FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMA1E – EXM1080130-2-(1)

1	2	3	4	5

$\sum$ 1-5	$\sum$ 6-10

$\sum$ 1-10

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(q \Rightarrow \neg p)$	$(p \vee q)$	$(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q)$
1	1	_	_	_	_	_
1	0	_	_	_	_	_
0	1	_	_	_	_	_
0	0	_	_	_	_	_

Vyjádřete výrok $(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q)$ jako disjunktivní normální formu, tj.

$(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q) \equiv$ ____

Vyjádřete výrok $(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q)$ jako konjunktivní normální formu, tj.

$(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q) \equiv$ ____

d) Vyjádřete hexadecimální číslo $y_{(16)} = 4D7{,}0B$ v binární a dekadické číselné soustavě.

$y_{(2)} =$; $y_{(10)} =$

2.1. Doplňte definici : ***Lineární kombinace** vektorů* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ *je ...*

2.2. Doplňte definici : *Skupina vektorů* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ *je **lineárně nezávislá*** právě když ...

2.3. Jsou dány vektory $\vec{u}_1 = (5; -3; 4), \vec{u}_2 = (-1; 3; 1), \vec{u}_3 = (7; 3; 11)$ z R^3. Vypočtěte

a) vektor $\vec{v}_a$, který je lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$ s koeficienty $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = (10; -2; 0)$;

$\vec{v}_a =$

b) vektor $\vec{v}_b$, který je lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$ s koeficienty $(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = (2; 3; -1)$

$\vec{v}_b =$

c) Na základě výsledků a), resp. b) rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$ lineárně závislé, resp. nezávislé, a odůvodněte proč. *Vektory* $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$ ***jsou lineárně***... *, protože ...*

3.1. Napište, čím se vyznačuje nehomogenní soustava lineárních rovnic.

Odpověď : ____

3.2. Najděte obecné řešení soustavy lineárních rovnic (Gaussovou metodou), určete hodnost matice soustavy, hodnost matice rozšířené, zapište vektor řešení.

$$\begin{aligned}
-x_1 + 2.x_2 - x_3 &= 1 \\
2.x_1 - 3.x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
3.x_1 - 4.x_2 + x_3 + 2.x_4 &= 1 \\
-4.x_1 + 5.x_2 - x_3 - 3.x_4 &= -2
\end{aligned}$$

4. Napište, co je subdterminant prvku $a_{p,k}$ v matici $\mathbf{A}$, jak se označuje a jak se vypočítá, když matice $\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{i\in\{1,2,\cdots,n\}\\ j\in\{1,2,\cdots,n\}}}$. *Tj.* ***Subdterminant prvku*** $a_{p,k}$ *v matici A je* .... ***,označuje se :***

a vypočítá se ...

Napište, co je algebraický doplněk prvku $a_{p,k}$ v matici $\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{i\in\{1,2,\cdots,n\}\\ j\in\{1,2,\cdots,n\}}}$, jak se označuje a vypočítá. *Tj.* ***Algebraický doplněk prvku*** $a_{p,k}$ ***v matici A je*** .... , ***označuje se :***

a vypočítá se (vzoreček nebo slovy) ...

– Za jakých podmínek existuje k matici A inverzní matice A^{-1}. *Tj. : K matici* A *existuje inverzní matice* A^{-1}, pokud je matice A ____________________ a ________________

– Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 2, \\ 5, & 7, \end{pmatrix}$, vypočítejte její determinant, tj. $\det A = \begin{vmatrix} 2, & 2, \\ 5, & 7, \end{vmatrix} =$

– Je matice $\mathbf{A}$ singulární nebo regulární ? Proč ? *Odpověď : Matice* $\mathbf{A}$ *je* *protože*

– Napište k matici $\mathbf{A}$ adjungovanou matici $\operatorname{adj} A$. | $A_{11} =$ $A_{12} =$

| $A_{21} =$ $A_{22} =$

Tedy : $\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & , & \\ & , & \end{pmatrix}$

– Zapište (vzoreček), jak se z adjungované matice $\operatorname{adj} A$ vytvoří inverzní matice A^{-1}. Tj. : $A^{-1} =$

