

Řešení příkladů ze dne 9.12. 2002

Zadání A.

1. Najděte všechna řešení maticové rovnice $\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X} = \mathbf{C}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X} &= \mathbf{C} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} &= \mathbf{C} \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{C} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Spočítejte determinant matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{-1}$, jestliže $a \in \mathbb{R}$ a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & a-3 & -2 \\ a & -3+2a & 2a-3 & -2+a \\ 3+a & 5+2a & 2+a & 2+a \end{pmatrix}$$

Řešení:

Matici nejprve upravíme, např. takto: Od druhého sloupce odečteme dvojnásobek 1. sloupce, od 3. a od 4. sloupce odečteme 1. sloupec. Při těchto úpravách se determinant nezmění. Potom uděláme rozvoj podle 1. řádku. Ve čtvercové matici řádu 3 pak můžeme ještě od 1. a od 2. sloupce odečíst sloupec 3. a udělat rozvoj podle 3. řádku.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & a-3 & -2 \\ a & -3+2a & 2a-3 & -2+a \\ 3+a & 5+2a & 2+a & 2+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & a-4 & -3 \\ a & -3 & a-3 & -2 \\ 3+a & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} -5 & a-4 & -3 \\ -3 & a-3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & a-1 & -3 \\ -1 & a-1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2a+2+a-1) = a-1 \end{aligned}$$

Tedy $\det \mathbf{A} = a-1$. Podle Laplaceovy věty platí $\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{E} = 1$, takže pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ je $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a-1}$.

3. Najděte uspořádanou bázi prostoru $\mathbb{R}^2$, vzhledem k níž má vektor $\vec{u}$ souřadnice $(1, 1)$ a vektor $\vec{v}$ souřadnice $(1, -1)$, víte-li, že vektor $\vec{u}$ má v bázi $\mathbf{B} = ((1, 1), (1, 0))$ souřadnice $(4, -2)$ a vektor $\vec{v}$ má v bázi $\mathbf{B}$ souřadnice $(2, 2)$.

Řešení: Neznámá báze je ve tvaru $\mathbf{E} = ((a, b), (c, d))$. Souřadnice vektoru vzhledem k bázi jsou koeficienty lin. kombinace bázeckých vektorů, která je rovna tomuto vektoru. Platí tedy:

$$\vec{u} = 4(1, 1) - 2(1, 0) = (2, 4) = 1(a, b) + 1(c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\vec{v} = 2(1, 1) + 2(1, 0) = (4, 2) = 1(a, b) - 1(c, d) = (a - c, b - d)$$

Aritmetické vektory se sobě rovnají, rovnají-li se jejich složky, tedy

$$a + c = 2$$

$$a - c = 4$$

$$b + d = 4, \text{ což je soustava, jejímž řešením je } a = 3, c = -1, b = 3, d = 1.$$

$$b - d = 2$$

Hledaná uspořádaná báze je tedy $\mathbf{E} = ((3, 3), (-1, 1))$.

4. Označme $\mathcal{M}_{2,2}$ lineární prostor všech čtvercových matic řádu 2. Nechť $A : \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ je lineární zobrazení, pro které platí

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d & -a+c+d \\ a+2b+c-d & a+b+2c-d \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je zobrazení A prosté.

Řešení: Zobrazení je prosté právě tehdy, když jeho jádro obsahuje pouze nulový vektor. Jádro je množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor. Do jádra zobrazení A tedy patří ty matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pro které platí

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 0 \\ -a+c+d &= 0 \\ a+2b+c-d &= 0 \\ a+b+2c-d &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Soustava má jediné řešení, $a = b = c = d = 0$, jádro obsahuje pouze nulovou matici a zobrazení tedy je prosté.

5. Definujte kořen polynomu, najděte reálný polynom co nejnižšího stupně, jehož kořeny jsou $i, i+1$.
Řešení:

Kořen polynomu $P(x)$ je takové reálné číslo a , pro které platí $P(a) = 0$.

Je-li kořenem polynomu s reálnými koeficienty číslo $a+bi, b \neq 0$, pak je kořenem také číslo $a-bi$.

Hledaným polynomem je např. polynom $P(x) = (x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.

Zadání C.

