UEIT + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080122-2-(1)

1	2	3	4	5

$\sum$ 1-5	$\sum$ 6-10

$\sum$ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

1. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \Rightarrow q)$	$(\neg p \vee \neg q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
1	1	_	_	_	_	_
1	0	_	_	_	_	_
0	1	_	_	_	_	_
0	0	_	_	_	_	_

- Vyjádřete výrok $(p \Rightarrow q)$ jako disjunktivní normální formu, tj.

$(p \Rightarrow q) \equiv$ ____

Vyjádřete výrok $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ jako konjunktivní normální formu, tj.

$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv$ ____

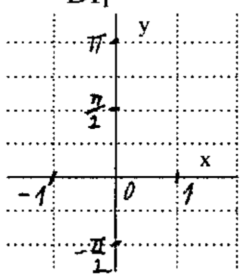
Vyjádřete binární číslo (s řádovou čárkou) y = 1011 0100,1111 0001_B a) v hexadecimální číselné soustavě. *Tj.* y =

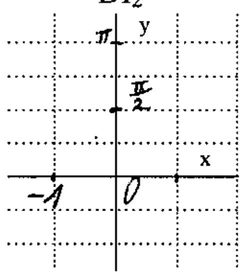
b) Potom převeďte číslo y *Tj.* y =
do desítkové soustavy.

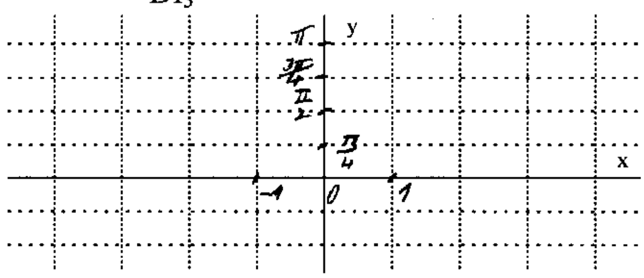
2-T06-1. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, určete jejich „maximální" definiční obory, zapište jejich první derivace a k funkcím napište jejich inverzní funkce, pokud existují.

a) $f_1 : y = \arcsin x$; b) $f_2 : y = \arccos x$; c) $f_3 : y = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x$;

$Df_1 =$ $Df_2 =$ $Df_3 =$





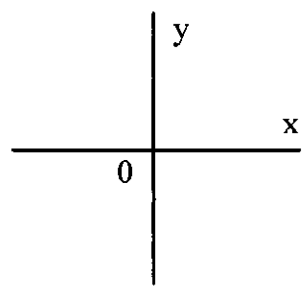


$f_1'(x) =$ $f_2'(x) =$ $f_3'(x) =$

f_1^{-1} : f_2^{-1} : f_3^{-1} :

3. Zapište podle definice, co znamená, že $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,

tj. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$



– Načrtněte graf nějaké funkce s uvedenou limitou tak, aby byla **konkávní** : $\Rightarrow$

a) Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^{x+2} - 4^{x+2}}{5.4^x - 4.5^x} =$

Vypočtěte limity funkcí za použití l'Hospitalova pravidla : b) $\lim\limits_{x \to 1^+} (2.x - 1)^{\frac{1}{x-1+\ln x}} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{(3.x)^2} =$

4. a) Napište slovně i pomocí vztahu (vzorečku), co je podle definice diferenciál funkce $f(x)$ v bodě c.

Vzoreček : $df_c =$

Slovně : Diferenciál funkce $f(x)$ *v bodě c je*

b) Uveďte větu o vztahu první derivace a prvního diferenciálu funkce $f(x)$ v bodě c.

Tj. : Funkce $f(x)$ *má v bodě* c *diferenciál* df_c *právě když* ....

c) Jaký vztah platí mezi df_c a $f'(c)$. Tj. $df_c(h) =$

Př. c) Je dána funkce $f(x) = 12.\sqrt[4]{x} =$. Vypočítejte $f'(x) =$
a určete $f'(1) =$

- Pomocí předchozích výsledků zapište diferenciály $df; df_1; df_1(0{,}002)$ a $df_1(-0{,}002)$. *Tedy :*

$df = df_x(dx) =$ $df_1 = df_1(dx) =$

$df_1(0{,}002) =$ $df_1(-0{,}002) =$

5. a) Napište (doplňte) postačující podmínku pro rostoucí funkci na intervalu.
Tj. : Funkce $f(x)$ *je rostoucí na intervalu* $(b; d)$, *pokud pro každý* bod $x \in (b; d)$ ....