– Vypočtěte z adjungované matice inverzní matici A^{-1}. *Tj. :* $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} & , & \\ & , & \end{pmatrix}$

---

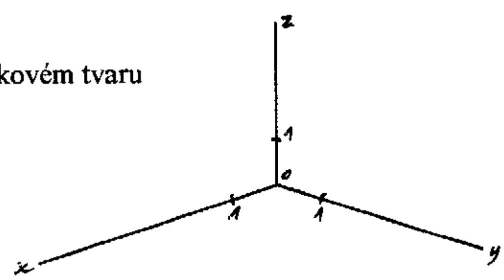
5. Jsou dány body $A = [1;6;0]$, $B = [6;0;-10]$ $C = [0;-12;10]$. a) Vypočítejte vzdálenost bodů A, B. *Tj.* $d(AB) =$

b) Zapište přímku $p \equiv AB$ pomocí parametrických rovnic.

c) Zapište rovinu $\rho \equiv ABC$ pomocí parametrických rovnic.

d) Vypočtěte normálový vektor roviny $\rho \equiv ABC$ a zapište její obecnou rovnici.

e) Vyjádřete rovnici roviny $\rho : 10.x + 5.y + 8.z - 20 = 0$ v úsekovém tvaru a načrtněte stopy roviny do souřadné soustavy xyz.



FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMA1E – EXM1080130-2-(3)

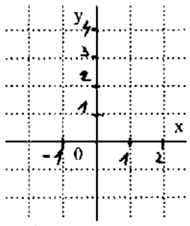
6	7	8	9	10		Σ 6-10

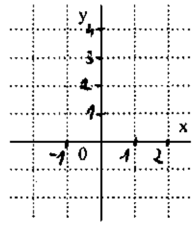
....

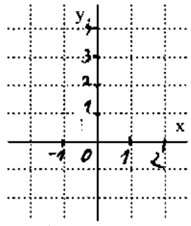
datum   stud. obor   ročník   osobní číslo - STAG   student - příjmení, jméno

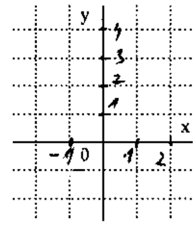
6. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují na jejich maximálním definičním oboru.

a) $f_1 : y = e^x$;   b) $f_2 : y = -2 + e^x$;   c) $f_2 : y = 4^x$;   d) $f_2 : y = 4^{-x}$.









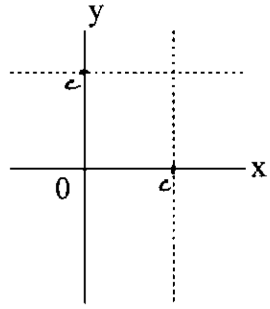
X

$f_1'(x) =$ $f_2'(x) =$ $f_3'(x) =$ $f_4'(x) =$

f_1^{-1} : f_2^{-1} : f_3^{-1} : f_4^{-1} :

7. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$, kde $c \in R$,

tj. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$



b) Načrtněte graf nějaké funkce, která má právě uvedenou limitu :
- Je graf této funkce napravo od bodu c rostoucí či klesající ? *Je* ....
- Je graf této funkce napravo od bodu c konvexní či konkávní? *Je* ....
- Jak se nazývá přímka x = c ? *Je to* ....

c) Vypočtěte limitu bez použití l'Hospitalova pravidla :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(4.x^2+1).(4.x^2-1)}{x^2.(3.x+1)^2} =$$

d) Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 1^+} (4.x-3)^{\frac{1}{2.x-2+\ln x}} =$

e) Vypočtěte za použití l'Hospitalova pravidla :

$$\lim_{x \to 0} \frac{2.x - \sin(2.x)}{x^3} =$$

8.a) Zapište vztah pro derivaci složené funkce $h(x) = f(g(x))$ v bodě x, tj. $h'(x) =$

b) Je dána funkce $f(x) = -x + \ln(x^2 + e)$, určete $f(0) =$, určete 1. a 2. derivaci.