1. Najděte všechna řešení maticové rovnice $\mathbf{XA} - \mathbf{X} = \mathbf{C}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \mathbf{XA} - \mathbf{X} &= \mathbf{C} \\ \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) &= \mathbf{C} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Spočítejte determinant matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{-1}$, jestliže $p \in \mathbb{R}$ a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3p-2 & -2p-4 & 2p & 2p \\ 5 & p-4 & 4 & 3 \\ 2p+6 & p-5 & p+5 & p+4 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Matici nejprve upravíme, např. takto: K druhému sloupci přičteme dvojnásobek 1. sloupce, od 3. a od 4. sloupce odečteme 1. sloupec. Při těchto úpravách se determinant nezmění. Potom uděláme rozvoj podle 1. řádku. Ve čtvercové matici řádu 3 pak můžeme ještě k 1. sloupci přičíst čtyřnásobek 3. sloupce a od 2. sloupce odečíst sloupec 3. a udělat rozvoj podle 1. řádku.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3p-2 & -2p-4 & 2p & 2p \\ 5 & p-4 & 4 & 3 \\ 2p+6 & p-5 & p+5 & p+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3p-2 & 4p-8 & -p+2 & -p+2 \\ 5 & p+6 & -1 & -2 \\ 2p+6 & 5p+7 & -p-1 & -p-2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 4p-8 & -p+2 & -p+2 \\ p+6 & -1 & -2 \\ 5p+7 & -p-1 & -p-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p+2 \\ p-2 & 1 & -2 \\ p-1 & 1 & -p-2 \end{vmatrix} = (-p+2)(p-2-p+1) = p-2 \end{aligned}$$

Tedy $\det \mathbf{A} = p-2$. Podle Laplaceovy věty platí $\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{E} = 1$, takže pro $p \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ je $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{p-2}$.

3. Najděte uspořádanou bázi prostoru $\mathbb{R}^2$, vzhledem k níž má vektor $\vec{u}$ souřadnice $(1, 1)$ a vektor $\vec{v}$ souřadnice $(-1, 1)$, víte-li, že vektor $\vec{u}$ má v bázi $\mathbf{B} = ((1, 2), (-1, 2))$ souřadnice $(1, 2)$ a vektor $\vec{v}$ má v bázi $\mathbf{B}$ souřadnice $(2, -1)$.

Řešení: Neznámá báze je ve tvaru $\mathbf{E} = ((a, b), (c, d))$. Souřadnice vektoru vzhledem k bázi jsou koeficienty lin. kombinace bázeckých vektorů, která je rovna tomuto vektoru. Platí tedy:

$$\vec{u} = 1(1, 2) + 2(-1, 2) = (-1, 6) = 1(a, b) + 1(c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\vec{v} = 2(1, 2) - 1(-1, 2) = (3, 2) = -1(a, b) + 1(c, d) = (-a + c, -b + d)$$

Aritmetické vektory se sobě rovnají, rovnají-li se jejich složky, tedy

$$\begin{aligned} a + c &= -1 \\ -a + c &= 3 \\ b + d &= 6 \\ -b + d &= 2 \end{aligned}, \text{ což je soustava, jejímž řešením je } a = -2, c = 1, b = 2, d = 4.$$

Hledaná uspořádaná báze je tedy $\mathbf{E} = ((-2, 2), (1, 4))$.

4. Označme $\mathcal{M}_{2,2}$ lineární prostor všech čtvercových matic řádu 2. Nechť $A : \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ je lineární zobrazení, pro které platí

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b - c + d & a + b + 2c - d \\ 2a + 2b + c + 3d & -a - b + c - d \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je zobrazení A prosté.

Řešení: Zobrazení je prosté právě tehdy, když jeho jádro obsahuje pouze nulový vektor. Jádro je množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor. Do jádra zobrazení A tedy patří ty matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pro které platí

$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ a + b + 2c - d &= 0 \\ 2a + 2b + c + 3d &= 0 \\ -a - b + c - d &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soustava má jediné řešení, $a = b = c = d = 0$, jádro obsahuje pouze nulovou matici a zobrazení tedy je prosté.

5. Definujte lineární podprostor, ukažte, že množina všech matic komutujících s čtvercovou maticí $\mathbf{A}$ řádu n tvoří lin. podprostor prostoru všech čtvercových matic řádu n .

Řešení: Nechť L je lineární prostor. Neprázdnou podmnožinu $V \subseteq L$ nazveme lineárním podprostorem lin. prostoru L , jestliže

- (a) pro všechny vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ platí $\vec{u} + \vec{v} \in V$
- (b) pro všechny vektory $\vec{u} \in V$ pro všechna reálná čísla λ platí $\lambda \cdot \vec{u} \in V$

Množina matic komutujících s danou maticí je jistě neprázdná, neboť obsahuje např. jednotkovou matici. Ověříme tedy obě podmínky:

- (a) Nechť matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ komutují s $\mathbf{A}$, platí tedy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ a také $\mathbf{AC} = \mathbf{CA}$.
Potom $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA} = (\mathbf{B} + \mathbf{A})\mathbf{C}$
- (b) Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ a matice $\mathbf{B}$ komutuje s $\mathbf{A}$. Potom $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{AB}) = \lambda(\mathbf{BA}) = (\lambda\mathbf{B})\mathbf{A}$.

