FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080205-4-(1)

1	2	3	4	5	$\sum$ 1-5	$\sum$ 6-10	$\sum$ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1.1. Zapište, co je **ekvivalence výroků** p, q a uveďte podle definice, jaký je logický význam této ekvivalence ____________________________

1.2. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot a zapište ekvivalenci jako a) **disjunktivní normální formu** $(p \Leftrightarrow q) \equiv$ __________________

a jako b) **konjunktivní normální formu** $(p \Leftrightarrow q) \equiv$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

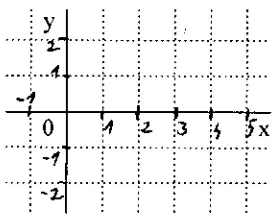
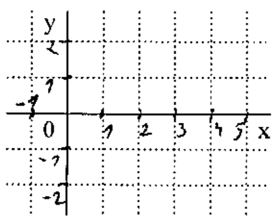
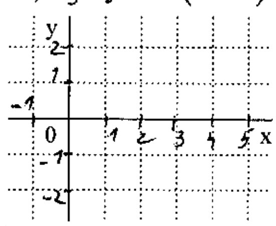
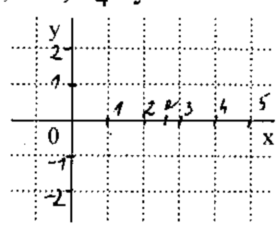
1.3. Zapište binární číslo hexadecimálně : $1011\ 0001{,}1101\ 0100_B$ =

1.4. Vyjádřete dekadická čísla v binární číselné soustavě (na 8 míst za řádovou čárkou) :

a) 71_D = b) $0{,}775_D$ = c) $71{,}775_D$ =

2. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují.

a) $f_1 : y = \log_5 x$; b) $f_2 : y = 1 + \ln x$; c) $f_3 : y = \ln(x+2)$; d) $f_4 : y = -\ln x$.

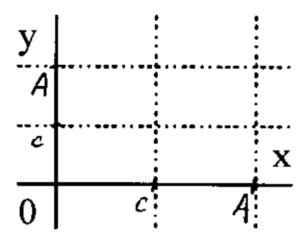
$f_1'(x) =$ $f_2'(x) =$ $f_3'(x) =$ $f_4'(x) =$

f_1^{-1} : f_2^{-1} : f_3^{-1} : f_4^{-1} :

3. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$, kde $c \in R$ a $A \in R$.

Tj. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A \Leftrightarrow$

b) Načrtněte graf nějaké funkce, která má $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ a která je v $(-\infty; c)$ rostoucí a konvexní a v $(c; +\infty)$ klesající a konkávní :



c) Vypočtěte bez použití l'Hospitalova pravidla $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{16.x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{36.x} + 1 - \sqrt{x}} =$

d) Vypočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \to 1} \frac{2.x - 2 + x.\ln x}{\log_2 x} =$$

e) Vypočtěte :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x} . \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2} =$$

4. Za předpokladu, že $f(x)$ je funkce definovaná v nějakém okolí bodu c, zapište vztah, kterým je definována derivace funkce v bodě c : $f'(c)=$

– Zapište podle definice, jak se vypočítá derivace funkce $f(x)=\arcsin x$ v bodě $c=\frac{1}{2}$ (jen zapište pomocí limity, limitu však nepočítejte). $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$

– Zderivujte funkci $f(x)=\arcsin x$.

