Lineární algebra

30. května

2007

V této knize najdete definice, věty a poznámky, které zveřejnil v akademickém roce 2006/2007 Doc. RNDr. Jaroslav Seibert, CSc. Také zde najdete požadavky ke zkoušce, zápočtu a obdobné věci, které se Vám určitě budou hodit.

Definice, věty a poznámky

Vektorové prostory

Def.: Každou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$ nazveme binární relací mezi množinami A, B. V případě $A = B$ hovoříme o binární relaci v množině A.

Def.: Relací ekvivalence v množině A rozumíme každou relaci R v A, která je

1. reflexivní, tj. pro všechna $x \in A$ je $[x, x] \in R$,
2. symetrická, tj. $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$,
3. tranzitivní, tj. $[x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R$.

Def.: Rozkladem množiny A nazveme každý systém množin $\varphi \subset P(A)$, $\varphi = \{A_k\}$ takový, že

1. $\emptyset \notin \varphi$,
2. $A_k \cap A_l = \emptyset$ pro $k \neq l$,
3. $\cup A_k = A$, kde $A_k \in \varphi$.

Def.: Nechť $R \subset A \times B$ je libovolná relace. Inverzní relací k relaci R rozumíme takovou relaci $R^{-1} \subset B \times A$, pro kterou platí $[y, x] \in R^{-1}$, právě když $[x, y] \in R$.

Def.: Složenou relací $R = R_1 \circ R_2$ relací R_1, R_2 v množině A nazýváme takovou relaci R v množině A, jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice $[x, y] \in A^2$, pro které existuje prvek $z \in A$ takový, že $[x, z] \in R_1$ a $[z, y] \in R_2$.

Věta: a) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
b) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ – asociativnost skládání.

Def.: Binární relaci $U \subset A \times B$ nazveme zobrazením z množiny A do množiny B, právě když ke každému $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in U$.
V případě $A = B$ hovoříme o zobrazení v množině A.

Def.: 1. Je-li $O_1(U) = A$ říkáme, že U je zobrazením množiny A do B.
2. Je-li $O_2(U) = B$ říkáme, že U je zobrazením z množiny A na B (surjektivní zobrazení neboli surjekce).
3. Říkáme, že zobrazení U z množiny A do B je prosté zobrazení z A do B, právě když pro každé dvě dvojice $[x_1, y_1] \in U$, $[x_2, y_2] \in U$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$ (injektivní zobrazení neboli injekce).
4. Prosté zobrazení U množiny A na B nazýváme vzájemně jednoznačné zobrazení A na B (bijektivní zobrazení neboli bijekce).

Věta: Nechť U je zobrazení z množiny A do B. Relace U^{-1} je inverzní zobrazení k U, právě když U je prosté zobrazení z A do B.

Věta: Nechť U je zobrazení z A do B, V zobrazení z B do C. Pak relace $U \circ V$ je zobrazení z A do C.

Def.: Unární operací v množině A nazýváme zobrazení množiny A do A. Binární operací v množině A nazýváme zobrazení $A \times A$ do A.

Def: Uspořádaná n-tice reálných čísel se nazývá n-členný (n-rozměrný) aritmetický vektor.

Věta: Pro libovolné vektory $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbf{R}^n$ platí.

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ - komutativnost sčítání
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ - asociativnost sčítání
3. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$, kde $\overline{0} = (0, \dots, 0)$ je tzv. nulový vektor (neutrální prvek pro sčítání)
4. pro každý vektor $\overline{a}$ existuje právě jeden vektor $\overline{b}$ tak, že platí $\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$ (opačný vektor $\overline{b} = -\overline{a}$ vzhledem k $\overline{a}$).

Def.: Nechť $k \in \mathbf{R}$, $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Vektor $k\overline{a} = (ka_1, \dots, ka_n) \in \mathbf{R}^n$ nazýváme k-násobek vektoru $\overline{a}$.

Věta: Pro libovolná čísla $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ a vektory $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbf{R}^n$ platí:

1. $k_1(\overline{a} + \overline{b}) = k_1\overline{a} + k_1\overline{b}$, $(k_1 + k_2)\overline{a} = k_1\overline{a} + k_2\overline{a}$ - distributivní zákony pro násobení vektoru číslem
2. $(k_1k_2)\overline{a} = k_1(k_2\overline{a})$ – asociativní zákon pro násobení vektoru číslem
3. $1\overline{a} = \overline{a}$.

Def:

Množina T mající aspoň dva prvky spolu s operacemi +, . se nazývá těleso, jestliže platí:

1. $a + b = b + a$,
2. $(a+b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$, tzn. existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání (nulový prvek)
4. pro každé a existuje právě jedno b tak, že $a + b = 0$ ($b = -a$)
5. $a.b = b.a$
6. $(a.b).c = a.(b.c)$
7. $a.1 = a$, tzn. existence neutrálního prvku vzhledem k násobení (jednotkový prvek)
8. pro každé $a \neq 0$ existuje právě jedno b tak, že $a.b = 1$ ($b = a^{-1} = \frac{1}{a}$)
9. $(a + b) . c = a.c + b.c$

Def.: Nechť V je neprázdná množina, na které je definovaná operace + a nechť T je těleso. Řekneme, že V je lineární (vektorový) prostor nad T, jestliže platí:

1. V spolu s operací + má vlastnosti 1 – 4 z definice tělesa.
2. Je definována operace . násobení prvků z V prvky tělesa T tak, že platí vlastnosti z předchozí věty.