$f'(x) =$ $f''(x) =$

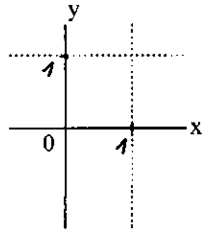
c) Vyjádřete $f'(0)$ a zjistěte, zda je funkce $f(x)$ v bodě c = 1 rostoucí či klesající (odůvodněte). | $f'(0) =$

d) Vyjádřete $f''(0)$ a zjistěte, zda je funkce $f(x)$ bodě c = 0 konvexní či konkávní (odůvodněte). | $f''(0) =$

e) Napište rovnici tečny grafu funkce $f(x) = -x + \ln(x^2 + e)$ v $T = [0; f(0)] = [\ 0 ;\ \ ]$

Rovnice tečny t :

f) Nakreslete do kartézské soustavy souřadnic bod T, tečnu t a charakteristický oblouk grafu funkce.



9. a) Napište podle definice, co je **primitivní funkce** k funkci $f(x)$. *Odpověď :*

b) Vypočítejte (kde je e – Eulerovo číslo)

$$\int\left(x^{e-2}+e^{x}+(e-1)^{x}\right)dx=$$

c) Vypočítejte substituční metodou :

$$\int\frac{14.x-4}{7.x^{2}-4.x+1}.dx=\left[\left|\begin{array}{l} t= \\ dt= \end{array}\right|\right]=$$

d) Vypočtěte metodou per partes : $\int\left(\frac{1}{x^{2}}+x^{2}\right).\ln x.dx=\left|\begin{array}{ll} u'= & v= \\ u= & v'= \end{array}\right|=$

10. a) Uveďte tvrzení základní věty integrálního počtu. Tj. *: Za předpokladu, že je* f *funkce která je na intervalu* $\langle a;b\rangle$ *riemanovsky integrovatelná a k níž existuje primitivní funkce* F *na intervalu* $\langle a;b\rangle$*, potom platí Newtonův vzorec :*

b) Rozložte integrovanou funkci na součet parciálních zlomků a integrál vypočítejte $\int_{-1}^{1}\frac{4.x^{2}+12.x+10}{(2.x+3)^{3}}.dx=$

Rozklad :

$$\frac{4.x^{2}+12.x+10}{(2.x+3)^{3}}=\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}$$

c) Vypočítejte $\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^{2}+1}\right).dx=$

d) Vyjádřete obsah křivočarého lichoběžníka určeného grafem funkce $f(x)$ nad intervalem $\langle a;b\rangle$, tj. míru

množiny $\{[x;y]\in E_{2}: x\in\langle a;b\rangle\wedge 0\le y\le f(x)\}$. *Odpověď :* $P=$

e) Vypočtěte obsah plochy křivočarého lichoběžníka, který je určen grafem funkce

$f(x)=\frac{10}{\pi}-3.\sin x+6.\cos x$ nad intervalem $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$. *Řešení :* $P=$

FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMA1E – EXM1080130-2-(1)

1	2	3	4	5

Σ 1-5	Σ 6-10

Σ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot

p	q	¬ p	¬ q	(q ⇒ ¬ p)	(p ∨ q)	(q ⇒ ¬ p) ∧ (p ∨ q)
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1 $\boxed{1}$	0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{1}$

Vyjádřete výrok $(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q)$ jako disjunktivní normální formu, tj.

$(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q) \equiv$ $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ $\boxed{3}$

Vyjádřete výrok $(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q)$ jako konjunktivní normální formu, tj.

$(q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \vee q) \equiv$ $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ $\boxed{3}$

d) Vyjádřete hexadecimální číslo $y_{(16)} = 4D7{,}0B$ v binární a dekadické číselné soustavě.

