FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMA1E – EX-M1080206-3-(1)

1	2	3	4	5	∑ 1-5	∑ 6-10	∑ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1.1. Zapište, co je **ekvivalence výroků** p, q a uveďte podle definice, jaký je logický význam této ekvivalence ______________________

1.2. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot a zapište ekvivalenci jako a) **disjunktivní normální formu** $(p \Leftrightarrow q) \equiv$ ______________________

a jako b) **konjunktivní normální formu** $(p \Leftrightarrow q) \equiv$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

1.3. Zapište binární číslo hexadecimálně : $1011\ 0001{,}1101\ 0100_B$ =

1.4. Vyjádřete dekadická čísla v binární číselné soustavě (na 8 míst za řádovou čárkou) :

a) $71_D =$ b) $0{,}775_D =$ c) $71{,}775_D =$

2. Uvažujte soustavu m lineárních rovnic o n neznámých, kde hodnost matice soustavy je h_s a hodnost rozšířené matice soustavy je h_r.

a) Co je řešením takovéto soustavy ?

b) Kdy má soustava alespoň jedno řešení? Tj. napište Frobeniovu větu :

b) Kdy má soustava právě 1 řešení ? ....

c) Kdy má soustava právě 2 řešení ? ....

d) Kdy je řešením soustavy prostor o dimenzi 2 ? ....

– Zjistěte, zda má soustava m = 4 lineárních rovnic o n = 4 neznámých řešení, pokud ano, řešení nalezněte Gaussovou metodou. Určete h_s a h_r.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 3.x_2 + 2.x_3 + x_4 &= -1 \\
x_2 + 2.x_4 &= 1 \\
2.x_1 - 4.x_2 - 3.x_3 - 2.x_4 &= -2 \\
2.x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

3.1. Co je determinant, z čeho se vypočítá a jak, je-li vyššího řádu ?. *Odpověď: Determinant je ...*

které se vypočítá ze ....(jak?) ....

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + \cdots + a_{1n}.A_{1n}$$

Jak se nazývají výrazy $A_{11}; A_{12}; ...; A_{1n}$? Jsou to ....

Jak se vypočítá A_{12} ? *Matematickým zápisem :*

Slovně :

3.2 Kdy je čtvercová matice A stupně n **singulární** ?

*Odpověď: **Čtvercová. matice** A **je singulární** $\Leftrightarrow$*

3.3 Vypočtěte : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 15 \\ -5 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

4. a) Zapište obecně, jak se z adjungované matice $\mathrm{adj}A$ vytvoří inverzní matice A^{-1}. Tj. : $A^{-1} =$

b) Pro matici A vypočítejte algebraické doplňky A_{33} ; A_{12} a A_{24}, tj. prvky adjungované matice $\mathrm{adj}A$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 15 \\ -5 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A_{33} =$; $A_{12} =$

c) Doplňte na správná místa adjungované matice její prvky A_{33}; A_{12}; A_{24}.

d) Z prvků A_{33}; A_{12}; A_{24} vypočítejte prvky inverzní matice A^{-1} (!! $\det(A)$ nahoře!!) a doplňte je na správná místa v inverzní matici.

$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$; $A_{24} =$

5. a) Určete parametrické rovnice přímky q, která je určena bodem $A = [0\,; -3\,; 2]$ a která je rovnoběžná s přímkou p

| Směrový vektor přímky p je $\vec{s}_p = (\_\_\ ;\ \_\_\ ;\ \_\_)$

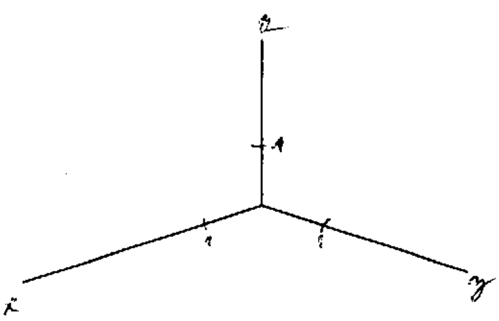
$$\begin{aligned} p: x &= -2 + t \\ y &= \quad - 2.t \\ z &= 4 + 3.t \end{aligned}$$

Řešení : q :

b) Určete obecnou rovnici roviny ρ, která je určena bodem $A = [0\,; -3\,; 2]$ a která je kolmá na přímku p.
Normálový vektor roviny je
$\vec{n}_\rho = (\_\_\ ;\ \_\_\ ;\ \_\_)$

c) Určete obecnou rovnici roviny σ, která je určena bodem $A = [0\,; -3\,; 2]$ a přímkou p.