Tj.: $f'(x)=(\arcsin x)'=$ a vypočítejte $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$

– Zapište obecně Taylorův polynom 1.st. pro funkci $f(x)$ v bodě c. *Tj.:* $T_1(x)=$

– Když víte, že $f\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, zapište Taylorův polynom 1.st. pro funkci $f(x)=\arcsin x$ v bodě $c=\frac{1}{2}$. *Tj.:* $T_1(x)=$

– Zapište obecně rovnici tečny grafu funkce $f(x)$ v bodě c. *Tj.:* $y=$

– Zapište rovnici tečny grafu funkce $f(x)=\arcsin x$ v bodě $c=\frac{1}{2}$. *Tj.:* $y=$

– Zapište zkráceně vzorec pro derivování součinu funkcí : *Tj.:* $(u.v)'=$

– Zderivujte $f(x)=(1-3.\text{tg}\, x).(x+\arccos x)$. $f'(x)=$

5. a) Zapište, jak se vypočítá Riemannův integrál spojité funkce $f(x)$ na intervalu $(a;b)$, jestliže $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ ne intervalu $(a;b)$. *Tedy:* $\int_a^b f(x).dx=$

b) Proveďte vydělení polynomů $(3.x^3-x^2+3.x+5):(x^2+1)=$

c) Zapište rozklad neryze lomené racionální funkce na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce (použijte výsledek předchozí úlohy). *Rozklad je:* $\frac{3.x^3-x^2+3.x+5}{x^2+1}= \qquad + \frac{\qquad}{\qquad}$

d) Vypočtěte pomocí předchozího rozkladu
$\int_0^1 \frac{3.x^3-x^2+3.x+5}{x^2+1}.dx=$

e) Vypočítejte $\int_4^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right).dx=$

f) Vyjádřete objem tělesa, jež je určeno rotací oblouku křivky, která je grafem funkce $f(x)$ pro $x\in\langle a;b\rangle$, kolem osy x, tj. míru množiny $\{[x;y;z]\in E_3 : x\in\langle a;b\rangle \wedge y^2+z^2\le f^2(x)\}$. *Odpověď:* $V=$

g) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f(x)=3^{x-\frac{1}{2}}$ pro $x\in\left\langle \frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\rangle$, kolem osy x.

Řešení: $V=$

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080205-4-(3)

6	7	8	9	10

$\sum$ 6-10

…………… ………… ………… …………………… ……………………………………

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

6. a) Zapište zjednodušeně (nebo v plném znění) první pravidlo pro substituci v neurčitém integrálu.

b) Vypočítejte $\int\left(\frac{1}{7}+\frac{x}{7}+x^6+7^x-7.e^x\right)dx =$

c) Vypočítejte substituční metodou :

$$\int\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.dx = \left|\begin{array}{l} t = \\ dt = \end{array}\right| =$$

d) Vypočtěte metodou per partes :

$$\int\sqrt{x}.\ln x.dx = \int x^{\frac{1}{2}}.\ln x.dx = \left|\begin{array}{ll} u' = & v = \\ u = & v' = \end{array}\right| =$$

7. a) Uveďte definici ostrého lokálního maxima v bodě c. *Odpověď : Za předpokladu, že funkce f je definována v okolí bod c , tj. v intervalu* $(b; d)$, *kde* $b < c < d$, *lze definovat, že funkce f má v bodě c ostré lokální maximum práv tehdy, když* ……………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

b) Uveďte větu - postačující podmínku pro existenci ostrého lokálního maxima v bodě c . *Odpověď :*

c) Je dána funkce $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$. – Určete její maximální definiční obor, tj. Df =

Funkci můžete před derivováním vhodně upravit, tj. $f(x) =$

– Vypočítejte 1. a 2. derivaci funkce a výsledek upravte na součin a podíl lineárních dvojčlenů.

$f'(x) =$

– Najděte stacionár-
ní body funkce :

$f''(x) =$

– Určete všechny ostré lokální extrémy funkce $f(x)$.

– Určete intervaly, kde je funkce $f(x)$ rostoucí a kde klesající

monotonic	$(-\infty;1)$	$(1;2)$	$(2;3)$	$(3;+\infty)$
$(x-1)$				
$(x-3)$				
$(x-2)^2$				
$f'(x)$				
$f(x)$				

– Určete intervaly, kde je $f(x)$ konvexní a kde konkávní.

konvexnost konkávnost	$(-\infty;2)$	$(2;+\infty)$
$(x-2)$		
$(x-2)^3$		
$f''(x)$		
$f(x)$		

8. a) Co je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

b) Co platí o limitě vybrané posloupnosti ?