$y_{(2)} = 100\ 1101\ 0111{,}0000\ 1011_{(2)}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$; $y_{(10)} = 4 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16 + 7 + 0 \cdot 16^{-1} + 11 \cdot 16^{-2} =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= 1024 + 208 + 7 + \frac{11}{256} = 1239\frac{11}{256} = 1239{,}04296875$ $\boxed{1}$

2.1. Doplňte definici : ***Lineární kombinace*** *vektorů* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_m$ *je ...* každý vektor $\boxed{1}$

$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \vec{u}_m$, kde $\alpha_i \in R, \forall i \in \{1, .., m\}$

2.2. Doplňte definici : *Skupina vektorů* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_m$ *je* ***lineárně nezávislá*** právě když ...

jedinou jejich lineární kombinací, která je rovna nulovému vektoru, $\boxed{1}$

je lineární kombinace, v níž jsou všechny její koeficienty nulové,

tj. lineární kombinace je triviální

2.3. Jsou dány vektory $\vec{u}_1 = (5; -3; 4), \vec{u}_2 = (-1; 3; 1), \vec{u}_3 = (7; 3; 11)$ z R^3. Vypočtěte

a) vektor $\vec{v}_a$, který je lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$ s koeficienty $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = (10; -2; 0)$;

$\vec{v}_a = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{u}_3 = (50; -30; 40) + (2, -6, -2) + (0, 0, 0) = (52; -36; 38)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) vektor $\vec{v}_b$, který je lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$ s koeficienty $(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = (2; 3; -1)$ $\boxed{2}$

$\vec{v}_b = \beta_1 \cdot \vec{u}_1 + \beta_2 \cdot \vec{u}_2 + \beta_3 \cdot \vec{u}_3 = (10, -6, 8) + (-3; 9, 3) + (-7, -3, -11) = (0, 0, 0) = \vec{o}$ $\boxed{2}$

c) Na základě výsledků a), resp. b) rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$ lineárně závislé, resp. nezávislé, a odůvodněte proč. *Vektory* $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3$ *jsou* ***lineárně*** ...závislé $\boxed{1}$, *protože* netriviální LK rovná nulovému vektoru $\vec{o}$ $\boxed{2}$

3.1. Napište, čím se vyznačuje nehomogenní soustava lineárních rovnic.

Odpověď: Vektor pravých stran je nenulový $\boxed{1}$

3.2. Najděte obecné řešení soustavy lineárních rovnic (Gaussovou metodou) a určete hodnost matice soustavy a hodnost matice rozšířené.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2.x_2 - x_3 &= 1 \\
2.x_1 - 3.x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
3.x_1 - 4.x_2 + x_3 + 2.x_4 &= 1 \\
-4.x_1 + 5.x_2 - x_3 - 3.x_4 &= -2
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$ $A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} -1, & 2, & -1, & 0 & 1 \\ 2, & -3, & 1, & 1 & 0 \\ 3, & -4, & 1, & 2 & 1 \\ -4, & 5, & -1, & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} (2)(3)(-4) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1, & 2, & -1, & 0 & 1 \\ 0, & 1, & -1, & 1 & 2 \\ 0, & 2, & -2, & 2 & 4 \\ 0, & -3, & 3, & -3 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ (-2)(3) \\ \\ \end{matrix}$ $\boxed{2}$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & -2, & 1, & 0 & -1 \\ 0, & 1, & -1, & 1 & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right) \boxed{2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & -2, & 1, & 0 & -1 \\ 0, & 1, & -1, & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\left.\begin{matrix} h_s = 2 \ \boxed{1} \\ h_r = 2 \ \boxed{1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ soustava má alespoň jedno řešení; $\boxed{1}$

$n = 4, n - h = 4 - 2 = 2$ - parametry $\boxed{1}$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ $\boxed{1}$ $x_3 = t$ - parametr R, $x_4 = u$ - parametr R, $x_2 = 2 + x_3 - x_4 \Rightarrow$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$x_2 - x_3 + x_4 = 2$, $x_1 = -1 + 2x_2 - x_3 = -1 + 4 + 2t - 2u - t = 3 + t - 2u$ $\boxed{1}$

$x_2 = 2 + t - u$; $\boxed{1}$

Vektor řešení $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 + t - 2u, 2 + t - u, t, u)$ $\forall (t, u) \in R^2$ $\boxed{1}$

FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMA1E – EXM1080130-2-(3)

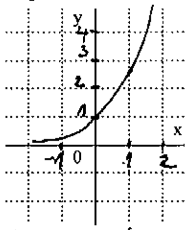
6	7	8	9	10		$\sum$ 6-10

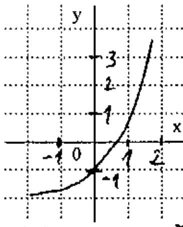
....