b) Napište (doplňte) postačující podmínku ryzí konkávnosti funkce na intervalu.
Tj. : Funkce $f(x)$ *je konkávní na intervalu* $(b; d)$, *pokud pro každý* bod $x \in (b; d)$ ....

c) Napište (doplňte) postačující podmínku inflexe funkce v bodě.
Tj. : Funkce $f(x)$ *má v bodě c inflexi, pokud* $f''(c) =$ a $f'''(c) =$

d) Je dána funkce $f(x) = (x^2 + 3.x - 2)(x - 2)$

– Vypočtěte první derivaci funkce $f(x)$, tj. $f'(x) =$
– Určete nulové body první derivace.

– Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x)$. *Tj. :* $f''(x) =$
– Určete nulové body druhé derivace.

– Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x)$. *Tj. :* $f'''(x) =$

- Určete bod inflexe funkce $f(x)$.

– Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ ryze rostoucí a na nichž je ryze klesající .

– Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ ryze konvexní a na nichž je ryze konkávní .

6	7	8	9	10

∑6-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

6. Vypočítejte neurčitý integrál vhodnými úpravami integrované funkce

$$\int\left[(1+\sin x)^2+(3+\cos x)^2\right].dx =$$

– Vypočítejte vhodnou substitucí

$$\int\sqrt{3-14.x}.dx =$$

Napište (doplňte) větu o integrování metodou per partes .

Jestliže funkce $u(x)$ *a* $v(x)$ *jsou dvě spojitě diferencovatelné funkce na intervalu* J, *potom na intervalu* J *platí :* $\int u'(x).v(x).dx =$

– Vypočtěte metodou per partes

$$\int(15.x^4-1)\ln x.dx = \left|\begin{matrix} u' = & v = \\ u = & v' = \end{matrix}\right| =$$

7. a) Za předpokladu, že f je funkce omezená na intervalu $\langle a\,;b\rangle$, D je dělení intervalu $\langle a\,;b\rangle$, pro každé $i\in\{1,2,\dots,n\}$ je $m_i = \inf\limits_{x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle} f(x)$, zapište definici horního integrálního součtu funkce f

na intervalu $\langle a\,;b\rangle$ při dělení D, tj. $H(f,D)=$

b) Co je dle definice horní integrál funkce f na intervalu $\langle a\,;b\rangle$. *vzorečkem :* $\overline{\int_a^b} f(x).dx =$

slovy :

c) Vypočítejte $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{10}{x^2}+10^x\right).dx =$

d) Vypočítejte určitý integrál substituční metodou $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\operatorname{arctg} x}.\frac{1}{x^2+1}.dx =$

e) Vypočítejte $\displaystyle\int_1^2\frac{2.x^3-x-1}{x^2.(x^2+x+1)}.dx =$

Rozložte integrovanou funkci na součet parciálních zlomků :

$$\frac{2.x^3-x-1}{x^2.(x^2+x+1)} = \frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}+\frac{\qquad}{\qquad}$$

8. a) Vyjádřete podle definice, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **minoritní** vůči posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Vyjádřete podle definice, že posloupnost

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **nerostoucí** posloupností.

c) Vyřešte : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^n+\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)}\right)=$

d) Vyřešte $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(4.n^2+1).(4.n^2-1)}{n.(2.n+1)^3}=$

9. Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6.n}{(3.n^2+7)^2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{20^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{2.n+1}$

10. a) Zapište všechny předpoklady a tvrzení limitního podílového kritéria

pro konvergenci, resp. divergenci mocninné řady. *Předpoklady : 1.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *je řada s..................................členy*

2. Existuje ...

Tvrzení : a) ____

b) ____

b) Určete střed, poloměr, interval a obor konvergence mocninné řady (Uveďte kritérium, které použijete)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-9)^n}{10^{n-1}.(n+1)}$

Střed konvergence : c =

Poloměr konvergence : R =

Interval konvergence : I =

Obor konvergence : M =

UEIT + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080122-2-(1)

1	2	3	4	5

Σ 1-5	Σ 6-10

Σ 1-10

....

datum   stud. obor   ročník   osobní číslo - STAG   student - příjmení, jméno

1. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot

p	q	¬ p	¬ q	(p ⇒ q)	(¬ p ∨ ¬ q)	(p ⇒ q) ∧ (¬ p ∨ ¬ q)
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1 $\boxed{1}$	1 $\boxed{1}$	1 $\boxed{1}$

- Vyjádřete výrok $(p \Rightarrow q)$ jako disjunktivní normální formu, tj.

