FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080128-3-(1)

1	2	3	4	5

$\sum$ 1-5	$\sum$ 6-10

$\sum$ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. a) Doplňte tabulku pravdivostních hodnot

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \Rightarrow \neg q)$	$(\neg p \vee q)$	$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
1	1	_	_	_	_	_
1	0	_	_	_	_	_
0	1	_	_	_	_	_
0	0	_	_	_	_	_

b) Vyjádřete výrok $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ jako disjunktivní normální formu, *tj.*

$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \equiv$ ______________________________

c) Vyjádřete výrok $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ jako konjunktivní normální formu, *tj.*

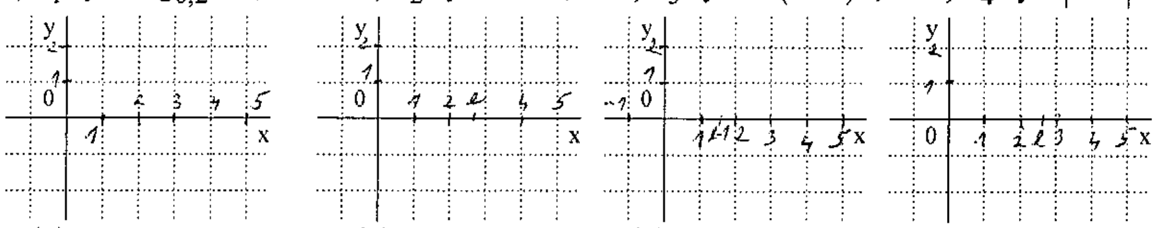
$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \equiv$ ______________________________

d) Vyjádřete hexadecimální číslo $y_{(16)} = 2E3{,}0C$ v binární a dekadické číselné soustavě.

$y_{(2)} =$; $y_{(10)} =$

2-T06-8. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, určete jejich definiční obory, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují na jejich maximálním definičním oboru.

a) $f_1 : y = \log_{0,2} x$; b) $f_2 : y = \ln x$; c) $f_3 : y = \ln(x+1)$; d) $f_4 : y = |\ln x|$.



$f_1'(x) =$ $f_2'(x) =$ $f_3'(x) =$ $f_4'(x) =$

f_1^{-1} : f_2^{-1} : f_3^{-1} : f_4^{-1} :

3. a) Určete $\lim\limits_{x \to +\infty} 2.\mathrm{arctg}\, x =$ Má funkce horizontální (vodorovnou) asymptotu?

Odpověď: Funkce $f(x) = 2.\mathrm{arctg}\, x$ .... *horizontální asymptotu, její rovnicí je* a : ....

b) Vypočtěte bez l'Hospitalova pravidla $\lim\limits_{x \to +\infty} 3.\dfrac{4^{x+1}}{(1+2^x)^2} =$

c) Vypočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

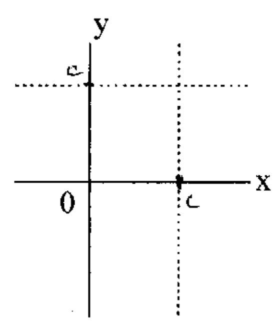
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3.\cos x - 3} =$$

d) Zapište podle definice,

že $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

e) Načrtněte graf nějaké funkce, která má právě uvedenou limitu :

- Je graf této funkce napravo od bodu c rostoucí či klesající ? *Je* ....
- Je graf této funkce napravo od bodu c konvexní či konkávní? *Je* ....
- Jak je nazývána přímka x = c ? *Je to* ....



4. a) Zapište obecně Taylorův polynom stupně n pro funkci $f(x)$ v bodě c.

$T_n(x) =$

b) Zapište Taylorův vzorec platný pro funkci $f(x)$ v bodě c, tj.