Prvky lineárního (vektorového) prostoru nazýváme vektory.

Věta: Pro $t \neq 0$ má v libovolném vektorovém prostoru rovnice $\overline{a} + t\overline{x} = \overline{b}$ právě jediné řešení.

Def.: Nechť (W, $\oplus$, $\odot$) a (V, +, .) jsou vektorové prostory nad tělesem T. Řekneme, že (W, $\oplus$, $\odot$) je vektorovým podprostorem prostoru (V, +, .), jestliže platí $W \subset V$ a $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a} + \overline{b}$, $k \odot \overline{a} = k \cdot \overline{a}$, pro každé $\overline{a}, \overline{b} \in W$ a každé $k \in T$.

Věta: Nechť $W \subset V$, $W \neq \emptyset$, kde V je vektorový prostor nad tělesem T. (W, +, .) je vektorový podprostor V, právě když pro libovolná $\overline{a}, \overline{b} \in W$ a libovolné $t \in T$ platí $\overline{a} + \overline{b} \in W$, $t\overline{a} \in W$ (W je uzavřená vzhledem ke sčítání i násobku).

Def.: Řekneme, že vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a_1}$, …, $\overline{a_k}$, právě když existují reálná čísla λ_1, …, λ_k taková, že platí $\overline{a} = \lambda_1 \overline{a_1} + \ldots + \lambda_k \overline{a_k}$.

Def.: Řekneme, že vektory $\overline{a_1}$, …, $\overline{a_k}$ jsou lineárně závislé, právě když existují reálná čísla λ_1, …, λ_k, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, taková, že platí $\lambda_1 \overline{a_1} + \ldots + \lambda_k \overline{a_k} = \overline{0}$. Řekneme, že vektory $\overline{a_1}$, …, $\overline{a_k}$ jsou lineárně nezávislé, nejsou-li lineárně závislé.

Věta: Vektory $\overline{a_1}$, …, $\overline{a_k}$ jsou lineárně závislé, právě když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Věta: Nechť $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_k}$ jsou vektory lineárního prostoru V nad tělesem T. Nechť W je množina všech lineárních kombinací vektorů $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_k}$. Potom W spolu s operacemi z V je lineární podprostor prostoru V.

Def.: Říkáme, že podprostor W z předchozí věty je vytvořen vektory $\overline{a_1}$, …, $\overline{a_k}$, nebo že $\overline{a_1}$, …, $\overline{a_k}$ je systém generátorů podprostoru W. Podprostor W se nazývá lineární obal množiny vektorů $M = \{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}\}$ a značíme ho (M).

Def.: Nechť V je vektorový prostor a množina vektorů $M \subset V$. M se nazývá báze vektorového prostoru V, jestliže platí a) (M) = V, b) M je množina lineárně nezávislých vektorů..

Věta: Systém vektorů $\overline{e_1}$ = (1, 0, …, 0), $\overline{e_2}$ = (0, 1, …, 0), …, $\overline{e_n}$ = (0, 0, …, 1) je báze vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$.

Věta: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, který má konečnou bázi. Potom každé dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.

Def.: Nechť V je vektorový prostor mající konečnou bázi. Počet prvků báze se nazývá dimenze prostoru V. Řekneme, že prostor má nekonečnou dimenzi, jestliže nemá konečnou bázi.

Věta: Každý prvek vektorového prostoru lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků dané báze tohoto prostoru.

Def.: Tvoří-li vektory $\overline{a_1}$, ..., $\overline{a_n}$ bází vektorového prostoru V a je-li prvek $\overline{b} \in V$ vyjádřen ve tvaru $\overline{b} = x_1 \overline{a_1} + ... + x_n \overline{a_n}$, říkáme, že čísla $x_1, ..., x_n$ jsou souřadnice vektoru $\overline{b}$ vzhledem k bázi $\overline{a_1}$, ..., $\overline{a_n}$.

Def.: Dva lineární prostory V_1 a V_2 se nazývají izomorfní, existuje-li mezi nimi vzájemně jednoznačné zobrazení takové, že odpovídá-li prvku $\overline{a_1} \in V_1$ prvek $\overline{a_2} \in V_2$ a prvku $\overline{b_1} \in V_1$ prvek $\overline{b_2} \in V_2$, potom

a) prvku $\overline{a_1} + \overline{b_1} \in V_1$ odpovídá prvek $\overline{a_2} + \overline{b_2} \in V_2$,

b) prvku $\lambda \overline{a_1} \in V_1$ odpovídá prvek $\lambda \overline{a_2} \in V_2$, kde $\lambda \in \mathbf{R}$ (obecně prvek tělesa T).

Věta: Průnik, resp. součet, dvou podprostorů W_1, W_2 lineárního prostoru V je opět jeho podprostorem.

Def.: Podprostor W lineárního prostoru V nazýváme direktním součtem $W = W_1 \oplus W_2$ podprostorů W_1, W_2, jestliže $W = W_1 + W_2$ a $W_1 \cap W_2$ je triviální podprostor.

Věta. Dimenze prostoru $W_1 \oplus W_2$ je rovna součtu dimenzí prostorů W_1 a W_2.