Zadání B.

1. Najděte všechna řešení maticové rovnice $\mathbf{XA} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{XA} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ existuje k matici $\mathbf{A}$ inverzní matice?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3a & -a+2 & 4a-2 & 2a-1 \\ 4+a & a & 5 & 2 \\ 3+2a & 2a & a+5 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Inverzní matice existuje pouze k regulární matici, tedy k matici, jejíž determinant je nenulový. Spočítáme $\det \mathbf{A}$. Matici nejprve upravíme, např. takto: K druhému sloupci přičteme 1. sloupec, od 3. sloupce odečteme dvojnásobek 1. sloupce a od 4. sloupce odečteme 1. sloupec. Při těchto úpravách se determinant nezmění. Potom uděláme rozvoj podle 1. řádku. Ve čtvercové matici řádu 3 pak můžeme ještě k 1. sloupci přičíst dvojnásobek 3. sloupce a od 2. sloupce odečíst dvojnásobek 3. sloupce a udělat rozvoj podle 1. řádku.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3a & -a+2 & 4a-2 & 2a-1 \\ 4+a & a & 5 & 2 \\ 3+2a & 2a & a+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3a & 2a+2 & -2a-2 & -a-1 \\ a+4 & 2a+4 & -2a-3 & -a-2 \\ 2a+3 & 4a+3 & -3a-1 & -2a-1 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 2a+2 & -2a-2 & -a-1 \\ 2a+4 & -2a-3 & -a-2 \\ 4a+3 & -3a-1 & -2a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 1 & -a-2 \\ 1 & a+1 & -2a-1 \end{vmatrix} = (-a-1)(-1) = a+1$$

Tedy $\det \mathbf{A} = a+1$, a inverzní matice existuje pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3. Polynom $P(x)$ má v uspořádané bázi $(x^2 - x - 1, 2x^2 + x + 1, x^2 - x + 2)$ souřadnice $(-1, 1, 1)$. Najděte jeho souřadnice vzhledem k uspořádané bázi $(x^2 - 1, x^2 + x - 1, x^2 + x)$.

Řešení: Nejprve si spočítáme polynom $P(x)$, potom si ho vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $x^2 - 1, x^2 + x - 1, x^2 + x$. Vektor koeficientů této lineární kombinace je vektor souřadnic polynomu $P(x)$ vzhledem k uspořádané bázi $(x^2 - 1, x^2 + x - 1, x^2 + x)$.

$$P(x) = -1(x^2 - x - 1) + 1(2x^2 + x + 1) + 1(x^2 - x + 2) = 2x^2 + x + 4 = a(x^2 - 1) + b(x^2 + x - 1) + c(x^2 + x) = (a + b + c)x^2 + (b + c)x + (-a - b)$$

Rovnájí-li se dva polynomy, rovnají se jejich koeficienty u odpovídajících mocnin, tedy

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ b + c &= 1 \\ -a - b &= 4 \end{aligned}$$

Tato soustava má jediné řešení a to $a = 1, b = -5, c = 6$. Souřadnice polynomu $P(x)$ vzhledem k bázi $(x^2 - 1, x^2 + x - 1, x^2 + x)$ jsou $(1, -5, 6)$.

4. Označme $\mathcal{M}_{2,2}$ lineární prostor všech čtvercových matic řádu 2. Nechť $A : \mathcal{M}_{2,2} \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ je lineární zobrazení, pro které platí

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + 2c + d & -a + 2b - c \\ 2a + c + d & 2b - 3c + d \end{pmatrix}.$$

Spočtěte defekt zobrazení A .

Řešení: Defekt zobrazení je dimenze jeho jádra. Jádro je množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor. Do jádra zobrazení A tedy patří ty matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pro které platí

$$\begin{aligned} a - b + 2c + d &= 0 \\ -a + 2b - c &= 0 \\ 2a + c + d &= 0 \\ 2b - 3c + d &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soustava má jediné řešení, $a = b = c = d = 0$, jádro obsahuje pouze nulovou matici a $\text{def}(A) = \dim(\text{Ker} A) = 0$.

5. Definujte lineární nezávislost vektorů. Nechť vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou lineárně nezávislé. Jsou potom lineárně nezávislé také vektory $\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$? Zdůvodněte.

Řešení: Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ jsou lineárně nezávislé, jestliže existuje jediná jejich nulová lineární kombinace a to triviální, tj. pokud $\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{0}$, potom $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Uvažujme nulovou lineární kombinaci vektorů $\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$?

$$\alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 (\vec{u} + \vec{v}) + \alpha_3 (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}$$

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \vec{u} + (\alpha_2 + \alpha_3) \vec{v} + (\alpha_3 \vec{w}) = \vec{0}$ je nulová lineární kombinace vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Ta musí být triviální, protože tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Platí tedy

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má jediné řešení a to $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, vektory jsou tedy také lineárně nezávislé.