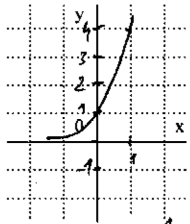
datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

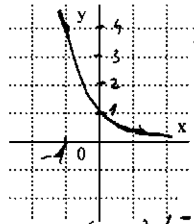
6. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují na jejich maximálním definičním oboru.

a) $f_1 : y = e^x$; b) $f_2 : y = -2 + e^x$; c) $f_2 : y = 4^x$; d) $f_2 : y = 4^{-x}$.







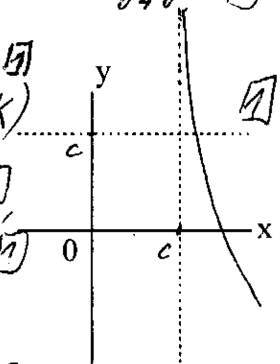


$f_1'(x) = e^x$ [1] $f_2'(x) = e^x$ [1] $f_3'(x) = 4^x \cdot \ln 4$ [1] $f_4'(x) = (-1) 4^{-x} \cdot \ln 4$ [1]

$f_1^{-1} : x = \ln y$ [1] $f_2^{-1} : x = \ln(2+y)$ [1] $f_3^{-1} : x = \log_4 y$ [1] $f_4^{-1} : x = -\log_4 y$ [1]

7. a) Zapište podle definice, co znamená, že $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$, kde $c \in R$, [1]

tj. $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$ $(\forall K \in R)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (c; c+\delta))(f(x) > K)$



b) Načrtněte graf nějaké funkce, která má právě uvedenou limitu : [1]

- Je graf této funkce napravo od bodu c rostoucí či klesající ? *Je* klesající [1]
- Je graf této funkce napravo od bodu c konvexní či konkávní? *Je* konvexní [1]
- Jak se nazývá přímka x = c ? *Je to* asymptota [1]

c) Vypočtěte limitu bez použití l'Hospitalova pravidla :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(4.x^2+1).(4.x^2-1)}{x^2.(3.x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{16x^4 - 1}{9x^4 + 6x^3 + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{16 - \frac{1}{x^4}}{9 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{16}{9}$$ [1] [1] [1] [1]

d) Vypočtěte $\lim_{x\to 1^+} (4.x-3)^{\frac{1}{2.x-2+\ln x}} = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{\ln(4x-3)}{2x-2+\ln x}} = e^{\frac{4}{3}} = e \cdot \sqrt[3]{e}$ [1] [1]

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(4x-3)}{2x-2+\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{4}{4x-3}}{2+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{4}{4x-3}}{\frac{2x+1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{4x}{(4x-3)(2x+1)} = \frac{4}{3}$$ [1] [1] [1] [1]

e) Vypočtěte za použití l'Hospitalova pravidla :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2.x - \sin(2.x)}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{l'HP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos(2x)}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{l'HP}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot\sin(2x)}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{8\cos(2x)}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$ [1] [1] [1] [1] [1]

8.a) Zapište vztah pro derivaci složené funkce $h(x) = f(g(x))$ v bodě x, tj. $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ [1]

b) Je dána funkce $f(x) = -x + \ln(x^2 + e)$, určete $f(0) = 1$, určete 1. a 2. derivaci.

$f'(x) = -1 + \frac{2x}{x^2+e}$ [1] $f''(x) = \frac{2(x^2+e) - 2x \cdot 2x}{(x^2+e)^2} = \frac{2e - 2x^2}{(x^2+e)^2}$ [1]

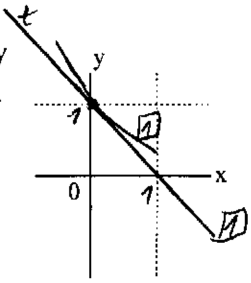
c) Vyjádřete $f'(0)$ a zjistěte, zda je funkce $f(x)$ v bodě c = 1 rostoucí či klesající (odůvodněte) | $f'(0) = -1 < 0 \Rightarrow f(x)$ v $x = 0$ klesající [1] [1]

d) Vyjádřete $f''(0)$ a zjistěte, zda je funkce $f(x)$ bodě c = 0 konvexní či konkávní (odůvodněte). | $f''(0) = \frac{2e}{e^2} = \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow f(x)$ je v $x = 0$ konvexní [1] [1]

e) Napište rovnici tečny grafu funkce $f(x) = -x + \ln(x^2 + e)$ v $T = [0; f(0)] = [0; 1]$

Rovnice tečny t : $y = 1 - x$ [1]

f) Nakreslete do kartézské soustavy souřadnic bod T, tečnu t a charakteristický oblouk grafu funkce.