$f(x) =$

- Napište, co jednotlivé členy v zápise znamenají :

c) Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x.\sqrt[3]{x}}$ a bod $c = 1$. Funkci vhodně upravte : $f(x) =$
Vypočítejte derivace : $f'(x) =$

$f''(x) =$ $f'''(x) =$

Vypočítejte : $f(1) =$ $f'(1) =$ $f''(1) =$ $f'''(1) =$

Zapište Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \sqrt{x.\sqrt[3]{x}}$ v bodě $c = 1$, tj.

$T_3(x) =$

5. a) Uveďte jakou podmínku podle definice musí splňovat přímka $a : y = k.x + q$, aby byla šikmou asymptotou grafu funkce $f(x)$ v okolí bodu $+\infty$. *Odpověď :* *Přímka* $a : y = k.x + q$ *je asymptotou grafu funkce* $f(x)$ *v okolí bodu* $+\infty \overset{def}{\Leftrightarrow}$

b) Je dána funkce $f(x) = -x + 3.\sqrt{x^2 + x}$, Df=$(-\infty;-1\rangle\cup\langle 0;+\infty)$ Vypočítejte $f(0) =$
– Pro graf funkce $f(x)$ určete všechny (svislé) asymptoty bez směrnice, popř. odůvodněte proč asymptoty bez směrnice žádné nejsou. *Odpověď :* ....

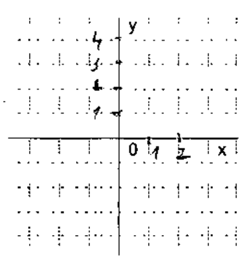
– Vypočítejte $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x + 3.\sqrt{x^2+x}}{x} =$

– Vypočítejte $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k.x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x + 3.\sqrt{x^2+x} - 2.x\right) =$

– Určete rovnici šikmé asymptoty grafu funkce $f(x)$ v okolí bodu $+\infty$ (Návod : využijte předchozích dvou limit), popř. odůvodněte proč šikmé asymptoty neexistují.

Odpověď : ....

– Načrtněte do soustavy souřadnic xy asymptotu $y = k.x$ (pokud existuje) v okolí $+\infty$ a naznačte průběh grafu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0; +\infty)$, jestliže $f(x)$ je v uvedeném intervalu minoritní funkcí k lineární funkci $y = k.x$, vyznačte bod $B = [0; f(0)] =$



6	7	8	9	10

$\sum$ 6-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení. jméno

6. a) Doplňte definici : *Funkce* $F(x)$ *je* ***primitivní funkcí*** *k funkci* $f(x)$ *na intervalu* J *s krajními body a, b (*$a \in R^*, b \in R^*, a < b$ *)* $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ *a)*

b) *c)*

b) Vypočtěte $\int \left(x^e + e^x - 3^x . \ln 9 \right) dx =$

c) Vypočtěte $\int \frac{1}{\cos x} . (-\sin x) . dx = \left| \begin{matrix} t = \\ dt = \end{matrix} \right| =$

d) Vypočtěte $\int \left(25 . x^4 + 2 \right) . \ln x . dx = \left| \begin{matrix} u' = & v = \\ u = & v' = \end{matrix} \right| =$

7. a) Uveďte tvrzení základní věty integrálního počtu. Tj. : Za předpokladu, že je f funkce na intervalu $\langle a ; b \rangle$ riemanovsky integrovatelná a existuje k ní primitivní funkce F na intervalu $\langle a ; b \rangle$, potom platí

Newtonův vzorec :

b) Rozložte danou racionální lomenou funkci na součet parciálních zlomků

$$\frac{4.x^2 + 2.x + 4}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad}$$

Výsledek : $\frac{4.x^2 + 2.x + 4}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad}$

c) Využijte rozkladu a vypočtěte $\int_{-1}^{+\infty} \frac{4.x^2 + 2.x + 4}{\left(x^2 + 1\right)^2} . dx =$

d) Vypočítejte $\int_0^3 \left(\frac{6.x + 1}{3.x^2 + x + 1} \right) . dx =$

e) Vyjádřete obsah křivočarého lichoběžníka určeného grafem funkce $f(x)$ nad intervalem $\langle a ; b \rangle$, tj. míru množiny $\left\{ [x ; y] \in E_2 : x \in \langle a ; b \rangle \wedge 0 \le y \le f(x) \right\}$. *Odpověď :* $P =$

f) Křivočarý lichoběžník je určen grafem funkce $f(x) = 2.x + 5.\sin x + \cos x$ nad intervalem $\langle 0 ; \pi \rangle$.

