FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EX-M1080114-1-(1)

1	2	3	4	5	Σ 1-5	Σ 6-10	Σ 1-10

....	....	....	....	....
datum	stud. obor	ročník	osobní číslo - STAG	student - příjmení, jméno

1-T1 Uveďte podle definice, co je zobrazení z množiny A do množiny B :

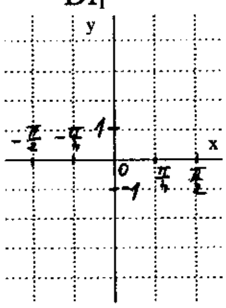
– Uveďte podle definice, co je funkce jedné reálné proměnné :

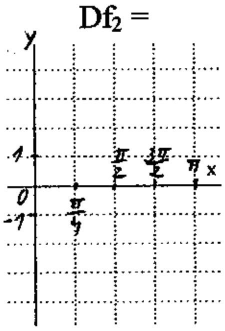
Vyjádřete dekadické číslo $y = 191{,}21875_D$ a) v binární číselné soustavě a b) v hexadecimální číselné soustavě.

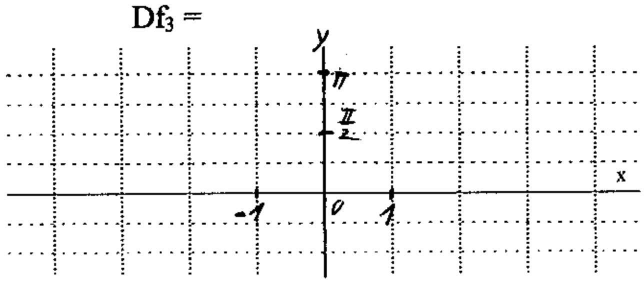
2. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, zapište jejich první derivace, určete jejich definiční obory tak, aby k nim existovaly inverzní funkce a inverzní funkce zapište.

a) $f_1 : y = \operatorname{tg} x$; b) $f_2 : y = \operatorname{cotg} x$; c) $f_3 : y = \operatorname{arccotg} x$

$Df_1 =$ $Df_2 =$ $Df_3 =$







$f_1'(x) =$ $f_2'(x) =$ $f_3'(x) =$

f_1^{-1} : f_2^{-1} : f_3^{-1} :

3- T09 Je dána funkce $f(x) = x^2 - 7.x + 12$. a) Vypočtěte $f'(x)$, tj. $f'(x) =$

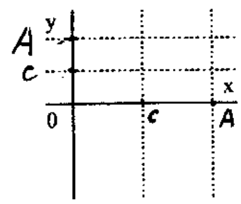
– Vypočtěte $f''(x)$, tj. $f''(x) =$

– Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ ryze rostoucí a intervaly, na nichž je $f(x)$ ryze klesající .

– Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ ryze konvexní, resp. ryze konkávní.

4-T07 – Zapište podle definice, co znamená, že $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = A$, kde $c \in R$ a $A \in R$.

Tj. $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = A \Leftrightarrow$



- Načrtněte graf nějaké funkce, která má $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = A$,

a která je v $(c; +\infty)$ rostoucí a konvexní :

a) Vypočtěte limitu funkce $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x + 3^{x+1} - 1}{7.3^x} =$

Vypočtěte limity funkcí za použití L'Hospitalova pravidla :

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3.\cos x - 3}{e^x - x - 1} =$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2\right)^{\frac{1}{x-1}} =$

5- T08

a) Vyjádřete pomocí vzorečku větu o derivaci k-násobku $(k \in R)$ funkce $u = u(x)$,

tj. $(k.u)' =$

b) Vyjádřete pomocí vzorečku větu o derivaci rozdílu funkcí $u = u(x)$ a $v = v(x)$,

tj. $(u - v)' =$

c) Zapište obecně Taylorův polynom $T_n(x)$ pro funkce $f(x)$ v bodě c,

tj. $T_n(x) =$

Př. d) Je dána funkce $f(x) = 5 + \ln(3.x - 5)$ a bod $c = 2$. Vypočítejte 1., 2. a 3. derivaci :

$f'(x) =$, určete $f'(2) =$

$f''(x) =$, určete $f''(2) =$

$f'''(x) =$, určete $f'''(2) =$

- Zapište Taylorův polynom $T_3(x)$ pro danou funkci $f(x)$ v bodě $c = 2$, tj.

