FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080225-5-(1)

1	2	3	4	5		Σ 1-5	Σ 6-10		Σ 1-10

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1. Zapište disjunkci výroků p, q a uveďte podle definice, jaký je význam této disjunkce.

• ____

– Uveďte slovně, kdy je
disjunkce výroků p, q
pravdivá a kdy nepravdivá.______________________________

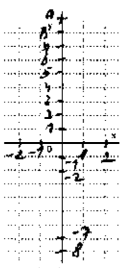
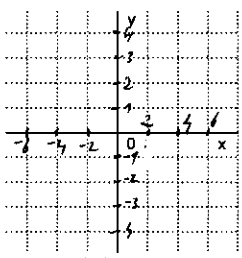
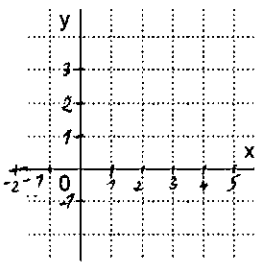
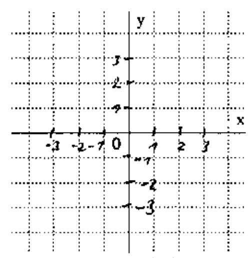
– Číslo zapsané binárně vyjádřete hexadecimálně : $1010\ 0101{,}1111\ 0010_B$ =

– Vyjádřete dekadické číslo 118,0125 v binární číselné soustavě alespoň na 8 míst za ř. čárkou a určete periodu :

a) $118_D =$ b) $0{,}0125_D =$ c) $118{,}0125_D =$

2. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují na jejich maximálním definičním oboru.

a) $f_1 : y = x^3 + 1$; b) $f_2 : y = 3 - x^2$; c) $f_3 : y = \sqrt{x-2}$; d) $f_4 : y = \dfrac{3}{x}$.

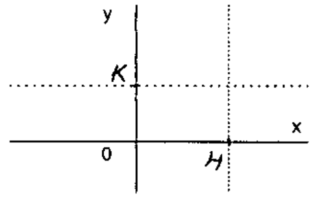
$f_1'(x) =$ $f_2'(x) =$ $f_3'(x) =$ $f_4'(x) =$

f_1^{-1} : f_2^{-1} : f_3^{-1} : f_4^{-1} :

3. a) Zapište limitu funkce $f(x)$, která je podle definice dána výrokem

$\boxed{(\forall K \in R)(\exists H \in R)(\forall x \in (H ; +\infty))(f(x) > K)}$ *Odpověď :*

b) Načrtněte graf funkce $f(x)$, která má uvedenou limitu a je v $\langle\, 0; +\infty)$ konvexní :



c) Vypočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - 5.x)}{5.x - \sin x} =$$

d) Vypočtěte $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(3.x+1)^2}{(\sqrt{2.x}-1).(\sqrt{2.x}+1).x} =$

e) Vypočtěte $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}} =$

4. a) Uveďte postačující podmínku proto, aby funkce $f(x)$ byla klesající na intervalu $(b; d)$.

Odpověď: Postačující podmínkou je

b) Uveďte postačující podmínku ryzí konvexnosti funkce $f(x)$ v bodě c.

Odpověď: Postačující podmínkou je

c) Funkce $f(x) = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}$. Určete první derivaci $f'(x) =$

d) Určete pomocí první derivace, zdali je funkce $f(x)$ na intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí nebo klesající.

e) Určete druhou derivaci funkce $f(x) = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}$. *Tj.:* $f''(x) =$

f) Určete pomocí druhé derivace v bodě $c = 0$, zdali je funkce $f(x)$ v bodě $c = 0$ konvexní nebo konkávní. $f''(0) =$

5. a) Zapište, jak se značí čtvrtá derivace funkce $f(x)$ na intervalu J a napište, jak je definována.

b) Zapište, jak se značí n-tá derivace funkce $f(x)$ na intervalu J a napište, jak je definována.

c) Zapište, jak se značí nultá derivace funkce $f(x)$ na intervalu J a napište, čemu je rovna.