Vypočtěte obsah plochy daného křivočarého lichoběžníka. *Řešení :* $P =$

8. a) Vyjádřete podle definice, co je
posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
b) Vyjádřete podle definice, že posloupnost
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **zdola omezenou** posloupností.

c) Vyřešte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^{n+1} - 2.\sqrt[n]{n}\right) =$

d) Vyřešte $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2-n+25.n^2}}{\sqrt{(3.n+1).(3.n-1)}} =$

9. a) Zapište všechny předpoklady a tvrzení limitního odmocninového kritéria pro konvergenci, resp. divergenci mocninné řady. *Předpoklady : 1.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s........................... členy a 2. Existuje ...*

Tvrzení : a)

b)

Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{\left(5+\dfrac{2}{n}\right)^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\dfrac{1}{n+1}$

10. a) Uveďte podle definice, co znamená, že řada konverguje absolutně.

Odpověď: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně právě když ...*

b) Určete střed, poloměr, interval a obor konvergence mocninné řady (Uveďte kritérium, které použijete)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{5^n.(n+1)}$

Střed konvergence : c =
Poloměr konvergence : R =
Interval konvergence : I =
Obor konvergence : M =

Vyšetřete konvergenci řady také pro $x = 4$ a pro $x = -6$.

UEIT + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080128-3-(1)

1	2	3	4	5

$\sum$ 1-5	$\sum$ 6-10

$\sum$ 1-10

.... datum .... stud. obor .... ročník .... osobní číslo - STAG .... student - příjmení, jméno

1. a) Doplňte tabulku pravdivostních hodnot

p	q	$\neg$ p	$\neg$ q	$(p \Rightarrow \neg q)$	$(\neg p \vee q)$	$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1 $\boxed{1}$	1 $\boxed{1}$	1 $\boxed{2}$

b) Vyjádřete výrok $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ jako disjunktivní normální formu, *tj.*

$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\boxed{3}$

c) Vyjádřete výrok $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ jako konjunktivní normální formu, *tj.*

$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ $\boxed{3}$ (13)

d) Vyjádřete hexadecimální číslo $y_{(16)} = 2E3{,}0C$ v binární a dekadické číselné soustavě.

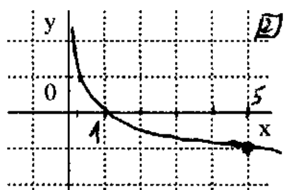
$y_{(2)} = 0010\ 1110\ 0011{,}00001100$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$; $y_{(10)} = 2 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 3 \cdot 16^0 + 0 \cdot 16^{-1} + 12 \cdot 16^{-2} = 512 + 224 + 3 + \frac{12}{256} =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

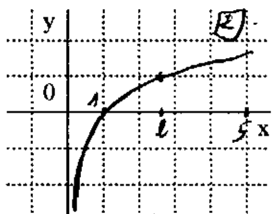
$= 739\frac{3}{64} =$

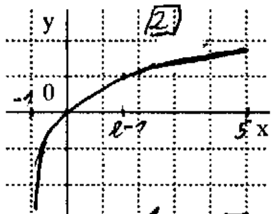
$= 739{,}046875$

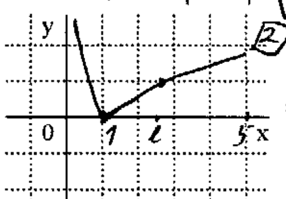
2-T06-8. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, určete jejich definiční obory, vypočítejte jejich první derivace a najděte k nim inverzní funkce, pokud existují na jejich maximálním definičním oboru.

a) $f_1 : y = \log_{0,2} x$; b) $f_2 : y = \ln x$; c) $f_3 : y = \ln(x+1)$; d) $f_4 : y = |\ln x|$.