$T_3(x) =$

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EX-M1080114-1-(3)

6	7	8	9	10

Σ 6-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

6-T10-6. Napište v plném znění nebo jen zjednodušené schéma I. pravidla o substituci v neurčitém integrálu.

$$\int f(g(x)).g'(x).dx =$$

– Vypočítejte vhodnou substitucí

$$\int \frac{12+\sin^2 x}{\sin^3 x}.\cos x.dx =$$

– Vypočítejte vhodnou substitucí

$$\int \sqrt[4]{\frac{x}{6}-1}\ .dx =$$

– Vypočtěte metodou per partes $\int(-3.x+1).\sin x.dx = \left| \begin{matrix} u' = & v = \\ u = & v' = \end{matrix} \right| =$

7-T11-1. a) Za předpokladu, že f je funkce omezená na intervalu $\langle a\,;b\rangle$, D je dělení intervalu $\langle a\,;b\rangle$, pro každé $i \in \{1,2,\dots,n\}$ je $m_i = \inf\limits_{x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle} f(x)$, zapište definici dolního integrálního součtu funkce f
na intervalu $\langle a\,;b\rangle$ při dělení D, tj. $L(f,D) =$

b) Co je podle definice dolní integrál funkce f na intervalu $\langle a\,;b\rangle$. *Zápis vzorečkem :* $\underline{\int_a^b} f(x).dx =$

slovy :

c) Vypočítejte $\int_{-\infty}^{1}\left(4^x - e^x\right).dx =$

d) Vypočítejte substituční metodou $\int_0^1 \left(7.x^2-3.x+1\right)^{-\frac{1}{2}}.(14.x-3).dx =$

e) Vypočítejte $\int_{-1}^{0}\frac{x^2+x+4}{\left(x^2+1\right)(x+3)}.dx =$

Rozložte nejdříve integrovanou funkci na součet parciálních zlomků :

$$\frac{x^2+x+4}{\left(x^2+1\right)(x+3)} = \frac{\qquad}{\qquad} + \frac{\qquad}{\qquad}$$

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EX-M1080114-1-(4)

8-T12 a) Co znamená podle definice, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **majoritní** vůči posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

b) Vyjádřete podle definice, že posloupnost

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **neklesající** posloupností.

c) Vyřešte limitu : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^n - \frac{2.\sqrt[n]{n}}{2+\sqrt[n]{2}}\right) =$

d) Vyřešte limitu : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^2 - n^4}{(n+2)^3 - n^3} =$

9-T13-1 Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{n!}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.\frac{1}{n+2}$

10-T14-1 a) Zapište všechny předpoklady a tvrzení limitního odmocninového kritéria

pro konvergenci, resp. divergenci mocninné řady. *Předpoklady : 1.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s………………………………členy*

2. Existuje ...

Tvrzení : a) ____________________

b) ____________________

b) Určete střed, poloměr, interval a obor konvergence mocninné řady (Uveďte kritérium, které použijete)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{8^n}$

Střed konvergence : c =

Poloměr konvergence : R =

Interval konvergence : I =

Obor konvergence : M =

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EX-M1080114-1-(1)

1	2	3	4	5		Σ 1-5	Σ 6-10		Σ 1-10

....

datum stud. obor ročník osobní číslo - STAG student - příjmení, jméno

$\boxed{1}$

1-T1 Uveďte podle definice, co je zobrazení z množiny A do množiny B : Zobrazení f z množiny A do množiny B je určeno pravidlem (předpisem), podle něhož každému prvku x∈A je buď přiřazen právě jeden prvek y∈B anebo prvku x∈A není přiřazen žádný prvek