– Vyjádřete rovnici roviny $\tau : 3.x + 4.y - 2.z + 6 = 0$ v úsekovém tvaru, určete úseky a načrtněte stopy roviny do souřadné soustavy xyz.



FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMA1E – EX-M1080206-3-(3)

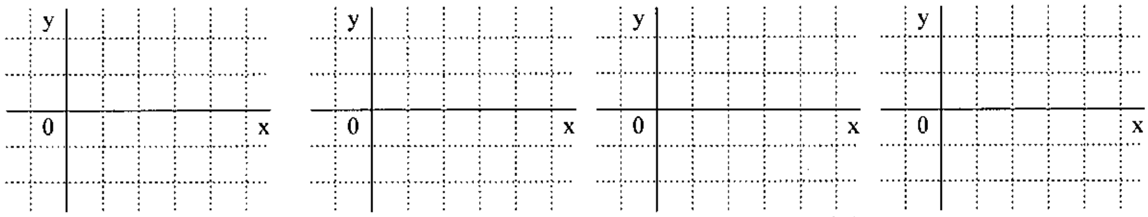
6	7	8	9	10		Σ 6-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

6. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují.

a) $f_1 : y = \log_5 x$; b) $f_2 : y = 1 + \ln x$; c) $f_3 : y = \ln(x+2)$; d) $f_4 : y = -\ln x$.



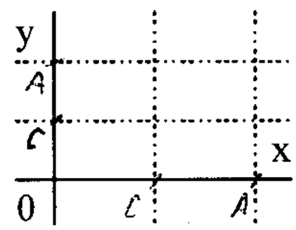
$f_1'(x) =$ $f_2'(x) =$ $f_3'(x) =$ $f_4'(x) =$

f_1^{-1} : f_2^{-1} : f_3^{-1} : f_4^{-1} :

7. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$, kde $c \in R$ a $A \in R$.

Tj. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A \Leftrightarrow$

b) Načrtněte graf nějaké funkce, která má $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ a která je v $(-\infty; c)$ rostoucí a konvexní a v $(c; +\infty)$ klesající a konkávní :



c) Vypočtěte bez použití l'Hospitalova pravidla $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{16.x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{36.x} + 1 - \sqrt{x}} =$

d) Vypočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \to 1} \frac{2.x - 2 + x.\ln x}{\log_2 x} =$$

e) Vypočtěte :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{2} =$$

8. a) Vypočítejte

$$\int \left(\frac{1}{3}.x^2 + \frac{40}{x^5} - 8.\sin x + 3.\cos x \right).dx =$$

b) Vypočítejte substituční metodou :

$$\int \frac{8.x+11}{4.x^2+11.x+10}.dx = \left[\left| \begin{array}{l} t = \\ dt = \end{array} \right. \right.$$

c) Napište větu o integrování metodou **per partes.**

Předpoklady : *Tvrzení :*

d) Vypočtěte metodou per partes (2x) : $\int (x^2+1).e^x.dx = \left| \begin{array}{ll} u' = & v = \\ u = & v' = \end{array} \right| =$

9. Za předpokladu, že $f(x)$ je funkce definovaná v nějakém okolí bodu c, zapište vztah, kterým je definována de derivace funkce v bodě c : $f'(c)=$

– Zapište podle definice, jak se vypočítá derivace funkce $f(x)=\arcsin x$ v bodě $c=\frac{1}{2}$ (jen zapište pomocí limity, limitu však nepočítejte). $f'\left(\frac{1}{2}\right) =$

– Zderivujte funkci $f(x)=\arcsin x$.