[1] [1]

4. Napište, co je subdterminant prvku $a_{p,k}$ v matici **A**, jak se označuje a jak se vypočítá, když matice $\mathbf{A}=(a_{i,j})_{\substack{i\in\{1,2,\cdots,n\}\\ j\in\{1,2,\cdots,n\}}}$. *Tj. Subdterminant prvku* $a_{p,k}$ *v matici A je* číslo $\boxed{1}$, *označuje se :* $A^{*}_{p,k}$ $\boxed{1}$
a vypočítá se ... jako determinant matice, která se získá $\boxed{1}$ z matice A vynecháním $\boxed{1}$ jejího p-tého řádku a k-tého sloupce

Napište, co je algebraický doplněk prvku $a_{p,k}$ v matici $\mathbf{A}=(a_{i,j})_{\substack{i\in\{1,2,\cdots,n\}\\ j\in\{1,2,\cdots,n\}}}$, jak se označuje a vypočítá. *Tj.* ***Algebraický doplněk prvku*** $a_{p,k}$ ***v matici A je*** číslo $\boxed{1}$, ***označuje se :*** $A_{p,k}$ $\boxed{1}$
a vypočítá se (vzoreček nebo slovy) ... $A_{p,k} = (-1)^{p+k}\cdot A^{*}_{p,k}$ $\boxed{1}$

– Za jakých podmínek existuje k matici A inverzní matice A^{-1}. *Tj. : K matici* A *existuje inverzní matice* A^{-1}, pokud je matice A čtvercová $\boxed{1}$ a regulární $\boxed{1}$

– Je dána matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2, & 2,\\ 5, & 7,\end{pmatrix}$, vypočítejte její determinant, tj. $\det A=\begin{vmatrix}2, & 2,\\ 5, & 7,\end{vmatrix} = 2\cdot 7 - 2\cdot 5 = 4$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

– Je matice **A** singulární nebo regulární ? Proč ? *Odpověď : Matice* **A** *je* regulární protože $\det A \neq 0$ $\boxed{1}$

– Napište k matici **A** adjungovanou matici adj A . | $A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \det(7) = 7$ $\boxed{1}$ $A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\det(5) = -5$ $\boxed{1}$
| $A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\det(2) = -2$ $\boxed{1}$ $A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\det(2) = 2$

Tedy $\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix}7, & -2\\ -5, & 2\end{pmatrix}$ $\boxed{1}$

– Zapište (vzoreček), jak se z adjungované matice adj A (k matici A) vytvoří inverzní matice A^{-1}. Tj. : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj} A$ $\boxed{1}$

– Vypočtěte z adjungované matice inverzní matici A^{-1},
tj. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}7, & -2\\ -5, & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{4}; & -\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4}; & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\boxed{1}$

5. Jsou dány body $A=[1;6;0]$, $B=[6;0;-10]$ $C=[0;-12;10]$. a) Vypočítejte vzdálenost bodů A, B. *Tj.* $d(AB)=\sqrt{(6-1)^2+(0-6)^2+(-10-0)^2} = \sqrt{5^2+(-6)^2+(-10)^2} = \sqrt{161}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) Zapište přímku $p \equiv AB$ pomocí parametrických rovnic.

$p: X = A + t\cdot\vec{s} = [1,6,0] + t\cdot(5,-6,-10)$; $p: x = 1+5t$ $\boxed{1}$
$y = 6-6t$ $\boxed{1}$
$z = -10t$ $\boxed{1}$

Směrový vektor $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,-6,-10)$ $\boxed{1}$

c) Zapište rovinu $\rho \equiv ABC$ pomocí parametrických rovnic.