$f_1'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 0{,}2}$ $\boxed{1}$ $f_2'(x) = \frac{1}{x}$ $\boxed{1}$ $f_3'(x) = \frac{1}{x+1}$ $\boxed{1}$ $f_4'(x) = sgn(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$ $\boxed{1}$

$f_1^{-1} : x = 0{,}2^y$ $\boxed{1}$ $f_2^{-1} : x = e^y$ $\boxed{1}$ $f_3^{-1} : x = e^y - 1$ $\boxed{1}$ f_4^{-1} : neexistuje $\boxed{1}$

3. a) Určete $\lim\limits_{x \to +\infty} 2.\text{arctg}\, x = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ $\boxed{1}$ Má funkce horizontální (vodorovnou) asymptotu?

Odpověď: *Funkce* $f(x) = 2.\text{arctg}\, x$ ......má...... *horizontální asymptotu, její rovnicí je* a : ..$y = \pi$....... $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) Vypočtěte bez l'Hospitalova pravidla $\lim\limits_{x \to +\infty} 3.\frac{4^{x+1}}{(1+2^x)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 \cdot \frac{4^x \cdot 4}{1 + 2 \cdot 2^x + 4^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 \cdot \frac{4}{\underbrace{\frac{1}{4^x} + 2\frac{1}{2^x}}_{\to 0} + 1} = 12$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

c) Vypočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3.\cos x - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{l'HP}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{3 \cdot (-\sin x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot e^{x^2}}{(-3) \frac{\sin x}{x}} = -\frac{2}{3}$$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

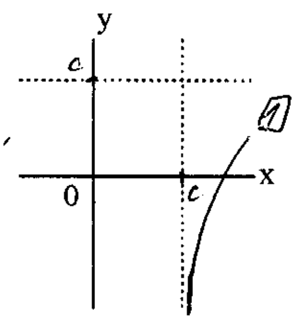
d) Zapište podle definice,

že $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall k \in R)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (c; c+\delta))(f(x) < k)$ $\boxed{1}$

e) Načrtněte graf nějaké funkce, která má právě uvedenou limitu : $\boxed{1}$

- Je graf této funkce napravo od bodu c rostoucí či klesající ? *Je* ...rostoucí...
- Je graf této funkce napravo od bodu c konvexní či konkávní? *Je* konkávní
- Jak je nazývána přímka x = c ? *Je to* ...svislá asymptota... $\boxed{1}$

tj. vertikální asymptota $\boxed{1}$



UEIT + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080128-3-(2)

4. a) Zapište obecně Taylorův polynom stupně n pro funkci $f(x)$ v bodě c.

$T_n(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n$ $\boxed{2}$

b) Zapište Taylorův vzorec platný pro funkci $f(x)$ v bodě c, tj.

$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$ $\boxed{1}$, kde $T_n(x)$ – Taylorův polynom a $R_{n+1}(x)$ – zbytek v Taylorově vzorci po n-tém členu $\boxed{1}$

- Napište, co jednotlivé členy v zápise znamenají :

c) Je dána funkce $f(x)=\sqrt{x.\sqrt[3]{x}}$ a bod c = 1. Funkci vhodně upravte : $f(x) = (x\cdot x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}$ $\boxed{1}$

Vypočítejte derivace : $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ $\boxed{1}$

$f''(x) = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-\frac{4}{3}}$ $\boxed{1}$ $= -\frac{2}{9}\cdot x^{-\frac{4}{3}}$

$f'''(x) = -\frac{2}{9}\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot x^{-\frac{7}{3}} = \frac{8}{27}\cdot x^{-\frac{7}{3}}$ $\boxed{1}$