– Uveďte podle definice, co je funkce jedné reálné proměnné : Reálná funkce f jedné reálné proměnné je každé zobrazení z množiny A (A∈R) do množiny reálných čísel R. $\boxed{1}$

Vyjádřete dekadické číslo y = 191,21875$_D$ a) v binární číselné soustavě

$191 = 2 \cdot 95 + 1$ tedy $191_D = 1011\ 1111_B$ $\boxed{1}$
$95 = 2 \cdot 47 + 1$
$47 = 2 \cdot 23 + 1$
$23 = 2 \cdot 11 + 1$
$11 = 2 \cdot 5 + 1$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$ $\boxed{1}$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
$1 = 2 \cdot 0 + 1$

$0{,}21875 \cdot 2 = 0{,}4375 + 0$ $\boxed{1}$
$0{,}4375 \cdot 2 = 0{,}875 + 0$
$0{,}875 \cdot 2 = 0{,}75 + 1$
$0{,}75 \cdot 2 = 0{,}5 + 1$
$0{,}5 \cdot 2 = 0 + 1$
tedy $0{,}21875 = 0{,}00111_B$ $\boxed{1}$

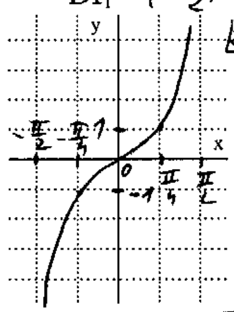
$191{,}21875_D =$
$= \underbrace{1011}_{B}\,\underbrace{1111}_{F},\underbrace{0011}_{3}\,\underbrace{1000}_{8}{}_B$ $\boxed{1}$

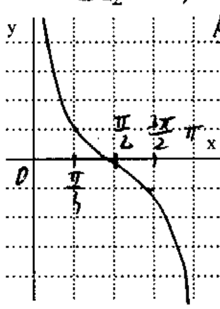
b) v hexadecimální číselné soustavě. $191{,}21875_D = BF{,}38_H$ $\boxed{3}$

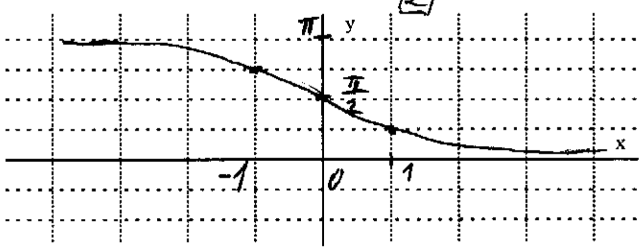
2-T06-1. Do soustavy souřadnic x, y načrtněte grafy daných funkcí, zapište jejich první derivace, určete vhodně jejich definiční obory, aby k nim existovaly inverzní funkce, které zapište.

a) $f_1 : y = \operatorname{tg} x$; b) $f_2 : y = \operatorname{cotg} x$; c) $f_3 : y = \operatorname{arccotg} x$

$Df_1 = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $\boxed{2}$ $Df_2 = (0, \pi)$ $\boxed{2}$ $Df_3 = (-\infty; +\infty)$ $\boxed{2}$







$f_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\boxed{1}$ $f_2'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $\boxed{1}$ $f_3'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ $\boxed{1}$

$f_1^{-1} : x = \operatorname{arctg} y$ $\boxed{1}$ $f_2^{-1} : x = \operatorname{arccotg} y$ $\boxed{1}$ $f_3^{-1} : x = \operatorname{cotg} y$ $\boxed{1}$

3- T09 Je dána funkce $f(x) = x^2 - 7.x + 12$. a) Vypočtěte $f'(x)$, tj. $f'(x) = 2x - 7 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

– Vypočtěte $f''(x)$, tj. $f''(x) = 2$ $\boxed{1}$

– Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ ryze rostoucí a intervaly, na nichž je $f(x)$ ryze klesající .