$\rho: X = A + t\cdot\vec{s_1} + m\cdot\vec{s_2} = [1;6;0] + t\cdot(5;-6;-10) + m(-1;-18;10)$

$\vec{s_1} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5;-6;-10)$
$\vec{s_2} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-1;-18;10)$ $\boxed{1}$

$\rho: x = 1+5t-m$ $\boxed{1}$
$y = 6-6t-18m$ $\boxed{1}$
$z = -10t+10m$ $\boxed{1}$

③ $\rho: 30x + 5y + 12z - 40 = 0$

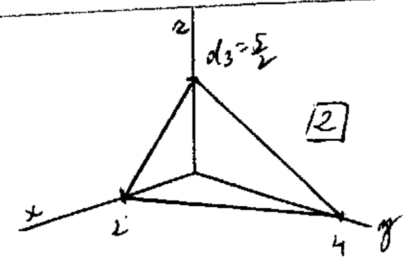
d) Zapište obecnou rovnici roviny $\rho \equiv ABC$. ② $\rho: -240x - 40y - 96z + d = 0$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow \rho: -240x - 40y - 96z + 480$

① Normálový vektor roviny ρ ③ $A\in\rho \Rightarrow -240\cdot 1 - 40\cdot 6 - 96\cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 240+240 = +480$

① $\vec{n} = \vec{s_1}\times\vec{s_2} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5; & -6; & -10\\ -1; & -18; & 10\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix}-6; & -10\\ -18; & 10\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix}5; & -10\\ -1; & 10\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}5; & -6\\ -1; & -18\end{vmatrix} = -240\vec{i} - 40\vec{j} - 96\vec{k} = (-240; -40; -96)$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

e) Vyjádřete rovnici roviny ρ v úsekovém tvaru a načrtněte stopy roviny do souřadné soustavy xyz.

$\rho: 10x + 5y + 8z - 20 = 0$
$10x + 5y + 8z = 20 \;/\; \frac{1}{20}$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{\frac{5}{2}} = 1$ $\boxed{1}$, úseky $d_1 = 2$, $d_2 = 4$, $d_3 = \frac{5}{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$



$\boxed{2}$

9. a) Napište podle definice, co je **primitivní funkce** k funkci $f(x)$. *Odpověď:* Funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu J s krajními body a, b; $a < b$ ($a \in R^*$; $b \in R^*$) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ a) Pro každý bod $x \in (a, b)$ platí $F'(x) \underset{\boxed{1}}{=} f(x)$; b) $F'_+(a) = f(a)$, pokud $a \in J$) $\boxed{1}$
c) $F'_-(b) = f(b)$, pokud $b \in J$)

b) Vypočítejte (kde je e – Eulerovo číslo)

$$\int \left(x^{e-2} + e^x + (e-1)^x \right) dx = \underset{\boxed{1}}{\frac{x^{e-1}}{e-1}} + \underset{\boxed{1}}{e^x} + \underset{\boxed{1}}{\frac{(e-1)^x}{\ln(e-1)}} + C$$

c) Vypočítejte substituční metodou :

$$\int \frac{14.x-4}{7.x^2-4.x+1}.dx = \left[\left| \begin{matrix} t = 7x^2 - 4x + 1 \; \boxed{1} \\ dt = (14x-4)\,dx \; \boxed{1} \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}\,dt \overset{\boxed{1}}{=} \ln|t| + C \right] = \underline{\underline{\ln|7x^2 - 4x + 1| + C}} \; \boxed{1}$$

d) Vypočtěte metodou per partes : $\boxed{1}$

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + x^2 \right).\ln x.dx = \left| \begin{matrix} u' = x^{-2} + x^2 & v = \ln x \; \boxed{1} \\ u = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^3}{3} & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| \overset{\boxed{1}}{=} \left(-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right) \cdot \ln x - \overset{\boxed{1}}{\int} \left(-x^{-1} + \frac{x^3}{3} \right) \cdot \frac{1}{x}\,dx \overset{\boxed{1}}{=}$$

$$= \left(-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right) \ln x + \int \left(x^{-2} - \frac{x^2}{3} \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right) \ln x + \overset{\boxed{1}}{\frac{x^{-1}}{-1}} - \frac{x^3}{9} + C =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \right) \ln x - \frac{1}{x} - \frac{x^3}{9} + C$$