Vyřešte c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2.n-5}{3.n+1}\right)^2 =$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2.n+1}{n+1}\right)^n =$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3+2.\sqrt[n]{n}}{6.\sqrt[n]{2}-2.\sqrt[n]{n}} =$ f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3.5^{n-1}+4.3^n}{5.3^n-5^n} =$

9. a) Zapište předpoklady a tvrzení integrálního kritéria pro konvergenci resp. divergenci mocninné řady.

Předpoklady : 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s……………………členy a 2. Existuje …*

Tvrzení :

Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium !

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5.n-2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\dfrac{1}{5.n-2}$

ů

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{\frac{n}{2}}}{\left(4-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n}$

10. a) Určete střed, poloměr a interval konvergence dané mocninné řady : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{10^{n-1}}.$

Střed konvergence : c =

Poloměr konvergence : R =

Interval konvergence : I =

b) Ověřte, že daná mocninná řada je geometrická a určete její součet v oboru konvergence I.

c) Derivujte danou řadu člen po členu a určete její součet součet v I.

$f'(x) =$

d) Integrujte danou řadu člen po členu a určete její součet v I.

$\int f(x).dx =$

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080205-4-(1)

1	2	3	4	5

Σ 1-5	Σ 6-10

Σ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1.1. Zapište, co je **ekvivalence výroků** p, q a uveďte podle definice, jaký je logický význam této ekvivalence $p \Leftrightarrow q$, je to složený výrok, který tvrdí, že oba dílčí výroky jsou zároveň pravdivé nebo nepravdivé [1]

1.2. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot a zapište ekvivalenci jako a) **disjunktivní normální formu** $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ [3]

a jako b) **konjunktivní normální formu** $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ [3]

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

[1]

1.3. Zapište binární číslo hexadecimálně : $1011\ 0001{,}1101\ 0100_B = B1{,}D4_H$ [1] [1]

1.4. Vyjádřete dekadická čísla v binární číselné soustavě (na 8 míst za řádovou čárkou) :

a) $71_D = 100\ 0111_B$ [2] b) $0{,}775_D = 0{,}11\ 00011_B$ [2] c) $71{,}775_D = 100\ 0111{,}11\ 00\ \overline{0011}_B =$ [1]

$71 = 2 \cdot 35 + 1$
$35 = 2 \cdot 17 + 1$
$17 = 2 \cdot 8 + 1$
$8 = 2 \cdot 4 + 0$
$4 = 2 \cdot 2 + 0$
$2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 100\ 0111$
$1 = 2 \cdot 0 + 1$

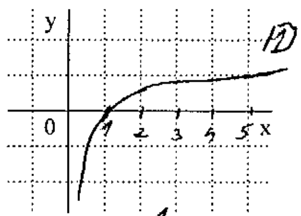
$0{,}775 \cdot 2 = 0{,}55 + 1$
$0{,}55 \cdot 2 = 0{,}1 + 1$
$0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2 + 0$
$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 + 0$
$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 + 0$

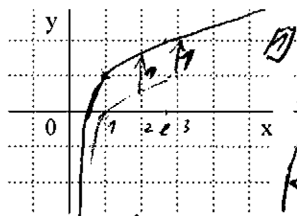
$0{,}8 \cdot 2 = 0{,}6 + 1$
$0{,}6 \cdot 2 = 0{,}2 + 1$
$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 + 0$ [1]

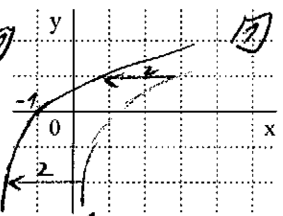
$= 100\ 0111{,}1100\ \overline{0110}\ 0$

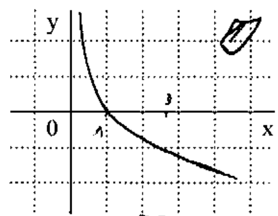
2. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují.

a) $f_1 : y = \log_5 x$; b) $f_2 : y = 1 + \ln x$; c) $f_3 : y = \ln(x+2)$; d) $f_4 : y = -\ln x$.