Def.: Říkáme, že v daném lineárním prostoru je definován skalární součin, jestliže je každé dvojici $\overline{a}, \overline{b}$ prvků lineárního prostoru přiřazeno reálné číslo $(\overline{a}, \overline{b})$ takové, že platí

1. $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$,
2. $(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c})$,
3. $(k\overline{a}, \overline{b}) = k(\overline{a}, \overline{b})$,
4. $(\overline{a}, \overline{a}) \geq 0$, $(\overline{a}, \overline{a}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$.

Def.: Lineární prostor se zavedeným skalárním součinem nazýváme euklidovský prostor.

Def.: Normou (absolutní hodnotou, velikostí, délkou) prvku $\overline{a}$ euklidovského prostoru se nazývá reálné číslo $||\overline{a}|| = \sqrt{\overline{a}.\overline{a}}$. Jednotkovým prvkem nazýváme prvek euklidovského prostoru, jehož norma je rovna jedné.

Věta (Schwarzova nerovnost): Nechť $\overline{a}, \overline{b}$ jsou dva libovolné prvky euklidovského prostoru. Pak platí $|(\overline{a}, \overline{b})| \leq ||\overline{a}|| \,.\, ||\overline{b}||$.

Věta (trojúhelníková nerovnost): Pro libovolné dva prvky $\overline{a}, \overline{b}$ euklidovského prostoru platí $||\overline{a} + \overline{b}|| \leq ||\overline{a}|| + ||\overline{b}||$.

Věta: Pro libovolné prvky $\bar{a},\bar{b}$ euklidovského prostoru a libovolné reálné číslo λ platí

1. $\|\bar{a}\| \geq 0$, $\|\bar{a}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$,
2. $\|\lambda \bar{a}\| = |\lambda| \, \|\bar{a}\|$,
3. $\|\bar{a}+\bar{b}\| \leq \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$.

Def.: Vzdáleností dvou prvků $\bar{a},\bar{b}$ euklidovského prostoru se nazývá číslo
$\rho(\bar{a},\bar{b}) = \|\bar{a}-\bar{b}\| = \sqrt{(\bar{a}-\bar{b},\bar{a}-\bar{b})}$.

Def.: Nechť E je euklidovský vektorový prostor a W jeho podmnožina. Pak ortogonálním doplňkem množiny W nazýváme množinu $W^{\perp} = \{\bar{a} \in E;$ pro všechny $\bar{b} \in W$ je $\bar{a} \perp \bar{b}\}$.

Věta: Nechť W, V jsou podmnožiny euklidovského prostoru E. Pak

1. $W^{\perp}$ je podprostor vektorového prostoru E,
2. je-li $W \subset V$, pak $V^{\perp} \subset W^{\perp}$,
3. součet dimenzí navzájem ortogonálních doplňků v n-rozměrném prostoru E je roven n.

Věta: Nechť W je podprostor euklidovského prostoru konečné dimenze. Pak existuje ortonormální báze podprostoru W.

Důkaz: Nechť $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k$ je báze podprostoru W. Indukcí lze dokázat, že existují nenulové ortogonální vektory $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k$, pro které platí

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1 &= \bar{a}_1 \\
\bar{b}_2 &= \bar{a}_2 + \lambda_{21}\bar{b}_1 \\
\bar{b}_3 &= \bar{a}_3 + \lambda_{32}\bar{b}_2 + \lambda_{31}\bar{b}_1 \\
&\ldots \\
\bar{b}_k &= \bar{a}_k + \lambda_{kk-1}\bar{b}_{k-1} + \ldots + \lambda_{k1}\bar{b}_1 .
\end{aligned}$$

Pro libovolné n vynásobíme rovnost $\bar{b}_n = \bar{a}_n + \lambda_{n1}\bar{b}_1 + \lambda_{n2}\bar{b}_2 + \ldots + \lambda_{nn-1}\bar{b}_{n-1}$ postupně vektory $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{n-1}$ a využijeme jejich ortogonalitu. Dostaneme pro každé $j = 1, \ldots, n-1$ postupně $(\bar{b}_n, \bar{b}_j) = (\bar{a}_n, \bar{b}_j) + \lambda_{nj}(\bar{b}_j, \bar{b}_j)$ a pravou část rovnosti položíme rovnu nule, protože chceme, aby vektory $\bar{b}_n, \bar{b}_j$ byly ortogonální. Tím dostaneme rovnici, z níž jednoznačně vyjádříme λ_{nj}. Takto nalezneme všechny koeficienty $\lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{n\,n-1}$, a tím i vektor $\bar{b}_n$.

Získané vektory $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k$ tvoří ortogonální bázi podprostoru W. Abychom dostali hledanou ortonormální bázi $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k$, stačí položit $\bar{c}_i = \dfrac{\bar{b}_i}{\|\bar{b}_i\|}$ pro $i = 1, \ldots, k$.

Poznámka: Předcházející důkaz je konstruktivní. Uvedený postup se nazývá Schmidtova ortogonalizační metoda. V každém n-rozměrném euklidovském vektorovém prostoru existuje mnoho ortonormálních bází. Ortogonalizační proces báze $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k$ lze začít od různých vektorů, čímž získáme různé ortonormální báze.

Věta: Nechť W je libovolný podprostor n-rozměrného euklidovského prostoru E. Potom libovolný vektor $\overline{c} \in E$ se dá napsat ve tvaru $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, kde $a \in W$, $b \in W^{\perp}$.