Vypočítejte : $f(1) = 1$ $f'(1) = \frac{2}{3}$ $f''(1) = -\frac{2}{9}$ $f'''(1) = \frac{8}{27}$ $\boxed{1}$

Zapište Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x)=\sqrt{x.\sqrt[3]{x}}$ v bodě c = 1, tj. $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$T_3(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{4}{81}(x-1)^3$ (11)

5. a) Uveďte jakou podmínku podle definice musí splňovat přímka $a : y = k.x + q$, aby byla šikmou asymptotou grafu funkce $f(x)$ v okolí bodu $+\infty$. *Odpověď : Přímka* $a : y = k.x + q$ *je asymptotou grafu funkce* $f(x)$ *v okolí bodu* $+\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (kx+q)\right] = 0$ $\boxed{1}$

b) Je dána funkce $f(x) = -x + 3.\sqrt{x^2+x}$, $D_f = (-\infty;-1\rangle \cup \langle 0;+\infty)$ Vypočítejte $f(0) = 0$ $\boxed{1}$

– Pro graf funkce $f(x)$ určete všechny (svislé) asymptoty bez směrnice, popř. odůvodněte proč asymptoty bez směrnice žádné nejsou. Odpověď : Graf funkce nemá žádné svislé asymptoty, protože $\boxed{1}$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 1 \in R$ a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \in R$ $\boxed{1}$

– Vypočítejte $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+3.\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{3\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}\right)$ $\boxed{1}$ $= \lim_{x\to+\infty}\left(-1 + 3\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$ $\boxed{1}$ $= -1 + 3 = 2$ $\boxed{1}$ $= k$

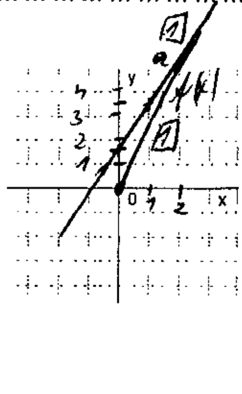
– Vypočítejte $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - k.x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x + 3.\sqrt{x^2+x} - 2.x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x^2+x} - 3x\right)$ $\boxed{1}$ $= [+\infty - \infty] =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(3\sqrt{x^2+x}-3x)\cdot(3\sqrt{x^2+x}+3x)}{(3\sqrt{x^2+x}+3x)}$ $\boxed{1}$ $= \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+9x-9x^2}{3\sqrt{x^2+x}+3x}\,\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$ $\boxed{1}$ $= \lim_{x\to+\infty}\frac{9}{3\sqrt{1+\frac{1}{x}}+3}$ $\boxed{1}$ $= \frac{9}{6}$ $\boxed{1}$ $= \frac{3}{2} = q$

– Určete rovnici šikmé asymptoty grafu funkce $f(x)$ v okolí bodu $+\infty$ (Návod : využijte předchozích dvou limit), popř. odůvodněte proč šikmé asymptoty neexistují.

Odpověď : Šikmá asymptota grafu funkce $f(x)$ je $a : y = 2\cdot x + \frac{3}{2}$ $\boxed{1}$

– Načrtněte do soustavy souřadnic xy asymptotu $y = k.x$ (pokud existuje) v okolí $+\infty$ a naznačte průběh grafu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0;+\infty)$, jestliže $f(x)$ je v uvedeném intervalu minoritní funkcí k lineární funkci $y = k.x$, vyznačte bod $B = [0;f(0)] = [0,0]$



6	7	8	9	10

Σ 6-10

datum ..... stud. obor ..... ročník ..... osobní číslo - STAG ..... student - příjmení, jméno .....