Tj. : $f'(x)=(\arcsin x)'=$ a vypočítejte $f'\left(\frac{1}{2}\right) =$

– Zapište obecně Taylorův polynom 1.st. pro funkci $f(x)$ v bodě c. *Tj. :* $T_1(x)=$

– Když víte, že $f\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, zapište Taylorův polynom 1.st. pro funkci $f(x)=\arcsin x$ v bodě $c=\frac{1}{2}$. *Tj. :* $T_1(x)=$

– Zapište obecně rovnici tečny grafu funkce $f(x)$ v bodě c. *Tj. :* $y=$

– Zapište rovnici tečny grafu funkce $f(x)=\arcsin x$ v bodě $c=\frac{1}{2}$. *Tj. :* $y=$

– Zapište zkráceně vzorec pro derivování podílu funkcí : *Tj. :* $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

– Zderivujte funkci $f(x)=\frac{x+2.\operatorname{arctg} x}{2+\operatorname{tg} x}$, tj. $f'(x)=$

10. a) Zapište, jak se vypočítá Riemannův integrál spojité funkce $f(x)$ na intervalu $(a;b)$, jestliže $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ ne intervalu $(a;b)$. *Tedy :* $\int_a^b f(x).dx =$

b) Proveďte vydělení polynomů $\left(3.x^3-x^2+3.x+5\right):\left(x^2+1\right)=$

c) Zapište rozklad neryze lomené racionální funkce na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce (použijte výsledek předchozí úlohy). *Rozklad je :* $\frac{3.x^3-x^2+3.x+5}{x^2+1}= \qquad + \frac{\qquad}{\qquad}$

d) Vypočtěte pomocí předchozího rozkladu $\int_0^1 \frac{3.x^3-x^2+3.x+5}{x^2+1}.dx =$

e) Vypočítejte $\int_4^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right).dx =$

f) Vyjádřete objem tělesa, jež je určeno rotací oblouku křivky, která je grafem funkce $f(x)$ pro $x \in \langle a;b \rangle$, kolem osy x, tj. míru množiny $\left\{[x;y;z]\in E_3 : x\in\langle a;b\rangle \wedge y^2+z^2\le f^2(x)\right\}$. *Odpověď :* $P=$

g) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f(x)=3^{x-\frac{1}{2}}$ pro $x\in\left\langle \frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\rangle$, kolem osy x.

Řešení : $P=$

FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMA1E – EX-M1080206-3-(1)

1	2	3	4	5	$\sum$ 1-5	$\sum$ 6-10	$\sum$ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1.1. Zapište, co je **ekvivalence výroků** p, q a uveďte podle definice, jaký je logický význam této ekvivalence $p \Leftrightarrow q$, je to složený výrok, který tvrdí, že oba dílčí výroky jsou zároveň pravdivé nebo nepravdivé [2]

1.2. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot a zapište ekvivalenci jako a) **disjunktivní normální formu** $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ [3]

a jako b) **konjunktivní normální formu** $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ [3]

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

[1]

1.3. Zapište binární číslo hexadecimálně : $1011\ 0001{,}1101\ 0100_B = B1{,}D4_H$ [2]

1.4. Vyjádřete dekadická čísla v binární číselné soustavě (na 8 míst za řádovou čárkou) :

a) $71_D = 100\ 0111_B$ [2]   b) $0{,}775_D = 0{,}11\overline{0001}1_B$ [2]   c) $71{,}775_D = 100\ 0111{,}1100\overline{011}_B =$ [1]

$71 = 2 \cdot 35 + 1$
$35 = 2 \cdot 17 + 1$
$17 = 2 \cdot 8 + 1$
$8 = 2 \cdot 4 + 0$
$4 = 2 \cdot 2 + 0$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
$1 = 2 \cdot 0 + 1 \quad 100\ 0111$

$0{,}775 \cdot 2 = 0{,}55 + 1$
$0{,}55 \cdot 2 = 0{,}1 + 1$
$0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2 + 0$
$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 + 0$
$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 + 0$
$0{,}8 \cdot 2 = 0{,}6 + 1$
$0{,}6 \cdot 2 = 0{,}2 + 1$
$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 + 0$

$= 100\ 0111{,}1100\ \overline{0110}0_B$ [1]

2. Uvažujte soustavu m lineárních rovnic o n neznámých, kde hodnost matice soustavy je h_s a hodnost rozšířené matice soustavy je h_r.