Vektor $\overline{a}$ se nazývá ortogonální projekcí vektoru $\overline{c}$ do podprostoru W.

Důkaz: 1. Je-li $\overline{c} \in W$, pak stačí položit $\overline{c} = \overline{c} + \overline{0}$, protože $\overline{0} \in W^{\perp}$.

2. Je-li $\overline{c} \notin W$ a vektory $\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_k$ tvoří ortonormální bázi podprostoru W, pak vektory $\overline{c}$, $\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_k$ jsou lineárně nezávislé a podle Schmidtovy ortogonalizační metody existují čísla $\lambda_{k+1\,1}, \ldots, \lambda_{k+1\,k}$ tak, že vektor $\overline{b} = \overline{c} + \lambda_{k+1\,1}\overline{c}_1 + \ldots + \lambda_{k+1\,k}\overline{c}_k$ je ortogonální na vektory $\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_k$, což znamená $\overline{b} \in W^{\perp}$. Tedy $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, kde $\overline{a} \in W$ a $\overline{b} \in W^{\perp}$.

Def.: Úhlem dvou nenulových prvků $\overline{a}, \overline{b}$ euklidovského prostoru nazýváme úhel φ, pro který $\cos\varphi = \dfrac{(\overline{a}, \overline{b})}{\|\overline{a}\|\|\overline{b}\|}$.

Def.: Dva nenulové prvky euklidovského prostoru nazýváme ortogonální, jestliže jejich skalární součin je roven nule. Jsou-li všechny prvky báze euklidovského prostoru po dvou ortogonální, hovoříme o ortogonální bázi. Jsou-li navíc všechny prvky báze jednotkové, hovoříme o ortonormální bázi.

Matice, determinanty, soustavy rovnic

Def: Nechť m, n jsou přirozená čísla. Zobrazení A kartézského součinu $\{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\}$ do množiny všech reálných čísel nazveme reálnou maticí typu (m, n).

Def.: Matici 0 nazýváme nulovou, má-li všechny prvky rovny nule. Čtvercovou matici $I = (a_{ij})$ stupně n nazýváme jednotkovou, jestliže všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny jedné, tzn. $a_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, a všechny ostatní prvky jsou rovny nule.

Def.: Matici A^T typu (n, m), která vznikne z matice A typu (m, n) záměnou řádků za sloupce (bez změny jejich pořadí) nazveme maticí transponovanou k matici A. Čtvercová matice A se nazývá symetrická, jestliže $A = A^T$.

Def.: Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou matice téhož typu (m, n). Součet $A + B$ těchto matic definujeme jako matici $C = (c_{ij})$ opět typu (m, n), pro kterou $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Věta: Pro libovolné matice A, B, C stejného typu platí

1. $A + B = B + A$ – komutativnost sčítání,
2. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ - asociativnost sčítání.

Def.: Součin reálného čísla k a matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) definujeme jako matici $B = (b_{ij})$ typu (m, n), pro jejíž všechny prvky platí $b_{ij} = ka_{ij}$.

Věta: Pro libovolné matice A, B stejného typu a reálná čísla k_1, k_2 platí

1. $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$,

2. $k_1 (A + B) = k_1 A + k_1 B$,
3. $k_1 (k_2 A) = (k_1 k_2) A$.

Def.: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, p) a $b = (b_{ij})$ je matice typu (p, n). Součinem AB těchto matic rozumíme matici $C = (c_{ij})$ typu (m, n) takovou, že $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Věta: Nechť A, B, C jsou takové matice, že existují dále uvedené součiny. Pak platí
1. $(AB)\,C = A\,(BC)$ – asociativnost násobení,
2. $(A + B)\,C = AC + BC$ – pravý distributivní zákon,
3. $C\,(A + B) = CA + CB$ - levý distributivní zákon.

Věta: Maticová rovnice $A + X = B$, kde A, B jsou matice stejného typu, má právě jedno řešení $X = B – A$, a dále platí $A + X = A \Leftrightarrow X = 0$.

Věta: Pro libovolnou čtvercovou matici A stupně n platí $AI = IA = A$, kde I je jednotková matice stupně n.

Def.: Je-li A čtvercová matice stupně n, pak definujeme $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^n = A^{n-1}A$ pro libovolné přirozené číslo n. Maticí A^n nazýváme n-tou mocninou matice A.

Def.: Čtvercovou matici nazveme nilpotentní, jestliže pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0$.

Def.: Přirozené číslo, udávající maximální počet lineárně nezávislých řádků (resp. sloupců) matice, nazýváme řádkovou (resp. sloupcovou) hodností matice.

Věta: Řádková a sloupcová hodnost libovolné matice se rovnají. Hovoříme tedy o hodnosti $h(A)$ matice A typu (m, n), pro kterou platí $h(A) \leq \min(m, n)$.

Věta: Hodnosti navzájem transponovaných matic jsou stejné.

Def.: Nechť A je čtvercová matice stupně n. Jestliže $h(A) = n$, říkáme, že matice A je regulární. Jestliže $h(A) \langle\ n$, říkáme, že matice A je singulární.

Def.: Matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) se nazývá trojúhelníková, když $m \leq n$ a pro $i = 1, \dots, m$ je $a_{ii} \neq 0$ a $a_{ij} = 0$ pro $j \langle\ i$.