6. a) Doplňte definici : *Funkce* $F(x)$ *je* ***primitivní funkcí*** *k funkci* $f(x)$ *na intervalu* J [1]

s krajními body a, b ($a \in R^*, b \in R^*, a < b$) $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ *a)* Pro každý bod $x \in (a,b)$ platí $F'(x) = f(x)$

b) $F'_+(a) = f(a)$, pokud $a \in J$ c) $F'_-(b) = f(b)$, pokud $b \in J$ [1]

b) Vypočtěte $\int \left(x^e + e^x - 3^x . \ln 9 \right) dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x + \frac{3^x}{\ln 3} \cdot \ln 9 + C = \frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x + 2\cdot 3^x + C$

c) Vypočtěte $\int \frac{1}{\cos x} . (-\sin x) . dx = \left[\left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = (-\sin x) dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C \right] = \ln|\cos x| + C$

d) Vypočtěte $\int (25 . x^4 + 2) . \ln x . dx = \left| \begin{matrix} u' = 25x^4 + 2 & v = \ln x \\ u = 5x^5 + 2x & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = (5x^5 + 2x)\ln x - \int (5x^5 + 2x) \cdot \frac{1}{x}\, dx =$

$= (5 \cdot x^5 + 2x) \cdot \ln x - \int (5x^4 + 2)\, dx = (5x^5 + 2x)\ln x - x^5 - 2x + C$

7. a) Uveďte tvrzení základní věty integrálního počtu. Tj. : Za předpokladu, že je f funkce na intervalu $\langle a ; b \rangle$ riemanovsky integrovatelná a existuje k ní primitivní funkce F na intervalu $\langle a ; b \rangle$, potom platí

Newtonův vzorec : $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$ [1]

b) Rozložte danou racionální lomenou funkci na součet parciálních zlomků

$$\frac{4x^2 + 2.x + 4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{M \cdot x + N}{(x^2+1)^2} + \frac{Px + Q}{x^2+1} \quad / (x^2+1)^2$$

$4x^2 + 2x + 4 = Mx + N + Px^3 + Q \cdot x^2 + Px + Q$

$x^3 : P = 0$

$x^2 : Q = 4$

$x : M + P = 2 \Rightarrow M = 2$

$x^0 : N + Q = 4 \Rightarrow N = 4 - 4 = 0$

Výsledek : $\frac{4x^2 + 2.x + 4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{4}{x^2+1}$ [1]

c) Využijte rozkladu a vypočtěte $\int_{-1}^{+\infty} \frac{4x^2 + 2.x + 4}{(x^2 + 1)^2} . dx = \int_{-1}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \left| \begin{matrix} t = x^2 + 1 & x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \\ dt = 2x\, dx & x = -1 \Rightarrow t = 2 \end{matrix} \right| + \int_{-1}^{\infty} \frac{4}{x^2+1} dx =$

$= \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^2} + \left[4 \operatorname{arctg} x \right]_{-1}^{\infty} = \left[\frac{t^{-1}}{-1} \right]_2^{\infty} + \lim_{x \to \infty} 4 \cdot \operatorname{arctg} x - 4 \cdot \operatorname{arctg}(-1) = \left[-\frac{1}{t} \right]_2^{\infty} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} - 4\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2} + 2\pi + \pi = \frac{1}{2} + 3\pi$

d) Vypočítejte $\int_0^3 \left(\frac{6.x + 1}{3.x^2 + x + 1} \right) . dx = \left| \begin{matrix} t = 3x^2 + x + 1 & x = 3 \Rightarrow t = 31 \\ dt = (6x+1)\, dx & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right| = \int_1^{31} \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_1^{31} = \ln 31 - \ln 1 = \ln 31$

e) Vyjádřete obsah křivočarého lichoběžníka určeného grafem funkce $f(x)$ nad intervalem $\langle a ; b \rangle$, tj. míru množiny $\{[x ; y] \in E_2 : x \in \langle a ; b \rangle \wedge 0 \le y \le f(x)\}$. *Odpověď :* $P = \int_a^b f(x) \cdot dx$ [1]

(5)

(1)

f) Křivočarý lichoběžník je určen grafem funkce $f(x) = 2.x + 5.\sin x + \cos x$ nad intervalem $\langle 0 ; \pi \rangle$. [1]