$(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\boxed{1}$

Vyjádřete výrok $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ jako konjunktivní normální formu, tj.

$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ $\boxed{1}$

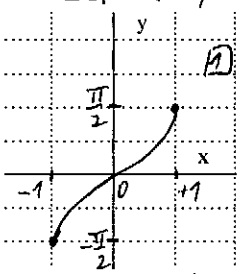
Vyjádřete binární číslo (s řádovou čárkou) $y = 1011\ 0100{,}1111\ 0001_B$ a) v hexadecimální číselné soustavě. *Tj.* $y = B4{,}F1$ $\boxed{1}$

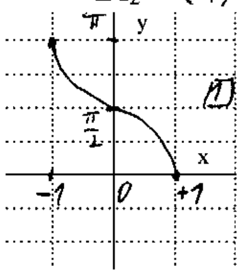
b) Potom převeďte číslo y *Tj.* $y = 11 \cdot 16 + 4 \cdot 16^0 + 15 \cdot 16^{-1} + 1 \cdot 16^{-2} = 176 + 4 + \frac{15}{16} + \frac{1}{256} = 180\frac{241}{256} = 180{,}94140625$ $\boxed{1}$
do desítkové soustavy.

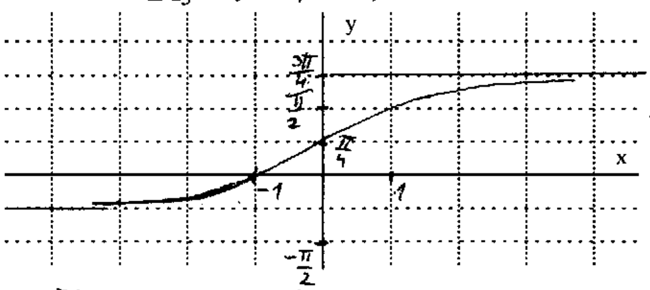
2-T06-1. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, určete jejich „maximální" definiční obory, zapište jejich první derivace a k funkcím napište jejich inverzní funkce, pokud existují.

a) $f_1 : y = \arcsin x$; b) $f_2 : y = \arccos x$; c) $f_3 : y = \frac{\pi}{4} + \mathrm{arctg}\, x$;

$Df_1 = \langle -1; +1 \rangle$ $Df_2 = \langle -1; +1 \rangle$ $Df_3 = (-\infty; +\infty)$ $\boxed{1}$







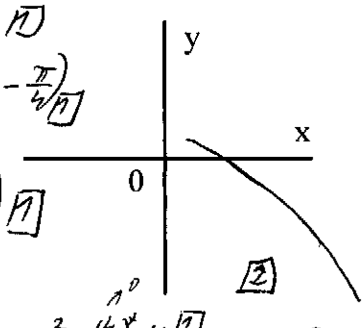
$f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\boxed{1}$ $f_2'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\boxed{1}$ $f_3'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\boxed{1}$

$f_1^{-1} : x = \sin y$ $\boxed{1}$ $f_2^{-1} : x = \cos y$ $\boxed{1}$ $f_3^{-1} : x = \mathrm{tg}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$ $\boxed{1}$

3. Zapište podle definice, co znamená, že $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,

tj. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall k \in R)(\exists H \in R)(\forall x > H)(f(x) < k)$ $\boxed{1}$

– Načrtněte graf nějaké funkce s uvedenou limitou tak, aby byla konkávní :



$\boxed{2}$

a) Vypočtěte limitu $\lim_{x \to +\infty} \frac{5^{x+2} - 4^{x+2}}{5.4^x - 4.5^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5^{x+2}}{5^x} - \frac{4^x \cdot 4^2}{5^x}}{\frac{5 \cdot 4^x}{5^x} - \frac{4 \cdot 5^x}{5^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot 16}{5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x - 4} = -\frac{25}{4}$ $\boxed{1}$

Vypočtěte limity funkcí za použití l'Hospitalova pravidla : b) $\lim_{x \to 1^+} (2.x - 1)^{\frac{1}{x-1+\ln x}} = [1^\infty] = \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{\ln(2x-1)}{x-1+\ln x}} = e$ $\boxed{1}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(3.x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{2(3x) \cdot 3} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} \cdot 2}{18} = \frac{1}{9}$ $\boxed{1}$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(2x-1)}{x-1+\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{2}{2x-1}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2 \cdot x}{(x+1) \cdot (2x-1)} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 1$ $\boxed{1}$

4. a) Napište slovně i pomocí vztahu (vzorečku), co je podle definice diferenciál funkce $f(x)$ v bodě c.