Věta: Hodnost trojúhelníkové matice je rovna počtu jejích řádků.

Věta: Matice A a B mají stejnou hodnost, jestliže jedna ze druhé vznikne aspoň jednou z těchto úprav:
1. záměnou pořadí libovolných řádků,
2. vynecháním nebo přidáním nulového řádku,
3. vynecháním nebo přidáním řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků,
4. násobením libovolného řádku číslem různým od nuly,
5. přičtením k danému řádku lineární kombinace ostatních řádků.

Def.: Uvedené úpravy matic označujeme jako ekvivalentní a příslušné matice *A, B* nazýváme ekvivalentní. Píšeme $A \sim B$.

Def.: **Č**tvercovou matici A^{-1} nazýváme inverzní maticí k matici *A* stejného stupně, jestliže platí $A A^{-1} = A^{-1} A = I$.

Věta: Jestliže čtvercová matice je regulární, pak k ní existuje právě jedna inverzní matice. Jestliže je čtvercová matice singulární, inverzní matice k ní neexistuje.

Gaussova metoda inverze matice

Elementární úpravou ve čtvercové matici rozumíme

1. záměnu libovolných řádků,
2. vynásobení některého řádku nenulovým reálných číslem *k*,
3. přičtení *k*-násobku jistého řádku k jinému řádku.

Tyto elementární úpravy se dají vyjádřit jako součin původní matice a tzv. matice elementárních úprav, která vznikne z jednotkové matice

1. záměnou příslušných řádků,
2. vynásobením příslušného řádku nenulovým reálným číslem *k*,
3. přičtením *k*-násobku příslušného řádku k jinému řádku.

Věta: Jsou-li *A, B* regulární matice stejného stupně, pak jejich součin *AB* je opět regulární matice a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Věta: 1. Je-li *A* matice typu (*m, n*), *B* matice typu (*n, p*), pak $(AB)^T = B^T A^T$.
2. Jsou-li *A, B* matice stejného typu, pak $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. Je-li *A* regulární matice, pak $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Věta: Nechť *A* je regulární matice stupně *n* a *B* libovolná matice typu (*n, p*). Pak maticová rovnice $AX = B$ má právě jediné řešení $X = A^{-1}B$.

Věta: Nechť *A* je regulární matice stupně *n* a *B* libovolná matice typu (*m, n*). Pak maticová rovnice $XA = B$ má právě jedno řešení $X = BA^{-1}$.

Def.: Dvojice k_i, k_j se nazývá inverze v permutaci $(k) = k_1, k_2, \ldots, k_n$, jestliže $i \langle j$ a $k_i \rangle k_j$.

Def.: Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice stupně *n*. Reálné číslo

$$\det A = |A| = \sum_{(k)} (-1)^{\alpha} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace (*k*) čísel 1, 2, …, *n* a α je počet inverzí v permutaci (*k*), se nazývá determinant matice *A*. Vedoucím členem determinantu rozumíme součin $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ prvků na hlavní diagonále matice *A*.

Laplaceova věta o rozvoji determinantu: Nechť *A* je čtvercová matice stupně *n*. Pak pro každé *i* = 1, 2, …, *n* platí $\det A = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} M_{ir}$, kde M_{ir} je subdeterminant vzniklý z daného determinantu vynecháním *i*-tého řádku a *r*-tého sloupce.

Věta: Pro navzájem transponované čtvercové matice platí det A = det A^T.

Věta (o řadových úpravách determinantu):

(a) Násobíme-li libovolnou řadu determinantu číslem k, pak se číslem k násobí celý determinant.
(b) Vyměníme-li v determinantu dvě rovnoběžné řady, pak determinant změní znaménko.
(c) Přičteme-li k některé řadě determinantu libovolnou lineární kombinaci řad s ní rovnoběžných, pak se hodnota determinantu nezmění.

Důsledky:

1. Společný činitel jedné řady determinantu můžeme vytknout před determinant.
2. Jsou-li v determinantu dvě rovnoběžné řady stejné, pak je determinant roven nule.
3. Jsou-li rovnoběžné řady determinantu lineárně závislé, pak je determinant roven nule.
4. Je-li determinant různý od nuly, pak jsou jeho řady lineárně nezávislé a naopak.

Věta: Je-li čtvercová matice $A = (a_{ij})$ stupně n trojúhelníková, pak její determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále, tj. det $A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Věta: Čtvercová matice A je regulární, právě když její determinant je různý od nuly.

Důsledek: Matice je singulární, právě když je její determinant roven nule.

Věta: Nenulová matice A typu (m, n) má hodnost h, právě když z ní lze vybrat aspoň jeden nenulový determinant řádu h a všechny determinanty řádu většího než h vybrané z matice A jsou rovny nule.

Věta: Jestliže A a B jsou čtvercové matice stejného stupně, potom det AB = det A det B.

Věta: Je-li A regulární matice, pak det $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Věta: Je-li $A = (a_{ij})$ regulární matice stupně n, potom inverzní matice k matici A se dá zapsat ve tvaru

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & \dots\dots & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij}.

Definice: Soustavou m lineárních rovnic s n neznámými $x_1, \dots, x_n$ rozumíme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kde a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ a $b_1, \ldots, b_m$ jsou reálná čísla.

Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ se nazývá matice soustavy.

Matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | \, b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | \, b_2 \\ & \ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | \, b_m \end{pmatrix}$$ se nazývá rozšířená matice soustavy.

Věta: Je-li čtvercová matice A regulární, pak soustava lineárních rovnic $A\overline{x} = \overline{b}$ má právě jediné řešení $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$.

Frobeniova věta: Soustava lineárních rovnic má řešení, právě když je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Věta: Nechť soustava lineárních rovnic s n neznámými má řešení.

1. Jestliže $h(A) = n$, pak má soustava právě jedno řešení.
2. Jestliže $h(A) \langle\ n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení, přičemž za $n - h$ neznámých lze volit libovolná reálná čísla a ostatní neznámé jsou určeny jednoznačně.

Poznámka: Nechť má soustava lineárních rovnic nekonečně mnoho řešení. Vztah popisující pomocí parametrů všechna řešení soustavy, se nazývá obecné řešení soustavy. Dosadíme-li za volitelné neznámé konkrétní reálná čísla, dostáváme tzv. partikulární řešení soustavy. Partikulární řešení soustavy, ve kterém jsou volitelné neznámé rovny nule, se nazývá základní řešení soustavy.

Def.: Mají-li dvě soustavy lineárních rovnic o n neznámých tutéž množinu řešení, nazývají se ekvivalentní.

Gaussova eliminační metoda řešení soustavy lineárních rovnic:
Rozšířenou matici dané soustavy upravíme na trojúhelníkový tvar. Této trojúhelníkové matici přiřadíme soustavu, kterou řešíme odspodu.

Jordanova metoda řešení soustav lineárních rovnic (metoda úplné eliminace):

1. Rozšířenou matici soustavy převedeme na trojúhelníkový tvar.
2. V trojúhelníkové matici analogicky odspodu vynulujeme prvky nad hlavní diagonálou.
3. Na hlavní diagonále takto získané matice vytvoříme jedničky.
4. Výsledné matici přiřadíme soustavu.

Def.: Homogenní soustavou nazýváme soustavu lineárních rovnic, v níž všechna čísla na pravých stranách rovnic jsou nuly.

Věta: Homogenní soustava lineárních rovnic s *n* neznámými má vždy řešení.
Je-li $h(A) = n$, pak má jediné řešení $\overline{x} = (0, \ldots, 0)$.
Je-li $h(A) \langle\ n$, pak má nekonečně mnoho řešení, přičemž za $n - h(A)$ neznámých lze volit libovolná reálná čísla a ostatní neznámé jsou určeny jednoznačně.

Věta: Obecné řešení homogenní soustavy lineárních rovnic je lineární prostor dimenze $n - h$, kde n je počet neznámých a h hodnost matice soustavy.

Věta: Nechť nehomogenní soustava lineárních rovnic má řešení. Pak obecné řešení nehomogenní soustavy je rovno součtu libovolného partikulárního řešení nehomogenní soustavy a obecného řešení odpovídající homogenní soustavy.

Věta (Cramerovo pravidlo): Jestliže matice A soustavy n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \ldots, x_n$ je regulární, pak má tato soustava právě jedno řešení, které se dá zapsat ve tvaru $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, kde A_j je matice, která vznikne z matice A náhradou j-tého sloupce sloupcem pravých stran rovnic soustavy.

Analytická geometrie, algebraické rovnice

Def.: Vektorovým součinem vektorů $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ nazýváme vektor $\overline{u} \times \overline{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

Věta: Pro vektory $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ ortonormální báze platí $\overline{i} \times \overline{i} = \overline{j} \times \overline{j} = \overline{k} \times \overline{k} = \overline{0}$, $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$, $\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$, $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$.

Věta: Nechť $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ jsou vektory v bázi $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Pak platí
1. $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$, právě když $\overline{u}, \overline{v}$ jsou kolineární vektory,
2. $\overline{u} \times \overline{v} = -(\overline{v} \times \overline{u})$, vektorový součin je antikomutativní,
3. $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}$,
4. $\alpha(\overline{u} \times \overline{v}) = \alpha\, \overline{u} \times \overline{v} = u \times \alpha\, \overline{v}$ pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$.

Věta: Nechť $\overline{u}, \overline{v}$ jsou nenulové nekolineární vektory. Pak platí:
1. Vektorový součin $\overline{u} \times \overline{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\overline{u}, \overline{v}$.
2. $|\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}|\ |\overline{v}| \sin\varphi$, kde φ je úhel vektorů $\overline{u}, \overline{v}$.
3. Soustava vektorů $\overline{u}, \overline{v}$, $\overline{u} \times \overline{v}$ je v tomto pořadí pravotočivá.

Def.: Smíšeným součinem vektorů $\overline{u}, \overline{v}$, $\overline{w}$ nazýváme číslo $\overline{u}.(\overline{v} \times \overline{w})$.