d) *Za překladu, že* 1) Funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a; b \rangle$; 2) Funkce $f(x)$ je třídy C^n na intervalu $\langle a; b \rangle$, kde $n \in N_0$; d) V každém bodě intervalu $(a; b)$ existuje $(n+1)$-ní derivace funkce $f(x)$; e) Body c, x jsou dva různé body intervalu $\langle a; b \rangle$. *Doplňte tvrzení Taylorovy věty:*

e) Zapište obecně pro funkci $f(x)$ a bod c Taylorův polynom 4-tého stupně, tj. $T_3(x) =$

f) Je dána funkce $f(x) = 5 + \ln(2.x - 1)$. Vypočítejte všechny derivace funkce $f(x) = 5 + \ln(2.x - 1)$ od nulté do třetí, vyčíslete je v bodě $c = 1$. *Tedy:* $f^{(0)}(x) =$; $f^{(0)}(1) = f(1) =$

$f'(x) =$; $f'(1) =$

$f''(x) =$; $f''(1) =$

$f'''(x) =$; $f'''(1) =$

e) Zapište pro funkci $f(x) = 5 + \ln(2.x - 1)$ a bod $c = 1$ Taylorův polynom 3-tého stupně,

tj. $T_3(x) =$

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080225-5-(3)

6	7	8	9	10

$\sum$ 6-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

6. a) Vysvětlete obecně, co je ryze lomená racionální funkce $R(x)$ a neryze lomená racionální funkce $R(x)$.

Ryze lomená racionální funkce je ...

Neryze lomená racionální funkce je ...

b) Vyřešte rozklad dané ryze lomené racionální funkce na součet parciálních zlomků :

$$R(x)=\frac{-x^4+3.x^3+x^2+2}{x^3.\left(x^2+1\right)}=\text{———}+\text{———}+\text{———}+\text{—————}$$

Výsledek rozkladu : $R(x)=\frac{-x^4+3.x^3+x^2+2}{x^3.(x^2+1)}=$ ——— + ——— + ——— + —————

c) Vypočtěte $\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{1+x^2}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right).dx=$

d) Vypočtěte metodou per partes :

$$\int(x-1)^2.5^x.dx=\left|\begin{matrix}u'= & v= \\ u= & v'=\end{matrix}\right|=$$

7. Zapište (zjednodušeně) první pravidlo pro substituci pro určitý integrál.

b) Vypočítejte substituční metodou pro určitý integrál :

$$\int_0^{\pi}\left(\cos^2 x-\cos x\right).\sin x.dx=\left[\begin{matrix}t= \\ dt=\end{matrix}\right.$$

c) Vypočítejte $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}.dx=$

e) Vyjádřete obecně objem tělesa $\left\{[x;y;z]\in E_3 : x\in\langle a;b\rangle\wedge y^2+z^2\le f^2(x)\right\}$ tj. tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka, daného grafem funkce $y=f(x)$ nad $\langle a;b\rangle$, kolem osy x. *Odpověď* : $V=$

f) Křivočarý lichoběžník je určen funkcí $f(x)=e^x-1$ nad intervalem $\langle 0;1\rangle$.

Vypočtěte objem příslušného rotačního tělesa. *Řešení* : $V=$

8. a) Napište všechny případy, kdy je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní.

b) Napište, jak lze pomocí vybraných posloupností dokázat, že limita posloupnosti neexistuje.

Vyřešte limity : c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3.n+6}{3.n-12}\right)^n =$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4.n^2+1}-n} =$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2+5.n)^2}{(1-2.n).(1+2.n)} =$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{n+2}-3^{n+1}}{3.2^n+6.4^n} =$

9. a) Zapište, co je nutná podmínku konvergence číselné řady.