Zadání D.

1. Najděte všechna řešení maticové rovnice $\mathbf{AX} - \mathbf{BX} = \mathbf{C}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{AX} - \mathbf{BX} = \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ existuje k matici $\mathbf{A}$ inverzní matice?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2p+8 & 4p-2 & -p+1 \\ 2p-2 & 2p-3 & p & p-1 \\ 3 & -p+4 & p-3 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Inverzní matice existuje pouze k regulární matici, tedy k matici, jejíž determinant je nenulový. Spočítáme tedy $\det \mathbf{A}$. Matici nejprve upravíme, např. takto: Od 1. sloupce a od 2. sloupce odečteme dvojnásobek 4. sloupce a od 3. sloupce odečteme 4. sloupec. Při těchto úpravách se determinant nezmění. Potom uděláme rozvoj podle 1. řádku. Ve čtvercové matici řádu 3 pak můžeme ještě k 2. sloupci přičíst 3. sloupec a udělat rozvoj podle 2. řádku.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2p+8 & 4p-2 & -p+1 \\ 2p-2 & 2p-3 & p & p-1 \\ 3 & -p+4 & p-3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2p+2 & 6 & 5p-3 & -p+1 \\ 0 & -1 & 1 & p-1 \\ -3 & -p-2 & p-6 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -1 \begin{vmatrix} 2p+2 & 6 & 5p-3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -p-2 & p-6 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2p+2 & 5p+3 & 5p-3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -8 & p-6 \end{vmatrix} = -1(-1)(-16p-16+15p+9) = -p-7$$

Tedy $\det \mathbf{A} = -p-7$, a inverzní matice existuje pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

3. Polynom $P(x)$ má v uspořádané bázi $(x^2+x-1, 2x^2-x-1, x^2+x+2)$ souřadnice $(1, 1, -1)$. Najděte jeho souřadnice vzhledem k uspořádané bázi (x^2+1, x^2-x-1, x^2-x) .

Řešení: Nejprve si spočítáme polynom $P(x)$, potom si ho vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů x^2+1, x^2-x-1, x^2-x . Vektor koeficientů této lineární kombinace je vektor souřadnic polynomu $P(x)$ vzhledem k uspořádané bázi (x^2+1, x^2-x-1, x^2-x) .

$$P(x) = 1(x^2+x-1) + 1(2x^2-x-1) - 1(x^2+x+2) = 2x^2-x-4 = a(x^2+1) + b(x^2-x-1) + c(x^2-x) = (a+b+c)x^2 + (-b-c)x + (a-b)$$

Rovná-li se dva polynomy, rovnají se jejich koeficienty u odpovídajících mocnin, tedy

$$\begin{array}{rrrrrr} a & + & b & + & c & = & 2 \\ & & -b & - & c & = & -1 \\ a & - & b & & & = & -4 \end{array}$$

Tato soustava má jediné řešení a to $a=1, b=5, c=-4$. Souřadnice polynomu $P(x)$ vzhledem k bázi (x^2+1, x^2-x-1, x^2-x) jsou $(1, 5, -4)$.

4. Označme $\mathcal{M}_{2,2}$ lineární prostor všech čtvercových matic řádu 2. Nechť $A: \mathcal{M}_{2,2} \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ je lineární zobrazení, pro které platí

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d & -a+c+2d \\ 2a+b+c+2d & -2a-b+c \end{pmatrix}.$$

Spočtěte defekt zobrazení A .

Řešení: Defekt zobrazení je dimenze jeho jádra. Jádro je množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor. Do jádra zobrazení A tedy patří ty matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pro které platí

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ -a + c + 2d &= 0 \\ 2a + b + c + 2d &= 0 \\ -2a - b + c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Soustava má jediné řešení, $a = b = c = d = 0$, jádro obsahuje pouze nulovou matici a $\text{def}(A) = \dim(\text{Ker}A) = 0$.

5. Definujte inverzní matici k matici $\mathbf{A}$. Dokažte, že pokud existuje inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak je určena jednoznačně.

Řešení: Necht $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n . Inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$ nazveme čtvercovou matici $\mathbf{X}$ řádu n , pro kterou platí $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{E}$.

Nechť tuto podmínku splňují matice $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, tj. platí $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{E}$ a také $\mathbf{AY} = \mathbf{YA} = \mathbf{E}$. Potom

$$\mathbf{X} = \mathbf{XE} = \mathbf{X}(\mathbf{AY}) = (\mathbf{XA})\mathbf{Y} = \mathbf{EY} = \mathbf{Y}.$$

Matice $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou si tedy rovny.