	$(-\infty; \frac{7}{2})$ $\boxed{1}$	$(\frac{7}{2}; +\infty)$ $\boxed{1}$
$(2x-7)$	−	+
$f'(x)$	−	+
$f(x)$	klesající $\boxed{1}$	rostoucí $\boxed{1}$

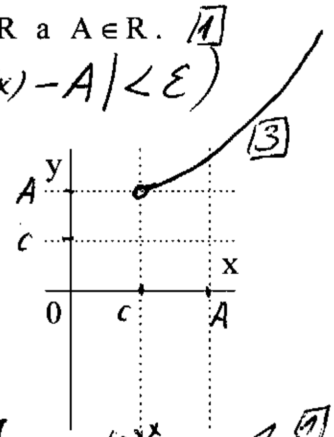
– Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ ryze konvexní, resp. ryze konkávní.

$f''(x) = 2 > 0$ $\boxed{1}$ $\forall x \in (-\infty, +\infty) = Df$

$\boxed{1}$
$\Rightarrow f(x)$ je konvexní na $(-\infty; +\infty)$

4-T07 – Zapište podle definice, co znamená, že $\lim_{x\to c^+} f(x)=A$, kde $c\in R$ a $A\in R$. $\boxed{1}$

Tj. $\lim_{x\to c^+} f(x)=A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in(c;c+\delta))(|f(x)-A|<\varepsilon)$



– Načrtněte graf nějaké funkce, která má $\lim_{x\to c^+} f(x)=A$:

a která je v $(c;+\infty)$ rostoucí
a konvexní

a) Vypočtěte limitu funkce $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^{x+1}-1}{7.3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2^x+3^{x+1}-1}{3^x}}{\frac{7\cdot 3^x}{3^x}}\boxed{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+3-\frac{1}{3^x}}{7}\boxed{1}=\frac{3}{7}\boxed{1}$

Vypočtěte limity funkcí za použití L'Hospitalova pravidla : $\boxed{1}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{3.\cos x-3}{e^x-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{LP}{=}\lim_{x\to0}\frac{-3\cdot\sin x}{e^x-1}\boxed{1}\boxed{1}=\left[\frac{0}{0}\right]\boxed{1}\stackrel{LP}{=}\lim_{x\to0}\frac{-3\cdot\cos x}{e^x}\boxed{1}\boxed{1}=-3\ \boxed{1}$

c) $\lim_{x\to1}\left(x^2\right)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}e^{\frac{\ln x^2}{x-1}}\boxed{1}=e^2\ \boxed{1}$

$\lim_{x\to1}\boxed{1}\frac{\ln x^2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\boxed{1}\stackrel{LP}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x}{x^2}}{1}\boxed{1}=\lim_{x\to1}\frac{2}{x}=2\ \boxed{1}$

5- T08

a) Vyjádřete pomocí vzorečku větu o derivaci k-násobku $(k\in R)$ funkce $u=u(x)$,

tj. $(k.u)'=k\cdot u'$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete pomocí vzorečku větu o derivaci rozdílu funkcí $u=u(x)$ a $v=v(x)$,

tj. $(u-v)'=u'-v'$ $\boxed{1}$

c) Zapište obecně Taylorův polynom $T_n(x)$ pro funkce $f(x)$ v bodě c,

tj. $T_n(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ $\boxed{1}$

Př. d) Je dána funkce $f(x)=5+\ln(3.x-5)$ a bod $c=2$. Vypočítejte 1., 2. a 3. derivaci :

$f'(x)=\frac{3}{3x-5}=3\cdot(3x-5)^{-1}$ $\boxed{1}$, určete $f'(2)=3$

$f''(x)=3\cdot(-1)\cdot(3x-5)^{-2}\cdot3=-9(3x-5)^{-2}$ $\boxed{1}$, určete $f''(2)=-9$

$f'''(x)=(-9)\cdot(-2)\cdot(3x-5)^{-3}\cdot3=54\cdot(3x-5)^{-3}=\frac{54}{(3x-5)^3}$ $\boxed{1}$, určete $f'''(2)=54$

- Zapište Taylorův polynom $T_3(x)$ pro danou funkci $f(x)$ v bodě $c=2$, tj.