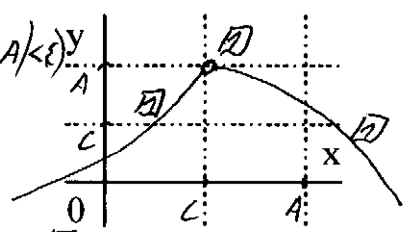
$f_1'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 5}$ [1] $f_2'(x) = \frac{1}{x}$ [1] $f_3'(x) = \frac{1}{x+2}$ [1] $f_4'(x) = -\frac{1}{x}$ [1]

$f_1^{-1} : x = 5^y$ [1] $f_2^{-1} : x = e^{y-1}$ [1] $f_3^{-1} : x = e^y - 2$ [1] $f_4^{-1} : x = e^{-y}$ [1]

3. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim_{x \to c} f(x) = A$, kde $c \in R$ a $A \in R$.

Tj. $\lim_{x \to c} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (c-\delta; c) \cup (c; c+\delta))(|f(x) - A| < \varepsilon)$ [1]

b) Načrtněte graf nějaké funkce, která má $\lim_{x \to c} f(x) = A$ a která je v $(-\infty; c)$ rostoucí a konvexní a v $(c; +\infty)$ klesající a konkávní :



c) Vypočtěte bez použití l'Hospitalova pravidla $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{16.x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{36.x+1} - \sqrt{x}} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x+1}{x}}}{6 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{6 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} = \frac{5}{5} = \underline{\underline{1}}$ [1] [1] [1]

d) Vypočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

$\lim_{x \to 1} \frac{2.x - 2 + x.\ln x}{\log_2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2 + \ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x \cdot \ln 2}} = \lim_{x \to 1} (2 + \ln x + 1) x \cdot \ln 2 = 3 \cdot \ln 2 = \ln 8$ [1] [1] [1] [1]

e) Vypočtěte :

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^x \cdot \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{(-1)}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}\right)^2 = \frac{e^{-1}}{e^2} \cdot 1 = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$ [1] [1] [1]

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080205-4-(2)

4. Za předpokladu, že $f(x)$ je funkce definovaná v nějakém okolí bodu c, zapište vztah, kterým je definována derivace funkce v bodě c : $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ $\boxed{1}$

– Zapište podle definice, jak se vypočítá derivace funkce $f(x) = \arcsin x$ v bodě $c = \frac{1}{2}$ (jen zapište pomocí limity, limitu však nepočítejte). $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}+h\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$ $\boxed{1}$

– Zderivujte funkci $f(x) = \arcsin x$.

Tj. : $f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\boxed{1}$ a vypočítejte $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \boxed{1}\ \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

– Zapište obecně Taylorův polynom 1.st. pro funkci $f(x)$ v bodě c. *Tj.* : $T_1(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c)$ $\boxed{1}$

– Když víte, že $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, zapište Taylorův polynom 1.st. pro funkci $f(x) = \arcsin x$ v bodě $c = \frac{1}{2}$. *Tj.* : $T_1(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \boxed{1}\ \arcsin\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{1}$

– Zapište obecně rovnici tečny grafu funkce $f(x)$ v bodě c. *Tj.* : $y = T_1(x)$ $\boxed{1}$

– Zapište rovnici tečny grafu funkce $f(x) = \arcsin x$ v bodě $c = \frac{1}{2}$. *Tj.* : $y = \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{1}$

– Zapište zkráceně vzorec pro derivování součinu funkcí : *Tj.* : $(u.v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ $\boxed{1}$