Tj. (vzoreček) $df_c = K \cdot h$, kde $K \in R$ je konstanta a $h = x - c$

df_c je (slovně) ... Diferenciál $f(x)$ v bodě c je lineární funkce přírůstku argumentu x v okolí bodu c taková, že přírůstek funkce $f(c+h) - f(c)$ je roven $K \cdot h + \omega(h)$, tj. součtu lineární funkce $K \cdot h$ a funkce $\omega(h)$ pro niž platí, že $\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{|h|} = 0$

b) Uveďte větu o vztahu první derivace a prvního diferenciálu funkce $f(x)$ v bodě c.

Tj. : Funkce $f(x)$ *má v bodě* c *diferenciál* df_c *právě když* má funkce $f(x)$ v bodě c vlastní derivaci

c) Jaký vztah platí mezi df_c a $f'(c)$. Tj. $df_c(h) = f'(c) \cdot h$

Př. c) Je dána funkce $f(x) = 12.\sqrt[4]{x} = 12 \cdot x^{\frac{1}{4}}$ Vypočítejte $f'(x) = 3 \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$

a určete $f'(1) = 3$

- Pomocí předchozích výsledků zapište diferenciály $df; df_1; df_1(0{,}002)$ a $df_1(-0{,}002)$. *Tedy :*

$df = df_x(dx) = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} \cdot dx$ $\qquad df_1 = df_1(dx) = 3 \cdot dx$

$df_1(0{,}002) = 3 \cdot 0{,}002 = 0{,}006$ $\qquad df_1(-0{,}002) = 3 \cdot (-0{,}002) = -0{,}006$

5. a) Napište (doplňte) postačující podmínku pro rostoucí funkci na intervalu.

Tj. : Funkce $f(x)$ *je rostoucí na intervalu* $(b; d)$, *pokud pro každý* bod $x \in (b; d)$ ... $f'(x) > 0$

b) Napište (doplňte) postačující podmínku ryzí konkávnosti funkce na intervalu.

Tj. : Funkce $f(x)$ *je konkávní na intervalu* $(b; d)$, *pokud pro každý* bod $x \in (b; d)$. $f''(x) < 0$

c) Napište (doplňte) postačující podmínku inflexe funkce v bodě.

Tj. : Funkce $f(x)$ *má v bodě c inflexi, pokud* $f''(c) = 0$ a $f'''(c) \neq 0$ ....

d) Je dána funkce $f(x) = (x^2 + 3.x - 2)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 6x - 2x + 4 = x^3 + x^2 - 8x + 4$

– Vypočtěte první derivaci funkce $f(x)$, tj. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$, $\quad D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100$

– Určete nulové body první derivace. $\quad f'(x) = 3(x+2)(x - \frac{4}{3})$ $\quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm 10}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; -2

– Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x)$. *Tj. :* $f''(x) = 6x + 2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

– Určete nulové body druhé derivace.

– Vypočtěte třetí derivaci funkce $f(x)$. *Tj. :* $f'''(x) = 6 \neq 0$

- Určete bod inflexe funkce $f(x)$. bod inflexe $x = -\frac{1}{3}$, $f(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 - 8(-\frac{1}{3}) + 4 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{8}{3} + 4 = \frac{-1 + 3 + 72 + 108}{27} = \frac{182}{27}$

$I = [-\frac{1}{3}; \frac{182}{27}]$

– Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ ryze rostoucí a na nichž je ryze klesající .

	$(-\infty; -2)$	$(-2, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}; +\infty)$
$(x+2)$	−	+	+
$(x - \frac{4}{3})$	−	−	+
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	rostoucí	klesající	rostoucí

– Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ ryze konvexní a na nichž je ryze konkávní .