Vypočtěte obsah plochy daného křivočarého lichoběžníka. *Řešení :* $P = \int_0^{\pi} (2x + 5 \cdot \sin x + \cos x) \cdot dx =$

$= \left[x^2 - 5\cos x + \sin x \right]_0^{\pi} = \pi^2 - 5\overset{=-1}{\cos \pi} + \overset{=0}{\sin \pi} - [0^2 - 5 \cdot \overset{=1}{\cos 0} + \overset{=0}{\sin 0}] =$

$= \pi^2 + 5 + 5 = \underline{\underline{10 + \pi^2}}$ [1]

(7)

FEI + UM - Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080128-3-(4) $\boxed{1}$

8. a) Vyjádřete podle definice, co je posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Posloupnost reálných čísel je zobrazení množiny všech přirozených čísel nebo jakékoliv nekonečné podmnožiny přirozených čísel do množiny reálných čísel

b) Vyjádřete podle definice, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **zdola omezenou** posloupností.

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists k \in R)(\forall n \in N)(a_n > k)$ $\boxed{1}$

c) Vyřešte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n+1} - 2.\sqrt[n]{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{3}{n}\right) - 2\sqrt[n]{n}\right] = e^3 \cdot 1 - 2 = \underline{\underline{e^3 - 2}}$ (3)

d) Vyřešte $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2-n+25.n^2}}{\sqrt{(3.n+1).(3.n-1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-n+25n^2}{9n^2-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}+25}{9-\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$ (3)

9. a) Zapište všechny předpoklady a tvrzení limitního odmocninového kritéria pro konvergenci, resp. divergenci mocninné řady. *Předpoklady : 1.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s* nezápornými *členy a 2. Existuje ...* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = A \in R \cup \{+\infty\}$

Tvrzení : a) Jestliže $A<1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

b) Jestliže $A>1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\boxed{1}$

Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium. (4)

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\left(5+\frac{2}{n}\right)^n}$ Odmocninové kritérium

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n}{(5+\frac{2}{n})^n}} = \lim \frac{4}{5+\frac{2}{n}} = \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$ Integrální kritérium

$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x+1}dx = \left| \begin{matrix} t = x+1;\ x\to\infty \Rightarrow t\to+\infty \\ dt = dx;\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{matrix} \right| = \int\limits_2^{\infty}\frac{1}{t}dt = \left[\ln|t|\right]_2^{\infty} = \lim\limits_{t\to\infty}\ln|t| - \ln 2 = +\infty \Rightarrow$ Řada $\sum a_n$ div.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$; 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je alternující řada

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$

3) $\forall n \in N\ |a_n| = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = |a_{n+1}|$, tj. $\{\frac{1}{n+1}\}$ je nerostoucí (klesající)

Dle Leibnitzova kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (4)

10. a) Uveďte podle definice, co znamená, že řada konverguje absolutně.

Odpověď : Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně právě když ...* konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ $\boxed{1}$

b) Určete střed, poloměr, interval a obor konvergence mocninné řady (Uveďte kritérium, které použijete)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n.(n+1)}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+2)}}{\frac{(x+1)^n}{5^n\cdot(n+1)}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}\cdot 5^n(n+1)}{(x+1)^n\cdot 5^{n+1}(n+2)}\right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x+1|}{5}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{|x+1|}{5} < 1 \Leftrightarrow x \in (-6,4)$

Dle podílového kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně pro $x \in (-6,4)$

Střed konvergence : c = -1

Poloměr konvergence : R = 5

Interval konvergence : I = $(-6;4)$

Obor konvergence : M = $\langle -6;4)$

Vyšetřete konvergenci řady také pro x = 4 a pro x = –6.

$x=4$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ – řada diverguje dle int. krit (viz výše b)), tj. $4 \notin M$

$x=-6$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ – řada konverguje dle Leibnitzova kritéria (viz výše c)), tj. $-6 \in M$ (10)