*Odpověď : **Jestliže je řada*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ……………………………………, ***potom*** ……………………………………

b) Otestujte, zda je splněna nutná podmínky konvergence uvedené řady a rozhodněte, zda konverguje nebo diverguje. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

Rozhodněte, zda uvedené řady c), d) konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$

10. a) Určete střed, poloměr a interval konvergence mocninné řady : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-9)^n}{n!}$

Střed konvergence : c =

Poloměr konvergence : R =

Interval konvergence : I =

Obor konvergence : M=

Uveďte kritérium, podle něhož jste rozhodli o konvergenci řady : *Použité kritérium:*……………………………………………

c) Derivujte danou řadu člen po členu a určete její interval, popř. obor konvergence. | $f'(x) =$

Interval konvergence :

d) Integrujte danou řadu člen po členu a určete její interval, popř. obor konvergence I. | $\int f(x).dx =$

Interval konvergence :

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080225-5-(1)

1	2	3	4	5		∑ 1-5	∑ 6-10		∑ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Zapište disjunkci výroků p, q a uveďte podle definice, jaký je význam této disjunkce.

$p \vee q$ ... je to složený výrok, který tvrdí, že platí jeden nebo druhý z výroků p, q

– Uveďte slovně, kdy je disjunkce výroků p, q pravdivá a kdy nepravdivá. Disjunkce je nepravdivá, když jsou oba výroky nepravdivé. Disjunkce je pravdivá, když je alespoň jeden z výroků pravdivý.

– Číslo zapsané binárně vyjádřete hexadecimálně : $1010\ 0101{,}1111\ 0010_B = A5{,}F2_H$

– Vyjádřete dekadické číslo 59,0125 v binární číselné soustavě alespoň na 8 míst za ř. čárkou a určete periodu :

a) $118_D = 111\ 0110_B$ b) $0{,}0125_D = 0{,}0000\ 0011_B$ c) $118{,}0125_D = 111\ 0110{,}0000\ 0011$

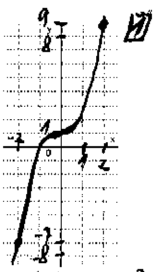
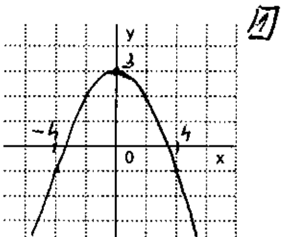
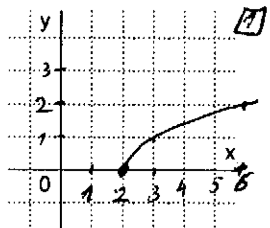
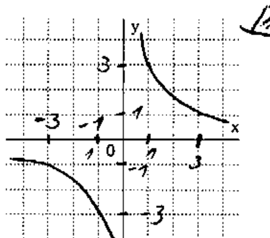
$118 = 2\cdot 59 + 0$
$59 = 2\cdot 29 + 1$
$29 = 2\cdot 14 + 1$
$14 = 2\cdot 7 + 0$
$7 = 2\cdot 3 + 1$
$3 = 2\cdot 1 + 1$
$1 = 2\cdot 0 + 1$
$111\ 0110$

$0{,}0125\cdot 2 = 0{,}025 + 0$
$0{,}025\cdot 2 = 0{,}05 + 0$
$0{,}05\cdot 2 = 0{,}10 + 0$
$0{,}10\cdot 2 = 0{,}2 + 0$
$0{,}20\cdot 2 = 0{,}4 + 0$
$0{,}4\cdot 2 = 0{,}8 + 0$
$0{,}8\cdot 2 = 0{,}6 + 1$

$0{,}6\cdot 2 = 0{,}2 + 1$
$0{,}2\cdot 2 = 0{,}4 + 0$
$0{,}4\cdot 2 = 0{,}8 + 0$
$0{,}8\cdot 2 = 0{,}6 + 1$

2. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují na jejich maximálním definičním oboru.

a) $f_1 : y = x^3 + 1$; b) $f_2 : y = 3 - x^2$; c) $f_3 : y = \sqrt{x-2}$; d) $f_4 : y = \dfrac{3}{x}$.