– Zderivujte funkci $f(x) = (1 - 3.\mathrm{tg}\,x).(x + \arccos x)$, tj. $f'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}\cdot(x + \arccos x) \boxed{1} + (1 - 3\,\mathrm{tg}\,x)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \boxed{1}$

5. a) Zapište, jak se vypočítá Riemannův integrál spojité funkce $f(x)$ na intervalu $(a;b)$, jestliže $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ ne intervalu $(a;b)$. *Tedy* : $\int_a^b f(x).dx = \boxed{1}\left[F(x)\right]_a^b = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) - \lim\limits_{x \to a^+} F(x)$ $\boxed{1}$

b) Proveďte vydělení polynomů $(3.x^3 - x^2 + 3.x + 5):(x^2 + 1) = 3x - 1$ $\boxed{1}$

$$
\begin{array}{l}
-(3x^3 \qquad + 3x) \ \boxed{1} \\
\hline
\quad -x^2 \qquad + 5 \\
\quad -(-x^2 \qquad - 1) \ \boxed{1} \\
\hline
\qquad\qquad 6
\end{array}
$$

c) Zapište rozklad neryze lomené racionální funkce na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce (použijte výsledek předchozí úlohy). *Rozklad je* : $\frac{3.x^3 - x^2 + 3.x + 5}{x^2+1} = 3x - 1 + \frac{6}{x^2+1}$ $\boxed{1}$

d) Vypočtěte pomocí předchozího rozkladu

$$\int_0^1 \frac{3.x^3 - x^2 + 3.x + 5}{x^2+1}.dx = \int\left(3x - 1 + \frac{6}{x^2+1}\right)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x + 6\,\mathrm{arctg}\,x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 + 6\,\mathrm{arctg}\,1 - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\pi}}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

e) Vypočítejte $\int_4^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right).dx = \int_4^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}\,dx \boxed{1} = \boxed{1}\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_4^{+\infty} = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_4^{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \frac{2}{\sqrt{4}} \boxed{1} = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$ $\boxed{1}$

f) Vyjádřete objem tělesa, jež je určeno rotací oblouku křivky, která je grafem funkce $f(x)$ pro $x \in \langle a;b \rangle$, kolem osy x, tj. míru množiny $\{[x;y;z] \in E_3 : x \in \langle a;b \rangle \wedge y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$. *Odpověď* : $V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$ $\boxed{1}$

g) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f(x) = 3^{x-\frac{1}{2}}$ pro $x \in \left\langle \frac{3}{2};\frac{5}{2} \right\rangle$, kolem osy x.

Řešení : $V = \pi\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(3^{x-\frac{1}{2}}\right)^2 dx \boxed{1} = \pi\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} 3^{2x-1}\,dx = \left|\begin{array}{l|l} t = 2x - 1 \ \boxed{1} & x = \frac{5}{2} \Rightarrow t = 4 \\ dt = 2\cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \ \boxed{1} & x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 2 \end{array}\right| =$

$= \pi\int_2^4 3^t\,\frac{dt}{2} \boxed{1} = \boxed{1}\left[\frac{3^t}{2\cdot\ln 3}\right]_2^4\pi = \frac{\pi 3^4}{2\cdot\ln 3} - \boxed{1}\frac{\pi 3^2}{2\cdot\ln 3} = \pi\frac{81 - 9}{2\cdot\ln 3} = \frac{\pi 72}{2\cdot\ln 3} = \underline{\frac{36}{\ln 3}\pi}$

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080205-4-(3)

6	7	8	9	10

Σ 6-10

....

datum   stud. obor   ročník   osobní číslo - STAG   student - příjmení, jméno

6. a) Zapište zjednodušeně (nebo v plném znění) první pravidlo pro substituci v neurčitém integrálu. $\boxed{1}$