Věta: Pro smíšený součin vektorů $\overline{u}, \overline{v}$, $\overline{w}$ platí

1. $\overline{u}.(\overline{v} \times \overline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_1 & w_3 \end{vmatrix}$, kde $\overline{u} = u_1 \overline{i} + u_2 \overline{j} + u_3 \overline{k}$, $\overline{v} = v_1 \overline{i} + v_2 \overline{j} + v_3 \overline{k}$,

$\overline{w} = w_1 \overline{i} + w_2 \overline{j} + w_3 \overline{k}$,

2. $\overline{u}.(\overline{v} \times \overline{w}) = \overline{v}.(\overline{w} \times \overline{u}) = \overline{w}.(\overline{u} \times \overline{v})$.
3. je nezáporný, právě když následují vektory $\overline{u}, \overline{v}$, $\overline{w}$ v kladné orientaci,
4. nejsou-li vektory komplanární, je absolutní hodnota jejich smíšeného součinu rovna objemu rovnoběžnostěnu sestrojenému z těchto vektorů,
5. jsou-li vektory komplanární, je smíšený součin roven nule.

Def.: Normála je každá kolmá přímka k příslušné rovině. Normálový vektor je ten, který lze umístit do libovolné normály dané roviny.

Rozbor obecné rovnice roviny:

1. Je-li $d = 0$, rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.
2. Je-li $a = 0$, rovina je rovnoběžná s osou x, obdobně pro $b = 0$ nebo $c = 0$.
3. Je-li $a = b = 0$, rovina je rovnoběžná se souřadnou rovinou xy o rovnici z = konst., obdobně $a = c = 0$, resp. $b = c = 0$.
4. Rovnice $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ vyjadřují postupně souřadné roviny xy, xz, yz.

Věta: Rovnice roviny určené třemi nekolineárními body
$A = [x_1, y_1, z_1]$, $B = [x_2, y_2, z_2]$, $C = [x_3, y_3, z_3]$ má tvar

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Poznámka: Parametrická rovnice roviny určené třemi body je
$X = A + t\overline{u_2} + s\overline{u_3}$ nebo rozepsané do složek

$x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1)$
$y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) + s(y_3 - y_1)$
$z = z_1 + t\,(z_2 - z_1) + s(z_3 - z_1)$, $t, s \in \mathbf{R}$.

Věta: Vzdálenost v bodu $A = [x_1, y_1, z_1]$ od roviny $ax + by + cz + d = 0$ je

$$v = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Věta: Odchylkou dvou rovin o rovnicích $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ je ostrý nebo pravý úhel φ jejich normálových vektorů $\overline{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overline{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$,

tzn. $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overline{n_1}.\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|.\left|\overline{n_2}\right|}$.

Def.: Svazkem rovin nazýváme množinu všech rovin procházejících pevnou přímkou (osou svazku) nebo množinu všech navzájem rovnoběžných rovin.

Věta: Rovnici svazku rovin, který je určen rovinami o rovnicích
$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ lze zapsat ve tvaru
$\alpha\,(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$, kde α, β jsou libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

Poznámka: Uvažujme tři roviny o rovnicích

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= -d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= -d_3. \end{aligned}$$

1. Je-li $h(A) = h(A_r) = 3$, roviny mají právě jediný společný bod.
2. Je-li $h(A) = h(A_r) = 2$, roviny patří témuž svazku.
3. Je-li $h(A) = h(A_r) = 1$, všechny tři roviny jsou totožné.
4. Je-li $h(A) = 2$, $h(A_r) = 3$, roviny se protínají ve vzájemně rovnoběžných průsečnicích.
5. Je-li $h(A) = 1$, $h(A_r) = 3$, jde o tři různé navzájem rovnoběžné roviny.
6. Je-li $h(A) = 1$, $h(A_r) = 2$, roviny jsou rovnoběžné, ale dvě z nich splývají.

Věta: Pro ostrý nebo pravý úhel φ dvou přímek se směrovými vektory $\overline{s}$ a $\overline{p}$ platí vztah

$\cos\varphi = \dfrac{\left|\overline{s}.\overline{p}\right|}{\left|\overline{s}\right|.\left|\overline{p}\right|}$.

Věta: Pro odchylku φ přímky se směrovým vektorem $\overline{s}$ a roviny s normálovým vektorem $\overline{n}$ platí $\sin\varphi = \dfrac{\left|\overline{s}.\overline{n}\right|}{\left|\overline{s}\right|.\left|\overline{n}\right|}$.

Poznámka: Vzdálenost bodu A od přímky p určíme jako vzdálenost bodu A od jeho pravoúhlého průmětu A_1 na přímku. Pravoúhlý průmět A_1 určíme jako průsečík přímky p s rovinou kolmou k přímce p jdoucí bodem A.

Def.: Jestliže $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou libovolná reálná, popř. komplexní čísla a n je nezáporné celé číslo, pak výraz $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, nazýváme (reálným, popř. komplexním) polynomem proměnné x stupně n. Rovnici $P(x) = 0$ nazýváme algebraickou rovnicí stupně n.

Def.: Kořenem neboli řešením algebraické rovnice $P(x) = 0$ rozumíme každé číslo c, které této rovnici vyhovuje, tzn. $P(c) = 0$. Lineární dvojčlen $x - c$ nazýváme kořenový činitel (faktor) algebraické rovnice.

Základní věta algebry: Každá algebraická rovnice stupně $n \geq 1$ má aspoň jeden komplexní kořen.

Def.: Číslo c se nazývá k-násobný kořen algebraické rovnice $P(x) = 0$, právě když pro každé komplexní číslo x platí $P(x) = (x - c)^k Q(x)$, kde $Q(c) \neq 0$.