	$(-\infty; -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}; +\infty)$
$6x + 2$	−	+
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	konkávní	konvexní

(13)

UEIT + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080122-2-(3)

6	7	8	9	10	$\sum$ 6-10

……………… ……………… ……………… ……………………………… ………………………………………………

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

6. Vypočítejte neurčitý integrál vhodnými úpravami integrované funkce

$$\int\left[(1+\sin x)^2+(3+\cos x)^2\right].dx = \int(1+2\sin x+\sin^2 x+9+6\cos x+\cos^2 x)\,dx = \boxed{1}$$

$$= \int(11+2\sin x+6\cos x)\,dx = 11x - 2\cos x + 6\sin x + C \quad \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$$

– Vypočítejte vhodnou substitucí

$$\int\sqrt{3-14.x}.dx = \left|\begin{array}{l} t = 3-14x \quad \boxed{1} \\ dt = -14\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{-14} \quad \boxed{1} \end{array}\right| = \int\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{-14} = \int\left(-\frac{1}{14}\right)t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{14}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = -\frac{1}{21}t\sqrt{t}+C \Big] = -\frac{1}{21}(3-14x)\sqrt{3-14x}+C \quad \boxed{1}$$

Napište (doplňte) větu o integrování metodou per partes .

Jestliže funkce $u(x)$ *a* $v(x)$ *jsou dvě spojitě diferencovatelné funkce na intervalu* J , *potom na intervalu* J *platí :* $\int u'(x).v(x).dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

– Vypočtěte metodou per partes $\boxed{1}$

$$\int(15.x^4-1)\ln x.dx = \left|\begin{array}{ll} u' = 15x^4-1 & v = \ln x \quad \boxed{1} \\ u = 3x^5-x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right| = (3\cdot x^5-x)\ln x - \int(3x^5-x)\frac{1}{x}\,dx = \boxed{1}$$

$$= (3x^5-x)\ln x - \int(3x^4-1)\,dx = (3x^5-x)\cdot\ln x - \frac{3}{5}x^5+x+C \quad \boxed{1}$$

7. a) Za předpokladu, že f je funkce omezená na intervalu $\langle a\,;b\rangle$, D je dělení intervalu $\langle a\,;b\rangle$, pro každé $i\in\{1,2,...,n\}$ je $m_i = \inf\limits_{x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle} f(x)$, zapište definici horního integrálního součtu funkce f na intervalu $\langle a\,;b\rangle$ při dělení D, tj. $H(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ $\boxed{1}$

b) Co je dle definice horní integrál funkce f na intervalu $\langle a\,;b\rangle$. *vzorečkem :* $\overline{\int_a^b} f(x).dx = \inf\limits_{D\in\mathcal{D}} H(f,D)$ $\boxed{1}$

slovy : Je to infimum množiny všech horních integrálních součtů přes množinu $\mathcal{D}$ všech možných dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ $\boxed{1}$

c) Vypočítejte $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{10}{x^2}+10^x\right).dx = \int_{-\infty}^{-1}(10\cdot x^{-2}+10^x)\,dx = \left[-\frac{10}{x}+\frac{10^x}{\ln 10}\right]_{-\infty}^{-1} = -\frac{10}{(-1)}+\frac{10^{-1}}{\ln 10} - \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{10}{x}+\frac{10^x}{\ln 10}\right) = \underline{\underline{10+\frac{1}{10\ln 10}}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

d) Vypočítejte určitý integrál substituční metodou $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\operatorname{arctg} x}.\frac{1}{x^2+1}.dx = \left|\begin{array}{l|l} t = \operatorname{arctg} x & x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1 \\ dt = \frac{1}{x^2+1}\,dx & x=0\Rightarrow t=0 \end{array}\right| = \boxed{1}$

$$= \int_0^1 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - e^0 = \underline{\underline{e-1}} \quad \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$$

e) Vypočítejte $\displaystyle\int_1^2\frac{2.x^3-x-1}{x^2.(x^2+x+1)}.dx = \int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx = \int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx + \int_1^2\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx =$ $\boxed{1}$

Rozložte integrovanou funkci na součet parciálních zlomků :

$$\frac{2.x^3-x-1}{x^2.(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1} \quad \boxed{1} \quad \Big/ x^2(x^2+x+1)$$

$$2x^3+x^2-x-1 = Ax^2+Ax+A+Bx^3+Bx^2+Bx+Mx^3+Nx^2$$

x^3 : $B+M = 2 \Rightarrow M = 2$ $\boxed{1}$

x^2 : $A+B+N = 0 \Rightarrow N = 1$ $\boxed{1}$

x : $A+B = -1 \Rightarrow B = 0$ $\boxed{1}$

x^0 : $A = -1$ $\boxed{1}$

$$= \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 + \int_1^2\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \boxed{1}\ \boxed{1}$$

$$= \left|\begin{array}{l|l} t = x^2+x+1 & x=2\Rightarrow t=7 \\ dt = (2x+1)\,dx & x=1\Rightarrow t=3 \end{array}\right| = \boxed{1}\ \boxed{1}$$

$$= \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right] + \int_3^7\frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{2}+\left[\ln|t|\right]_3^7 = \boxed{1}\ \boxed{1}$$

$$= -\frac{1}{2}+\ln 7-\ln 3 = -\frac{1}{2}+\ln 2 = \underline{\underline{\ln\frac{7}{3}-\frac{1}{2}}} \quad \boxed{1}$$