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \left[\left|\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)\cdot dx \end{array}\right| = \int f(t)\cdot dt = F(t) + C\right] = F(g(x)) + C$$

b) Vypočítejte $\int\left(\frac{1}{7}+\frac{x}{7}+x^6+7^x-7.e^x\right)dx = \frac{x}{7} + \frac{x^2}{14} + \frac{x^7}{7} + \frac{7^x}{\ln 7} - 7\cdot e^x + C$

c) Vypočítejte substituční metodou :

$$\int\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.dx = \left[\left|\begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx \end{array}\right| = \int\frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C\right] = \ln|\operatorname{arctg} x| + C$$

d) Vypočtěte metodou per partes :

$$\int\sqrt{x}.\ln x.dx = \left|\begin{array}{ll} u' = x^{\frac{1}{2}} & v = \ln x \\ u = \frac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right| = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\cdot x}\,dx = \frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x - \int\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$$

7. a) Uveďte definici ostrého lokálního maxima v bodě c. *Odpověď : Za předpokladu, že funkce f je definována v okolí bod c , tj. v intervalu* $(b;d)$, *kde* $b<c<d$, *lze definovat, že funkce f má v bodě c ostré lokální maximum práv tehdy, když* existuje $\delta>0$ tak, že pro každé $x\in(c-\delta;c)\cup(c;c+\delta)$ platí $f(x)<f(c)$ $\boxed{1}$

b) Uveďte větu - postačující podmínku pro existenci ostrého lokálního maxima v bodě c . Odpověď : Jestliže $f'(c)=0$ a $f''(c)<0$, potom funkce $f(x)$ má v bodě c ostré lok. maximum $\boxed{1}$

c) Je dána funkce $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$. – Určete její maximální definiční obor, tj. Df $= R-\{2\} = (-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

Funkci můžete před derivováním vhodně upravit, tj. $f(x) = x - 1 + (x-2)^{-1}$ nebo $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-2}$

– Vypočítejte 1. a 2. derivaci funkce a výsledek upravte na součin a podíl lineárních dvojčlenů.

$$f'(x) = 1 - (x-2)^{-2} = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(x-2)^2} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 3$$

– Najděte stacionární body funkce : Stacionární body $x_1 = 1$ $\boxed{1}$ $x_2 = 3$ $\boxed{1}$

$$f''(x) = 2\cdot(x-2)^{-3} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

– Určete všechny ostré lokální extrémy funkce $f(x)$.

$f'(1) = 0 \wedge f''(1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow$ V $x_1 = 1$ nastává lok. maximum $f(1) = -1$

$f'(3) = 0 \wedge f''(3) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow$ V $x_2 = 3$ nastává lok. minimum $f(3) = 3$

– Určete intervaly, kde je funkce $f(x)$ rostoucí a kde klesající   – Určete intervaly, kde je $f(x)$ konvexní a kde konkávní.

monotonie	$(-\infty;1)$	$(1;2)$	$(2;3)$	$(3;+\infty)$
$(x-1)$	–	+	+	+
$(x-3)$	–	–	–	+
$(x-2)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	–	–	+
$f(x)$	rostoucí	klesající	klesající	rostoucí

konvexnost konkávnost	$(-\infty;2)$	$(2;+\infty)$
$(x-2)$	–	+
$(x-2)^3$	–	+
$f''(x)$	–	+
$f(x)$	konkávní	konvexní

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080205-4-(4)

8. a) Co je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Za předpokladu, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a že $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, lze definovat: Posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

b) Co platí o limitě vybrané posloupnosti? Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in R^*$, potom každá posloupnost z ní vybraná má rovněž limitu, která je rovna číslu a.