$T_3(x)=f(2)+f'(2)\cdot(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3=$ $\boxed{1}$

$=5+3\cdot(x-2)-\frac{9}{2}(x-2)^2+\frac{54}{6}(x-2)^3=$

$=\underbrace{5}_{\boxed{1}}+\underbrace{3(x-2)}_{\boxed{1}}-\underbrace{\frac{9}{2}(x-2)^2}_{\boxed{1}}+\underbrace{9\cdot(x-2)^3}_{\boxed{1}}$

FEI + UM-Zkouškový set z předmětu IMAT1 – EX-M1080114-1-(3)

6	7	8	9	10		Σ 6-10

datum | stud. obor | ročník | osobní číslo - STAG | student - příjmení, jméno

6-T10-6. Napište v plném znění nebo jen zjednodušené schéma I. pravidla o substituci v neurčitém integrálu.

$$\int f(g(x)).g'(x).dx = \left|\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{array}\right| = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C;\ C \in R \quad \boxed{1}$$

– Vypočítejte vhodnou substitucí

$$\int \frac{12+\sin^2 x}{\sin^3 x}.\cos x.dx = \left|\begin{array}{l} t = \sin x \ \boxed{1} \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right| = \int \frac{12+t^2}{t^3}\,dt \ \boxed{1} = \int\left(12.t^{-3} + \frac{1}{t}\right)dt = \boxed{1}$$

$$= 12\cdot\frac{t^{-2}}{(-2)} + \ln|t| + C \ \boxed{1} = -6\frac{1}{t^2} + \ln|t| + C \ \boxed{1} = -\frac{6}{\sin^2 t} + \ln|\sin t| + C \ \boxed{1}$$

– Vypočítejte vhodnou substitucí

$$\int \sqrt[4]{\frac{x}{6}-1}\ .dx = \left|\begin{array}{l} t = \frac{x}{6}-1 \quad \boxed{1} \\ dt = \frac{1}{6}dx \Rightarrow dx = 6\cdot dt \end{array}\right| = \int \sqrt[4]{t}\cdot 6\cdot dt = \int t^{\frac{1}{4}}\cdot 6\, dt \ \boxed{1}$$

$$= \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}\cdot 6 + C \ \boxed{1} = \frac{24}{5}t\cdot\sqrt[4]{t} + C = \frac{24}{5}\left(\frac{x}{6}-1\right)\sqrt[4]{\frac{x}{6}-1} + C \ \boxed{1}$$

– Vypočtěte metodou per partes $\int(-3.x+1).\sin x.dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \sin x & v = -3x+1 \\ u = (-\cos x) \ \boxed{1} & v' = (-3) \ \boxed{1} \end{array}\right| = (-3x+1)(-\cos x) - \int(-3)(-\cos x)dx \ \boxed{1}$

$$= (3x-1)\cos x - 3\int \cos x\,dx = (3x-1)\cdot\cos x - 3\sin x + C \ \boxed{1}$$

7-T11-1. a) Za předpokladu, že f je funkce omezená na intervalu $\langle a\,;b\rangle$, D je dělení intervalu $\langle a\,;b\rangle$, pro každé $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ je $m_i = \inf\limits_{x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle} f(x)$, zapište definici ~~hor~~ dolního integrálního součtu funkce f

na intervalu $\langle a\,;b\rangle$ při dělení D, tj. $L(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ $\boxed{1}$

b) Co je dle definice dolní integrál funkce f na intervalu $\langle a\,;b\rangle$. *Zápis vzorečkem :* $\underline{\int_a^b} f(x).dx = \sup\limits_{D\in\Psi} L(f;D)$ $\boxed{1}$

slovy : je to supremum množiny všech dolních $\boxed{1}$ integrálních součtů přes množinu Ψ všech možných dělení D intervalu $\langle a;b\rangle$