a) Co je řešením takovéto soustavy ? Řešením soustavy je každý aritmetický vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ čísel, které po dosazení do rovnic všechny rovnice splňují. [1]

b) Kdy má soustava alespoň jedno řešení? Tj. napište Frobeniovu větu : Soustava lineárních rovnic má alespoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost h_r matice rozšířené je rovna hodnosti h_s matice soustavy [1]

b) Kdy má soustava právě 1 řešení ? ...když $h_r = h_s = n$ [1]

c) Kdy má soustava právě 2 řešení ? ......nikdy [1]

d) Kdy je řešení soustavy prostor o dimenzi 2 ? $h_r = h_s = n - 2$, tj. $h_r = h_s$ a $n = h_s + 2$ [1]

– Zjistěte, zda má soustava m = 4 lineárních rovnic o n = 4 neznámých řešení, pokud ano, řešení nalezněte Gaussovou metodou. Určete h_s a h_r.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ x_2 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

[1] [1] [1] [1]

$h_r = 4$, $h_s = 3$ ⇒ Dle Frobeniovy věty soustava nemá žádné řešení

[1] [1] [1]

3.1. Co je determinant, z čeho se vypočítá a jak, je-li vyššího řádu ?. *Odpověď: Determinant je* číslo [1]

které se vypočítá ze čtvercové matice [1] *(jak?)* rozvojem podle některého řádku nebo sloupce. [1]

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + \cdots + a_{1n}.A_{1n}$$

Jak se nazývají výrazy $A_{11}; A_{12}; \dots; A_{1n}$? Jsou to algebraické doplňky prvků $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ [1]

Jak se vypočítá A_{12} ?

Slovně : $A_{1,2}$ je součinem znaménkového činitele $(-1)^{1+2}$ s determinantem matice $(n-1)$-ho řádu, která vznikne z matice A vynecháním prvního řádku a druhého sloupce. [1]

Matematickým zápisem :

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{33}, & \cdots, & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n3}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$ [1]

3.2 Kdy je čtvercová matice A stupně n **singulární**? hodnost matice A je rovna počtu řádků a sloupců $h(A)=n$ [1]

Odpověď: ***Čtvercová. matice*** A ***je singulární*** $\Leftrightarrow$

3.3 Vypočtěte : $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 10 & 15\\ -5 & 4 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 10 & 15\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}$ [1] $=(-4)\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 6 & 15\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}$ [1] $=(-4)\cdot 1\begin{vmatrix}6 & 15\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$

$=(-4)\cdot[6\cdot(-2)-15\cdot 1]=(-4)(-27)=108$ [1]

4. a) Zapište obecně, jak se z adjungované matice $\operatorname{adj}A$ vytvoří inverzní matice A^{-1}. Tj. : $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\operatorname{adj}A$ [1]

b) Pro matici A vypočítejte algebraické doplňky A_{33}; A_{12} a A_{24}, tj. prvky adjungované matice $\operatorname{adj}A$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 10 & 15\\ -5 & 4 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix};\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 15\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=0\ [1];\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 10 & 15\\ -5 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}\ [1]=(-1)\begin{vmatrix}2 & 10 & 35\\ -5 & 5 & 11\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\ [1]=(-1)(1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 35\\ -5 & 11\end{vmatrix}=$$

$=1\cdot[2\cdot 11-35\cdot(-5)]=22+175=197$ [1]

c) Doplňte na správná místa adjungované matice její prvky A_{33}; A_{12}; A_{24}.

d) Z prvků A_{33}; A_{12}; A_{24} vypočítejte prvky inverzní matice A^{-1} | (!! $\det(A)$ nahoře!!) a doplňte je na správná místa v inverzní matici.

$$\operatorname{adj}A=\begin{pmatrix}\_ & \_ & \_ & \_\\ 197 & \_ & \_ & \_\\ \_ & \_ & 0 & \_\\ \_ & 4 & \_ & \_\end{pmatrix}\ [3];\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\_ & \_ & \_ & \_\\ \frac{197}{108} & \_ & \_ & \_\\ \_ & \_ & 0 & \_\\ \_ & \frac{4}{108} & \_ & \_\end{pmatrix}\ [3];\ A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -5 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -5 & 4\end{vmatrix}=4\ [1]$$