Vyřešte c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2.n-5}{3.n+1}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{4}{9}$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2.n+1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{+\infty}{e} = +\infty$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3+2.\sqrt[n]{n}}{6.\sqrt[n]{2}-2.\sqrt[n]{n}} = \frac{3+2\cdot1}{6\cdot1-2\cdot1} = \frac{5}{4}$ f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3.5^{n-1}+4.3^n}{5.3^n-5^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot\frac{5^{n-1}}{5^n}+4\cdot\frac{3^n}{5^n}}{5\cdot\frac{3^n}{5^n}-\frac{5^n}{5^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5\left(\frac{3}{5}\right)^n-1} = -\frac{3}{5}$

9. a) Zapište předpoklady a tvrzení integrálního kritéria pro konvergenci resp. divergenci mocninné řady.

Předpoklady : 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s* kladnými *členy a 2. Existuje* nerostoucí kladná funkce $f(x)$ definovaná na $\langle 1,+\infty)$ tak, že $\forall n \in N$ je $a_n = f(n)$, potom

Tvrzení : řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\infty} f(x)\cdot dx$.

Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5.n-2}$; $\int_1^{\infty}\frac{1}{5x-2}dx = \left|\begin{matrix} t=5x-2 & x\to\infty \Rightarrow t\to+\infty \\ dt=5\cdot dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{5} & x=1 \Rightarrow t=3\end{matrix}\right| = \int_3^{\infty}\frac{1}{t}\frac{dt}{5} = \left[\frac{1}{5}\ln|t|\right]_3^{\infty} = *$

$* = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{5}\ln|t| - \frac{1}{5}\ln 3 = +\infty$, tj. integrál diverguje k $+\infty$ ⇒ řada $\sum a_n$ diverguje dle integrálního kritéria

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{5.n-2}$ 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – alternující řada; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n-2} = 0$,

3) $\forall n\in N$ $|a_n| = \frac{1}{5n-2} > \frac{1}{5(n+1)-2} = |a_{n+1}|$, tj. posl. $\{a_n\}$ je klesající a nerostoucí.

⇒ Dle Leibnitzova kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}}{\left(4-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{2}}}{4-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 \Rightarrow$

⇒ Dle odmocninového kritéria řada $\sum a_n$ konverguje

10. a) Určete střed, poloměr a interval konvergence dané mocninné řady : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{10^{n-1}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+2}}{10^n}}{\frac{x^{n+1}}{10^{n-1}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{10} < 1 \iff x \in (-10;10)$

Střed konvergence : c = 0

Poloměr konvergence : R = 10

Dle limitního podílového kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje pro $x\in(-10;10)$

Interval konvergence : I = $(-10, 10)$

Uveďte kritérium, podle něhož rozhodujete o konvergenci : *Použité kritérium :* podílové

b) Ověřte, že daná mocninná řada je geometrická a určete její součet v oboru konvergence I.

$\forall n \in N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+2}}{10^n}}{\frac{x^{n+1}}{10^{n-1}}} = \frac{x}{10} = q$, řada je geometrická

Součet řady $s = f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_1\frac{1-q^n}{1-q} = \lim\limits_{n\to\infty} x^2\frac{1-\left(\frac{x}{10}\right)^n}{1-\frac{x}{10}} = \frac{x^2}{\frac{10-x}{10}} = \frac{10x^2}{10-x}$ pro $x\in(-10,10)$

c) Derivujte danou řadu člen po členu a určete její součet součet v I.

$f'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{10^{n-1}}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot x^n}{10^{n-1}} =$

$= \left(\frac{10x^2}{10-x}\right)' = \frac{20x(10-x)-10x^2(-1)}{(10-x)^2} = \frac{200x-20x^2+10x^2}{(10-x)^2} =$

$= \frac{200x-10x^2}{(10-x)^2} = \frac{10x(20-x)}{(10-x)^2}$

d) Integrujte danou řadu člen po členu a určete její součet v I.

$\int f(x).dx = \int\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{10^{n-1}}\right)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)10^{n-1}} + C =$

$= \int\frac{10x^2}{10-x}dx = \int\left(-10x-100-\frac{1000}{x-10}\right)dx =$

$= -5x^2-100x-1000\ln|x-10|+C$