-2}^{3} f(x,y)\,dy$ a 2) $\iint_J f(x,y).dx.dy = \int_{-2}^{3} dy \int_1^5 f(x,y)\,dx$

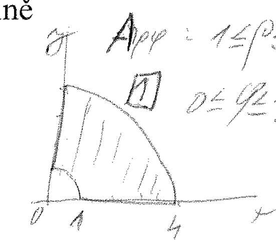
b) Vypočítejte integrál $\iiint_M \frac{1}{z}.dx.dy.dz = \int_1^5 dz \int_{-z}^{z} dy \int_y^{y+z} \frac{1}{z}\,dx = \int_1^5 dz \int_{-z}^{z} \frac{1}{z}\,dy\,[x]_y^{y+z} = \int_1^5 \frac{1}{z}\,dz \int_{-z}^{z} z\,dy =$

kde M: $1 \le z \le 5$
$-z \le y \le z$
$y \le x \le y + z$

$= \int_1^5 \frac{z}{z}\,dz\,[y]_{-z}^{z} = \int_1^5 dz\,[z+z] = \int_1^5 2z\,dz = [z^2]_1^5 = 24$

c) Substitucí do polárních souřadnic vypočítejte níže uvedený integrál na množině $A = \left\{(x;y) \in R^2; x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge 1 \le x^2 + y^2 \le 16\right\}$, množinu A načrtněte.

$A_{\rho\varphi}$: $1 \le \rho \le 4$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$



$$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.dx.dy = \iint_{A_{\rho\varphi}} \frac{1}{\rho^2\cdot\rho}|J|\,d\rho\,d\varphi = \int_1^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{\rho^2\rho}\,d\varphi =$$

$x = \rho\cdot\cos\varphi$
$y = \rho\cdot\sin\varphi$
$|J| = \rho$
$x^2 + y^2 = \rho^2$

$$= \int_1^4 \rho^{-2}\,d\rho\,[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\rho^{-1}}{-1}\right]_1^4 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{\rho}\right]_1^4 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{8}$$