Věta: Algebraická rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ má v tělese komplexních čísel právě n kořenů $c_1, \ldots, c_n$ a platí $P(x) = a_n (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$.

Def.: Reálná čísla, která jsou kořeny algebraických rovnic $P(x) = 0$, kde $P(x)$ je libovolný polynom s celočíselnými koeficienty se nazývají algebraická. Ostatní reálná čísla se nazývají transcendentní.

Věta: Má-li algebraická rovnice $P(x) = 0$ s reálnými koeficienty imaginární kořen $c = u + \mathrm{i}v$, pak má také komplexně sdružený kořen $\bar{c} = u - \mathrm{i}v$.

Věta: Mezi koeficienty normované algebraické rovnice $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ a jejími kořeny $c_1, \ldots, c_n$ platí tzv. Vietovy vztahy (symetrické funkce kořenů)

$$a_{n-1} = -(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = -\sum_{k=1}^{n} c_k,$$

$$a_{n-2} = c_1c_2 + \ldots + c_1c_n + c_2c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n = \sum_{i<k} c_i c_k,$$

$$a_{n-3} = c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 \ldots + c_{n-2}c_{n-1}c_n = -\sum_{i<j<k} c_i c_j c_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0 = (-1)^n c_1 c_2 \ldots c_n.$$

Def.: Binomickou rovnicí nazýváme rovnici $x^n - a = 0$, kde a je libovolné komplexní číslo.

Věta: Binomická rovnice $x^n - a = 0$, $a \neq 0$, má v množině komplexních čísel n různých kořenů

$$c_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),\quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Poznámka: 1. Každé komplexní číslo a různé od nuly má v množině komplexních čísel n od sebe různých n-tých odmocnin, tzn. komplexních čísel c takových, že $c^n = a$.
2. Řešit binomickou rovnici $x^n - a = 0$, znamená najít všechny n-té odmocniny z a.
3. Body představující obrazy kořenů binomické rovnice $x^n - a = 0$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka.

Věta: Normovaná kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ má v C dva kořeny

$x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, pro které platí Viètovy vztahy $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

Poznámka: Kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s komplexními koeficienty jsou komplexní čísla $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, kde $\sqrt{b^2 - 4ac}$ je jedna ze dvou druhých odmocnin čísla $b^2 - 4ac$.

Poznámka: Pro kořeny rovnice $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ platí Viètovy vzorce

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_2$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_1$$
$$x_1x_2x_3 = -a_0$$

Def.: Trinomickou rovnicí nazýváme rovnici $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ pro $a \neq 0$.

Věta: Substitucí $x^n = y$ převádíme řešení trinomické rovnice na řešení kvadratické rovnice a dvou rovnic binomických.

Def.: Algebraickou rovnici $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, pro jejíž koeficienty a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, platí vztah

a) $a_k = a_{n-k}$ nazýváme kladně reciprokou,

b) $a_k = -a_{n-k}$ nazýváme záporně reciprokou.

Věta: Každá reciproká rovnice má s kořenem c i kořen $\dfrac{1}{c}$.

Věta: Každá kladně reciproká rovnice lichého stupně a každá záporně reciproká rovnice sudého stupně má kořen –1. Každá záporně reciproká rovnice má kořen +1.

Důsledek: Po případném vytknutí kořenových činitelů $x - 1$ a $x + 1$ lze každou reciprokou rovnici převést na kladně reciprokou rovnici sudého stupně.

Věta: Zavedeme-li do kladně reciproké rovnice $P(x) = 0$ sudého stupně $2k$ novou neznámou vztahem $y = x + \dfrac{1}{x}$ přejde na rovnici $Q(y) = 0$ stupně k.

Def.: Nechť $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n}$ a $\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}$ jsou dvě báze vektorového prostoru V. Nechť $P = (p_{ij})$ je taková čtvercová matice stupně n, že pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $b_i = p_{i1}\overline{a_1} + p_{i2}\overline{a_2} + \ldots + p_{in}\overline{a_n}$. Pak P se nazývá matice přechodu od báze $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n}$ k bázi $\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}$.

Věta: Nechť P je matice přechodu od báze $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n}$ k bázi $\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}$ v prostoru V. Pro libovolný vektor $\overline{a} \in V$ platí $\overline{x}' = \overline{x}P^{-1}$, kde $\overline{x}$ je vektor původních a $\overline{x}'$ vektor nových souřadnic vektoru $\overline{a}$.

Požadavky na studenta

1. Podmínky pro udělení zápočtu:
Aktivní účast na cvičeních. Povoleny jsou maximálně dvě nezdůvodněné absence.
Úspěšné absolvování kontrolního testu, tzn. alespoň 40-ti procentní úspěšnost.
Předpokládaný termín testu je 11. výukový týden. V případě neúspěchu je možná pouze jedna oprava.

2. Informace o zkoušce:
Zkouška je písemná a písemný test zkoušky obsahuje 5 výpočtových příkladů a zpravidla 5-10 úkolů teoretické povahy z probrané látky (osnova předmětu ve STAGu).

Hodnocení písemné zkoušky (maximální zisk 100 bodů):
90-100 bodů - výborně
80- 89 bodů - výborně minus
70- 79 bodů - velmi dobře
60- 69 bodů - velmi dobře minus
50- 59 bodů - dobře
0- 49 bodů - nevyhovující

Obsah