5. a) Určete parametrické rovnice přímky q, která je určena bodem $A=[0;-3;2]$ a která je rovnoběžná s přímkou p | Směrový vektor přímky p je $\vec{s}_p=(\ 1\ ;\ -2;\ 3\ )$ [1]

$$\begin{aligned} p: x &= -2 + t\\ y &= \quad - 2.t\\ z &= 4 + 3.t\end{aligned}\qquad \text{Řešení : } q:\ \begin{aligned} x &= t\\ y &= -3-2t\\ z &= 2+3t\end{aligned}\ [1]\qquad B=[-2,0,4]$$

b) Určete obecnou rovnici roviny ρ, která je určena bodem $A=[0;-3;2]$ a která je kolmá na přímku p.
Normálový vektor roviny je $\vec{n}_\rho=(\ 1\ ;\ -2\ ;\ 3\ )$ [1] $A\in\rho\Rightarrow 0-2\cdot(-3)+3\cdot 2+d=0\Rightarrow d=-12$ [1]

$\rho:\ x-2y+3z+d=0$ [1] $\qquad \rho:\ x-2y+3z-12=0$ [1]

c) Určete obecnou rovnici roviny σ, která je určena bodem $A=[0;-3;2]$ a přímkou p.

$\sigma:\ -10x-8y+7z+d=0$ [1]

$A\in\sigma\Rightarrow 0-8(-3)+7\cdot 2+d=0\Rightarrow d=-24-14=-38$ [1]

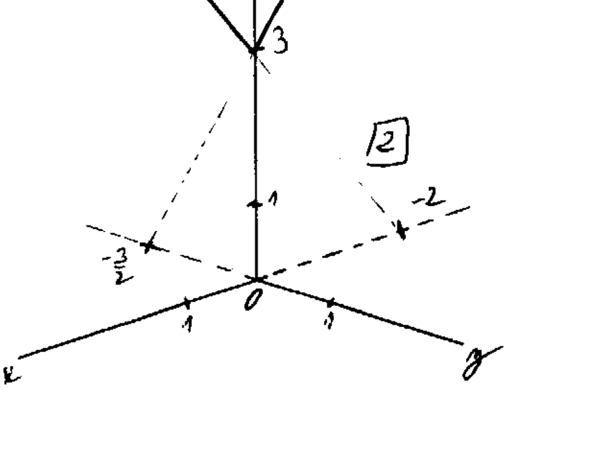
$\sigma:\ -10x-8y+7z-38=0$ [1]

$\vec{A_{\sigma_1}}=\vec{A_p}=(1,-2,3)$ [1]

$\vec{A_{\sigma_2}}=\vec{AB}=B-A=[-2,0,4]-[0,-3,2]=(-2;3;2)$ [1]

$\vec{n_\sigma}=\vec{A_{\sigma_1}}\times\vec{A_{\sigma_2}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}$ [1] $=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}$ [1] $=\vec{i}(-10)+\vec{j}(-8)+\vec{k}\,7=(-10,-8,7)$ [1]

– Vyjádřete rovnici roviny $\tau: 3.x+4.y-2.z+6=0$ v úsekovém tvaru, určete úseky a načrtněte stopy roviny do souřadné soustavy xyz.



$3x+4y-2z=-6$

$-3x-4y+2z=6\ \Big|\ \frac{1}{6}$

$\frac{x}{(-2)}+\frac{4y}{-6}+\frac{z}{3}=1$ [1] Úseky na osách x, y, z

$\frac{x}{(-2)}+\frac{y}{(-\frac{3}{2})}+\frac{z}{3}=1\Rightarrow d_1=-2;\ d_2=-\frac{3}{2};\ d_3=3$

[1] [1] [1]

FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMA1E – EX-M1080206-3-(3)

6	7	8	9	10

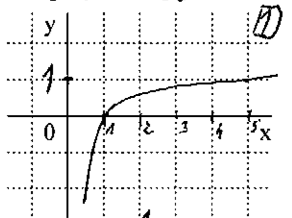
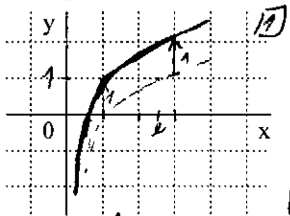
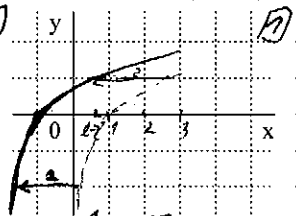
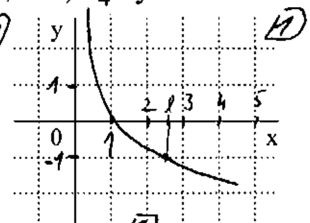
∑ 6-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

6. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují.

a) $f_1 : y = \log_5 x$; b) $f_2 : y = 1 + \ln x$; c) $f_3 : y = \ln(x+2)$; d) $f_4 : y = -\ln x$.