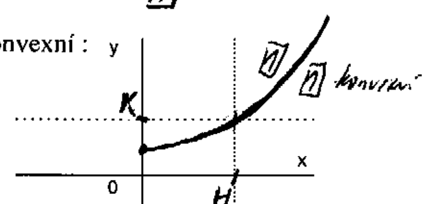
$f_1'(x) = 3x^2$ $f_2'(x) = -2x$ $f_3'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}$ $f_4'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$

$f_1^{-1} : x = \sqrt[3]{y-1}$ f_2^{-1} : neexistuje $f_3^{-1} : x = 2 + y^2$ $f_4^{-1} : x = \dfrac{3}{y}$

3. a) Zapište limitu funkce $f(x)$, která je podle definice dána výrokem :

$\boxed{(\forall K \in R)(\exists H \in R)(\forall x \in (H ; +\infty))(f(x) > K)}$ *Odpověď :* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Načrtněte do souřadné soustavy graf nějaké funkce, která má uvedenou limitu a je konvexní :



c) Vypočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-5.x)}{5.x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2-5x)\cdot(2x-5)}{5-\cos x} = \frac{-5}{5-1} = -\frac{5}{4}$$

d) Vypočtěte $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3.x+1)^2}{(\sqrt{2.x}-1)(\sqrt{2.x}+1)x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^2}{(2x-1)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+6x+1}{2x^2-x} = \lim\frac{9+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{9}{2}$$

e) Vypočtěte $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{1-\cos x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{1}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x} = -1$$

4. a) Uveďte postačující podmínku proto, aby funkce $f(x)$ byla klesající na intervalu $(b;d)$.

Odpověď: Postačující podmínkou je $f'(x) < 0$ [1] pro každé $x \in (b;d)$

b) Uveďte postačující podmínku ryzí konvexnosti funkce $f(x)$ v bodě c.

Odpověď: Postačující podmínkou je $f''(c) > 0$ [1]

c) Funkce $f(x) = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}$. Určete její první derivaci $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ [1] [1]

e) Určete druhou derivaci $f''(x) = \dfrac{-\cos x \cdot \cos^2 x - (1-\sin x) 2 \cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \dfrac{-\cos^3 x + 2\sin x \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x}{\cos^4 x}$ [1] [1] [1]

d) Určete pomocí první derivace, zdali je funkce $f(x)$ na intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí nebo klesající.

$x \in$	$(0;\frac{\pi}{2})$
$1-\sin x$	+
$f'(x)$	+
$f(x)$	rostoucí

[1]

f) Určete pomocí druhé derivace v bodě $c = 0$, zdali je funkce $f(x)$ v bodě $c = 0$ konvexní nebo konkávní. $f''(0) = \dfrac{-1+0-0}{1} = -1 < 0 \Rightarrow f(x)$ je konkávní v bodě $c = 0$ [1] [1]

5. a) Zapište, jak se značí čtvrtá derivace funkce $f(x)$ na intervalu J a napište, jak je definována.
$f^{(4)}(x)$; vznikne derivováním funkce $f'''(x)$, tj. $f^{(5)}(x) = (f'''(x))'$ [1] [1]

b) Zapište, jak se značí n-tá derivace funkce $f(x)$ na intervalu J a napište, jak je definována.
$f^{(n)}(x)$; vznikne derivování $(n-1)$-ní derivace, tj. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ [1] [1]

c) Zapište, jak se značí nultá derivace funkce $f(x)$ na intervalu J a napište, čemu je rovna.
$f^{(0)}(x) = f(x)$ [1]

d) *Za překladu, že* 1) Funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a;b \rangle$; 2) Funkce $f(x)$ je třídy C^n na intervalu $\langle a;b \rangle$, kde $n \in N_0$; d) V každém bodě intervalu $(a;b)$ existuje $(n+1)$-ní derivace funkce $f(x)$;

e) Body c, x jsou dva různé body intervalu $\langle a;b \rangle$. *Doplňte tvrzení Taylorovy věty :*

Existuje bod ξ ležící mezi body c a x tak, že platí: [1]