10. a) Uveďte tvrzení základní věty integrálního počtu. Tj. *: Za předpokladu, že je f funkce která je na intervalu $\langle a ; b \rangle$ riemanovsky integrovatelná a k níž existuje primitivní funkce F na intervalu $\langle a ; b \rangle$, potom platí Newtonův vzorec :* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ $\boxed{1}$

b) Rozložte integrovanou funkci na součet parciálních zlomků a integrál vypočítejte

$$\int_{-1}^{1} \frac{4.x^2+12.x+10}{(2.x+3)^3}.dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{(2x+3)^3} + \overset{\boxed{1}}{\frac{1}{2x+3}} \right) dx = \left| \begin{matrix} t = 2x+3 \; \boxed{1} \\ dt = 2\,dx \Rightarrow dx \overset{\boxed{1}}{=} \frac{dt}{2} \end{matrix} \right| \begin{matrix} x = 1 \Rightarrow t = 5 \\ x = -1 \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \Bigg| =$$

Rozklad :

$$\frac{4.x^2+12.x+10}{(2.x+3)^3} = \frac{A}{(2x+3)^3} + \frac{B}{(2x+3)^2} + \frac{C}{(2x+3)} \; \boxed{1}$$

$4x^2 + 12x + 10 = A + 2Bx + 3B + 4Cx^2 + 12Cx + 9C$

$x^2 : \; 4C = 4 \Rightarrow C = 1 \; \boxed{1}$

$x : \; 2B + 12C = 12 \Rightarrow B = 0 \; \boxed{1}$

$x^0 : \; A + 3B + 9C = 10 \Rightarrow A = 1 \; \boxed{1}$

$$= \int_1^5 \overset{\boxed{1}}{} \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{2} =$$

$$= \int_1^5 \left(t^{-3} + \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \left[\overset{\boxed{1}}{\frac{t^{-2}}{-2}} + \overset{\boxed{1}}{\ln|t|} \right]_1^5 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2 \cdot t^2} + \ln|t| \right]_1^5 \overset{\boxed{1}}{=} -\frac{1}{100} + \frac{\ln 5}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln 1}{2} \; \boxed{1}$$

$$\underline{= \frac{1}{2}\ln 5 + 0{,}24}$$

c) Vypočítejte

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} \right).dx = \overset{\boxed{1}}{\left[\operatorname{arctg} x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\infty}} \overset{\boxed{1}}{=} \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} \overset{\boxed{1}}{=} \underset{\boxed{1}}{\frac{\pi}{2}} - \underline{\underline{\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}}}$$

d) Vyjádřete obsah křivočarého lichoběžníka určeného grafem funkce $f(x)$ nad intervalem $\langle a ; b \rangle$, tj. míru množiny $\{ [x ; y] \in E_2 : x \in \langle a ; b \rangle \wedge 0 \le y \le f(x) \}$. *Odpověď:* $P = \int_a^b f(x)\,dx$ $\boxed{1}$

e) Vypočtěte obsah plochy křivočarého lichoběžníka, který je určen grafem funkce

$f(x) = \frac{10}{\pi} - 3.\sin x + 6.\cos x$ nad intervalem $\left\langle -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Řešení :

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{10}{\pi} - 3 \cdot \sin x + 6 \cdot \cos x \right) dx \; \boxed{1} = \left[\overset{\boxed{1}}{\frac{10}{\pi} x} + \overset{\boxed{1}}{3 \cos x} + \overset{\boxed{1}}{6 \sin x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{10}{\pi} \frac{\pi}{2} + 3 \overbrace{\cos \frac{\pi}{2}}^{=0} + 6 \cdot \overbrace{\sin \frac{\pi}{2}}^{=1}}_{\boxed{1}} - \underbrace{\left[\frac{10}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 \overbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} + 6 \overbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{=-1} \right]}_{\boxed{1}} = 5 + 0 + 6 + 5 + 0 + 6 = \underline{\underline{22\,(\text{j}^2)}} \; \boxed{1}$$