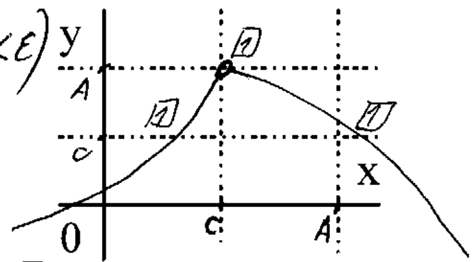
$f_1'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 5}$ $\boxed{1}$ $f_2'(x) = \frac{1}{x}$ $\boxed{1}$ $f_3'(x) = \frac{1}{x+2}$ $\boxed{1}$ $f_4'(x) = -\frac{1}{x}$ $\boxed{1}$

$f_1^{-1} : x = 5^y$ $\boxed{1}$ $f_2^{-1} : x = e^{y-1}$ $\boxed{1}$ $f_3^{-1} : x = e^y - 2$ $\boxed{1}$ $f_4^{-1} : x = e^{-y}$ $\boxed{1}$

7. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$, kde $c \in R$ a $A \in R$.

Tj. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (c-\delta; c) \cup (c; c+\delta))(|f(x) - A| < \varepsilon)$ $\boxed{1}$

b) Načrtněte graf nějaké funkce, která má $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ a která je v $(-\infty; c)$ rostoucí a konvexní a v $(c; +\infty)$ klesající a konkávní :



c) Vypočtěte bez použití l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{16.x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{36.x} + 1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x+1}{x}}}{6\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \boxed{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{6 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \boxed{1} = \frac{4+1}{6-1} = 1 \boxed{1}$$

d) Vypočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \to 1} \frac{2.x - 2 + x.\ln x}{\log_2 x} = \left[\frac{{}''0}{0''}\right] \boxed{1} \stackrel{LP}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2 + \ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x \cdot \ln 2}} \boxed{1} = \lim_{x \to 1} (3 + \ln x) x \cdot \ln 2 = 3 \cdot \ln 2 = \ln 8 \boxed{1}$$

e) Vypočtěte :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^x \cdot \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{(-1)}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}\right)^2 = \frac{e^{-1}}{e^2} \cdot 1 = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

8. a) Vypočítejte

$$\int \left(\frac{1}{3}.x^2 + \frac{40}{x^5} - 8.\sin x + 3.\cos x\right).dx = \frac{x^3}{9} - \frac{10}{x^4} + 8\cos x + 3\sin x + C$$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) Vypočítejte substituční metodou :

$$\int \frac{8.x+11}{4.x^2 + 11.x + 10}.dx = \left[\left| \begin{array}{l} t = 4x^2 + 11 \cdot x + 10 \\ dt = (8x + 11)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C\right] = \ln|4x^2 + 11.x + 10| + C$$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

c) Napište větu o integrování metodou **per partes**.

Předpoklady : Funkce $u(x); v(x)$ jsou spojitě diferencovatelné na intervalu J. $\boxed{1}$

Tvrzení : Potom platí: $\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$ $\boxed{1}$

d) Vypočtěte metodou per partes (2x) : $\int (x^2 + 1).e^x.dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & v = x^2 + 1 \\ u = e^x & v' = 2x \end{array} \right| = (x^2+1)e^x - \int e^x \cdot 2x dx =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & v = 2x \\ u = e^x & v' = 2 \end{array} \right| = (x^2+1)e^x - \left[2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x dx\right] = (x^2+1)e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= (x^2 - 2x + 3)e^x + C$

9. Za předpokladu, že $f(x)$ je funkce definovaná v nějakém okolí bodu c, zapište (vztah) kterým je definována derivace funkce v bodě c : $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ $\boxed{1}$