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n + R_{n+1}(x), \text{ kde } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

[1] [1] [1]

e) Zapište obecně pro funkci $f(x)$ a bod c Taylorův polynom 3-tího stupně, tj. $T_3(x) = f(c) + \dfrac{f'(c)}{1!}(x-c) + \dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dfrac{f'''(c)}{3!}\cdot(x-c)^3$ [1]

f) Je dána funkce $f(x) = 5 + \ln(2.x-1)$. Vypočítejte všechny derivace funkce $f(x) = 5 + \ln(2.x-1)$ od nulté do třetí, vyčíslete je v bodě $c = 1$. *Tedy :* $f^{(0)}(x) = 5 + \ln(2x-1)$; $f^{(0)}(1) = f(1) = 5$ [1]

$f'(x) = \dfrac{2}{2x-1} = 2\cdot(2x-1)^{-1}$; $f'(1) = 2$ | $f''(x) = -2\cdot(2x-1)^{-2}\cdot 2 = -4(2x-1)^{-2} = \dfrac{-4}{(2x-1)^2}$; $f''(1) = -4$ [1] [1]

$f'''(x) = -4\cdot(-2)(2x-1)^{-3}\cdot 2 = \dfrac{16}{(2x-1)^3}$; $f'''(1) = 16$ [1]

e) Zapište pro funkci $f(x) = 5 + \ln(2.x-1)$ a bod $c = 1$ Taylorův polynom 3-tího stupně,

tj. $T_3(x) = 5 + 2(x-1) - \dfrac{4}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{16}{3!}(x-1)^3 =$

$= 5 + 2(x-1) - 2(x-1)^2 + \dfrac{8}{3}(x-1)^3$

[1] [1] [1]

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080225-5-(3)

6	7	8	9	10

∑ 6-10

……….…… ………….. ………… ………………………… ………………………………………

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

6. a) Vysvětlete obecně, co je ryze lomená racionální funkce $R(x)$ a neryze lomená racionální funkce $R(x)$.

Ryze lomená racionální funkce je ... funkce $R(x) \boxed{1} = \frac{U(x)}{Q(x)}$, kde st $U(x) <$ st $Q(x)$ $\boxed{1}$; $R(x)$ je podíl polynomů $U(x)$ a $Q(x)$

Neryze lomená racionální funkce je ... funkce $R(x) \boxed{1} = \frac{U(x)}{Q(x)}$, kde st $U(x) \geq$ st $Q(x)$ $\boxed{1}$; — // —

b) Vyřešte rozklad dané ryze lomené racionální funkce na součet parciálních zlomků :

$$R(x) = \frac{-x^4+3.x^3+x^2+2}{x^3.\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x}\boxed{1} + \frac{B}{x^2}\boxed{1} + \frac{C}{x^3}\boxed{1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}\boxed{1} \Big/ x^3\cdot(x^2+1)$$

$$-x^4+3x^3+x^2+2 = A\cdot(x^4+x^2)+B(x^3+x)+C(x^2+1)+(Dx+E)\cdot x^3$$

$$-x^4+3x^3+x^2+2 = Ax^4+Ax^2+Bx^3+Bx+Cx^2+C+Dx^4+Ex^3$$

x^4: $A + D = -1 \Rightarrow D = 0$ $\boxed{1}$ | x: $B = 0$ $\boxed{1}$

x^3: $B + E = 3 \Rightarrow E = 3$ $\boxed{1}$ | x^0: $C = 2$ $\boxed{1}$

x^2: $A + C = 1 \Rightarrow A = -1$ $\boxed{1}$

Výsledek rozkladu :

$$R(x) = \frac{-x^4+3.x^3+x^2+2}{x^3.\left(x^2+1\right)} = \frac{(-1)}{x} + \frac{0}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{1+x^2} \quad \boxed{1}$$

c) Vypočtěte $\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{1+x^2}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right).dx = -\ln|x| \boxed{1} - \frac{1}{x^2} \boxed{1} + 3\,\mathrm{arctg}\,x \boxed{1} - 4\arcsin x \boxed{1} + C$