UEIT + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EXM1080122-2-(4)

8. a) Vyjádřete podle definice, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **minoritní** vůči posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Longleftrightarrow (\forall n \in N)(b_n \leq a_n)$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete podle definice, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **nerostoucí** posloupností.

$\Longleftrightarrow (\forall n \in N)(a_n \geq a_{n+1})$ $\boxed{1}$

c) Vyřešte : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^n + \sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)}\right] = e^2 + 1 + 1 = e^2+2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1_2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

d) Vyřešte $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(4.n^2+1)(4.n^2-1)}{n.(2.n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{16n^4-1}{8n^4+12n^3+6n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{16-\frac{1}{n^4}}{8+\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n}} = 2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

9. Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6.n}{(3.n^2+7)^2}$; $\int_1^{\infty}\frac{6x}{(3x^2+7)^2}dx = \left| \begin{array}{l|l} t = 3x^2+7 & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ dt = 6x\cdot dx & x=1 \Rightarrow t=10 \end{array}\right| = \int_{10}^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \int_{10} t^{-2}\cdot dt =$

$= \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{10}^{\infty} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{10}^{\infty} = \lim\limits_{t\to\infty} -\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{10}\right) = 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \in R \Rightarrow$ Dle integrálního kritéria $\sum a_n$ konv. $\boxed{1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{20^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{20^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{20} = \frac{1}{20} < 1$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\Rightarrow$ Dle odmocninového kritéria řada $\sum a_n$ konverguje $\boxed{1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{2.n+1}$ 1) alternující řada $\boxed{1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$ $\boxed{1}$

3) $\forall n \in N$ $|a_n| = \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2(n+1)+1} = |a_{n+1}|$, tj. $\{|a_n|\}$ je nerostoucí $\boxed{1}$

Dle Leibnitzova kritéria $\sum a_n$ konverguje $\boxed{1}$

10. a) Zapište všechny předpoklady a tvrzení limitního podílového kritéria pro konvergenci, resp. divergenci mocninné řady. *Předpoklady : 1.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *je řada s* kladnými *členy* $\boxed{1}$

2. Existuje ... $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in R$, popř. $A = +\infty$ $\boxed{1}$

Tvrzení : a) Jestliže $A < 1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\boxed{1}$

b) Jestliže $A > 1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\boxed{1}$

b) Určete střed, poloměr, interval a obor konvergence mocninné řady (Uveďte kritérium, které použijete)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-9)^n}{10^{n-1}.(n+1)}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-9)^{n+1}}{10^n(n+2)}}{\frac{(x-9)^n}{10^{n-1}(n+1)}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-9)^{n+1}\cdot 10^{n-1}(n+1)}{(x-9)^n 10^n(n+2)}\right| =$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|x-9|}{10}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) = \frac{|x-9|}{10} < 1 \Leftrightarrow |x-9| < 10$ $\boxed{1}$

$\Leftrightarrow x \in (-1, 19)$

Střed konvergence : c = 9 $\boxed{1}$

Poloměr konvergence : R = 10 $\boxed{1}$

Interval konvergence : I = $(-1, 19)$

Obor konvergence : M = $\langle -1, 19)$.

Pro $\forall x \in (-1, 19)$ řada konverguje absolutně dle limitního podílového kritéria $\boxed{1}$

$x = 19 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n+1}$ Řada diverguje podle integrálního kritéria, protože $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\int_1^{\infty}\frac{10}{x+1}dx = \left|\begin{array}{l|l} t = x+1 & x\to+\infty \Rightarrow t\to+\infty \\ dt = dx & x=1 \Rightarrow t=2 \end{array}\right| = \int_2^{\infty}\frac{10}{t}dt = [10\cdot\ln|t|]_2^{\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty}10\ln|t| - 10\cdot\ln 2 = +\infty - 10\cdot\ln 2 = +\infty$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$x = -1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{10}{x+1}$ Řada konverguje dle Leibnitzova kritéria $\boxed{4}$ $\boxed{1}$