– Zapište podle definice, jak se vypočítá derivace funkce $f(x) = \arcsin x$ v bodě $c = \frac{1}{2}$ (jen zapište pomocí limity, limitu však nepočítejte). $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}+h\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$ $\boxed{1}$

– Zderivujte funkci $f(x) = \arcsin x$, $f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\boxed{1}$

– Vypočítejte $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\boxed{1}$

– Zapište obecně Taylorův polynom 1.st. pro funkci $f(x)$ v bodě c. *Tj.* : $T_1(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c)$ $\boxed{1}$

– Když víte, že $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, zapište Taylorův polynom 1.st. pro funkci $f(x) = \arcsin x$ v bodě $c = \frac{1}{2}$. *Tj.* : $T_1(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{1}$

– Zapište obecně rovnici tečny grafu funkce $f(x)$ v bodě c. *Tj.* : $y = T_1(x)$ $\boxed{1}$

– Zapište rovnici tečny grafu funkce $f(x) = \arcsin x$ v bodě $c = \frac{1}{2}$. *Tj.* : $y = \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{1}$

– Zapište zkráceně vzorec pro derivování podílu funkcí : *Tj.* : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\boxed{1}$

– Zderivujte funkci $f(x) = \frac{x + 2.\mathrm{arctg}\, x}{2 + \mathrm{tg}\, x}$, tj. $f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{2}{1+x^2}\right)\cdot(2 + \mathrm{tg}\, x) - (x + 2\,\mathrm{arctg}\, x)\frac{1}{\cos^2 x}}{(2 + \mathrm{tg}\, x)^2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

10. a) Zapište, jak lze vypočítat Riemannův integrál spojité funkce $f(x)$ na otevřeném intervalu $(a;b)$, jestliže $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ ne intervalu $(a;b)$.

Tedy : $\int_a^b f(x).dx = \left[F(x)\right]_a^b = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) Proveďte vydělení polynomů $(3.x^3 - x^2 + 3.x + 5) : (x^2 + 1) = 3x - 1$ $\boxed{1}$

$$\begin{array}{l} -(3x^3 \quad + 3x) \\ \quad -x^2 \quad + 5 \\ \quad -(-x^2 \quad - 1) \\ \qquad 6 \end{array}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$

c) Zapište rozklad neryze lomené racionální funkce na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce (použijte výsledek předchozí úlohy). *Rozklad je* : $\frac{3.x^3 - x^2 + 3.x + 5}{x^2 + 1} = 3x - 1 + \frac{6}{x^2+1}$ $\boxed{1}$

d) Vypočtěte pomocí předchozího rozkladu $\int_0^1 \frac{3.x^3 - x^2 + 3.x + 5}{x^2 + 1}.dx = \int_0^1 \left(3x - 1 + \frac{6}{x^2+1}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x + 6\,\mathrm{arctg}\, x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 + 6\,\mathrm{arctg}\, 1 - 0 = \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\pi}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

e) Vypočítejte $\int_4^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right).dx = \int_4^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_4^{+\infty} = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_4^{\infty} = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \frac{2}{\sqrt{4}} = 0 + 1 = 1$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

f) Vyjádřete objem tělesa, jež je určeno rotací oblouku křivky, která je grafem funkce $f(x)$ pro $x \in \langle a;b \rangle$, kolem osy x, tj. míru množiny $\{[x;y;z] \in E_3 : x \in \langle a;b \rangle \wedge y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$. *Odpověď* : $P = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ $\boxed{1}$

g) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f(x) = 3^{x-\frac{1}{2}}$ pro $x \in \left\langle \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right\rangle$, kolem osy x.

Řešení : $P = \pi \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(3^{x-\frac{1}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} 3^{2x-1} dx = \left| \begin{array}{ll} t = 2x - 1 & x = \frac{5}{2} \Rightarrow t = 4 \\ dt = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \pi \int_2^4 3^t \frac{dt}{2} = \left[\frac{\pi 3^t}{2 \cdot \ln 3}\right]_2^4 = \pi\left(\frac{3^4}{2 \cdot \ln 3} - \frac{3^2}{2 \cdot \ln 3}\right) = \pi \frac{81 - 9}{2 \cdot \ln 3} = \frac{\pi 72}{2 \cdot \ln 3} = \underline{\underline{\frac{\pi 36}{\ln 3}}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$