d) Vypočtěte metodou per partes : $\boxed{1}$

$$\int(x-1)^2.5^x.dx = \begin{vmatrix} u' = 5^x & v = (x-1)^2 \\ u = \frac{5^x}{\ln 5} & v' = 2(x-1) \end{vmatrix} \boxed{1} = (x-1)^2\frac{5^x}{\ln 5} \boxed{1} - \int\frac{5^x}{\ln 5}\cdot 2(x-1)\,dx \boxed{1} = \begin{vmatrix} u' = \frac{5^x}{\ln 5} \boxed{1} ; v = 2(x-1) \boxed{1} \\ u = \frac{5^x}{(\ln 5)^2} ; v' = 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)^2\frac{5^x}{\ln 5} - \left[\frac{5^x\cdot 2(x-1)}{(\ln 5)^2} \boxed{1} - \int\frac{5^x}{(\ln 5)^2}\cdot 2\,dx \boxed{1}\right] = (x-1)^2\frac{5^x}{\ln 5} - 2(x-1)\frac{5^x}{(\ln 5)^2} + 2\frac{5^x}{(\ln 5)^3} \boxed{1} + C$$

7. Zapište (zjednodušeně) první pravidlo pro substituci pro určitý integrál.

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\cdot dx = \begin{bmatrix} t = g(x) & x = b \Rightarrow t = g(b) \\ dt = g'(x)\cdot dx & x = a \Rightarrow t = g(a) \end{bmatrix} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\cdot dt \quad \boxed{2}$$

b) Vypočítejte substituční metodou pro určitý integrál :

$$\int_0^{\pi}\left(\cos^2 x - \cos x\right).\sin x.dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \boxed{1} & x = \pi \Rightarrow t = -1 \boxed{1} \\ dt = -\sin x\cdot dx \Rightarrow \sin x\,dx = (-1)\,dt & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} = \int_1^{-1}(t^2-t)(-1)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1}(t^2-t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} \boxed{1} - \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{1} + \frac{2}{3}$$

c) Vypočítejte $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}.dx = \left[\mathrm{tg}\,x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \boxed{1}\, \mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,0 = +\infty - 0 = +\infty \boxed{1}$

e) Vyjádřete obecně objem tělesa $\{[x;y;z] \in E_3 : x \in \langle a;b\rangle \wedge y^2+z^2 \leq f^2(x)\}$ tj. tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka, daného grafem funkce $y = f(x)$ nad $\langle a;b\rangle$, kolem osy x. *Odpověď :* $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\cdot dx$ $\boxed{1}$

f) Křivočarý lichoběžník je určen funkcí $f(x) = e^x - 1$ nad intervalem $\langle 0;1\rangle$. $\boxed{1}$

Vypočtěte objem příslušného rotačního tělesa. *Řešení :* $V = \pi\int_0^1 (e^x-1)^2\,dx = \pi\int [(e^x)^2 - 2e^x + 1]\,dx =$

$$= \pi\int_0^1 [(e^2)^x - 2e^x + 1] \boxed{1}\, dx = \pi\left[\frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - 2e^x + x\right]_0^1 = \pi\left[\frac{e^{2x}}{2} \boxed{1} - 2e^x + x \boxed{1}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{e^2}{2} - 2e + 1\right) - \left(\frac{e^0}{2} - 2e^0 + 0\right)\right] = \pi\left[\frac{e^2}{2} - 2e + 1 - \frac{1}{2} + 2\right] = \pi\cdot\left[\frac{e^2}{2} - 2e \boxed{1} + 2{,}5\right]$$

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080225-5-(4)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, pokud

8. a) Napište všechny případy, kdy je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\boxed{1}$ nebo 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $\boxed{1}$ nebo 3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje $\boxed{1}$

b) Napište, jak lze pomocí vybraných posloupností dokázat, že limita posloupnosti neexistuje.

Jestliže existují dvě $\boxed{1}$ vybrané posloupnosti z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že každá z vybraných posloupností má za limitu jiné číslo z R^*, potom $\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje

Vyřešte limity : c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3.n+6}{3.n-12}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{(-4)}{n}\right)^n} \boxed{1} = \dfrac{e^2}{e^{-4}} \boxed{1} = e^6$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4.n^2+1}-2n} = \left[\dfrac{1}{``\infty-\infty"}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n \;\boxed{1}}{\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)\cdot\left(\sqrt{4n^2+1}+2n\right)} = \lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{4n^2+1-4n^2}\boxed{1} = \lim\left(\sqrt{4n^2+1}+2n\right)\boxed{1} = +\infty \;\boxed{1}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2+5.n)^2}{(1-2.n)(1+2.n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+20n+25n^2}{\boxed{1}\,1-4n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{4}{n^2}+\frac{20}{n}+25}{\frac{1}{n^2}-4}\boxed{1} = -\dfrac{25}{4}\;\boxed{1}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{n+2}-3^{n+1}}{3.2^n+6.4^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{4^{n+2}}{4^n}-\frac{3^{n+1}}{4^n}}{\frac{3\cdot2^n}{4^n}+\frac{6\cdot4^n}{4^n}}\boxed{1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\boxed{1}\,4^2-\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot3}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n+6} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}\;\boxed{1}$

9. a) Zapište, co je nutná podmínku konvergence číselné řady. $\boxed{1}$

*Odpověď : **Jestliže je řada*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$ ***, potom*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) Otestujte, zda je splněna nutná podmínky konvergence uvedené řady a rozhodněte, zda konverguje nebo diverguje. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\boxed{1} = \dfrac{1}{e}\boxed{1} \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - diverguje $\boxed{1}$

Rozhodněte, zda uvedené řady c), d) konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - alternující řada, $\boxed{1}$ 2) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\boxed{1}$ je klesající posloupnost (tedy nerostoucí), protože $\forall n\in N;\ |a_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = |a_{n+1}|$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\boxed{1} = 0$ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ Leibnitzovo kritérium

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$; $\boxed{1}$ $\int_1^{\infty} x^{-\frac{4}{3}}dx = \left[\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right]_1^{\infty}\boxed{1} = \left[-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right]_1^{\infty}\boxed{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) + \dfrac{3}{\sqrt[3]{1}} = 0+3 = 3 \in R \boxed{1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ Integrální kritérium

10. a) Určete střed, poloměr a interval konvergence mocninné řady : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-9)^n}{n!}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(x-9)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x-9)^n}{n!}}\right|\boxed{1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(x-9)^{n+1}\,n!}{(x-9)^n(n+1)n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\boxed{1}\dfrac{|x-9|}{n+1} = 0 \boxed{1} \ \forall x\in(-\infty,+\infty)$

Dle podílového kritéria pro absolutní konvergenci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

Střed konvergence : c = 9 $\boxed{1}$

Poloměr konvergence : R = $+\infty$ $\boxed{1}$

Interval konvergence : I = $(-\infty;+\infty)$ $\boxed{1}$

Obor konvergence : M= $(-\infty;+\infty$

Uveďte kritérium, podle něhož jste rozhodli o konvergenci řady : *Použité kritérium:* Limitní podílové kritérium

c) Derivujte danou řadu člen po členu a určete její interval, popř. obor konvergence.

$f'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-9)^n}{n!}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x-9)^{n-1}}{n!}\boxed{1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-9)^{n-1}}{(n-1)!}\boxed{1}$

Interval konvergence : $I = (-\infty,+\infty)$ $\boxed{1}$

d) Integrujte danou řadu člen po členu a určete její interval, popř. obor konvergence I.

$\int f(x).dx = \int\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-9)^n}{n!}\right)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-9)^{n+1}}{(n+1)n!}\boxed{1} + C = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-9)^{n+1}}{(n+1)!}\boxed{1} + C$

Interval konvergence : $I = (-\infty;+\infty)$ $\boxed{1}$