c) Vypočítejte $\int_{-\infty}^{1}(4^x - e^x).dx = \left[\frac{4^x}{\ln 4} - e^x\right]_{-\infty}^{1} \boxed{1} = \frac{4^1}{\ln 4} - e - \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4^x}{\ln 4} - e^x\right) = \frac{4}{\ln 4} - e$ $\boxed{1}$

d) Vypočítejte substituční metodou $\int_0^1 (7.x^2 - 3.x + 1)^{-\frac{1}{2}}.(14.x-3).dx = \left|\begin{array}{l} t = 7x^2 - 3x + 1 \ \boxed{1} \quad x = 1 \Rightarrow t = 5 \\ dt = (14x-3)dx \ \boxed{1} \quad x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right| =$

$$= \int_1^5 t^{-\frac{1}{2}}\,dt \ \boxed{1} = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^5 \boxed{1} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^5 = 2\sqrt{5} - 2 \ \boxed{1}$$

e) Vypočítejte $\int_{-1}^{0}\frac{x^2+x+4}{(x^2+1)(x+3)}.dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x+3}\right)dx = \left[\operatorname{arctg} x + \ln|x+3|\right]_{-1}^{0} \boxed{1} \boxed{1} =$

$= \operatorname{arctg} 0 + \ln|3| - \operatorname{arctg}(-1) - \ln|2| = \ln 3 - \ln 2 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \ln 3 - \ln 2 = \boxed{1} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{3}{2}$

Rozložte nejdříve integrovanou funkci na součet parciálních zlomků :

$$\frac{x^2+x+4}{(x^2+1)(x+3)} = \frac{A\cdot x + B}{x^2+1} + \frac{C}{x+3} \ \boxed{1} \quad \Big/ (x^2+1)(x+3)$$

$$x^2 + x + 4 = Ax^2 + Bx + 3Ax + 3B + Cx^2 + C \ \boxed{1}$$

$x^2:\ A + C = 1 \quad (-1)$

$x:\ 3A + B = 1 \quad \Rightarrow 3A + B = 1$

$x^0:\ 3B + C = 4 \quad \Rightarrow -A + 3B = 3 /3 \Rightarrow$

$3A + B = 1$

$-3A + 9B = 9$

$10B = 10 \Rightarrow B = 1;\ A = 0;\ C = 1$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

8-T12 a) Co znamená podle definice, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **majoritní** vůči posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je majoritní vůči $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow (\forall n \in N)(a_n \le b_n)$ $\boxed{1}$

b) Vyjádřete podle definice, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **neklesající** posloupností. $\Leftrightarrow (\forall n \in N)(a_n \le a_{n+1})$ $\boxed{1}$

c) Vyřešte limitu : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^n - \frac{2\sqrt[n]{n}}{2+\sqrt[n]{2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^n - \frac{2\cdot\sqrt[n]{n}}{2+\sqrt[n]{2}}\right] = e^3 - \frac{2\cdot 1}{2+1} = e^3 - \frac{2}{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

d) Vyřešte limitu : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n^2+1)^2-n^4}{(n+2)^3-n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+1-n^4}{n^3+6n^2+12n+8-n^3} = \lim\frac{2n^2+1}{6n^2+12n+8} = \lim\frac{2+\frac{1}{n^2}}{6+\frac{12}{n}+\frac{8}{n^2}} = \frac{1}{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

9-T13-1 Rozhodněte, zda uvedené řady konvergují nebo divergují. Uveďte vždy použité kritérium. $\boxed{1}$

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$; $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x+2}dx = \left|\begin{matrix} t=x+2 & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ dt=dx & x=1\Rightarrow t=3\end{matrix}\right| = \int\limits_3^{\infty}\frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_3^{\infty} = \lim\limits_{t\to\infty}\ln|t| - \ln 3 = +\infty$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

integrál diverguje k $+\infty \Rightarrow$ Dle integrálního kritéria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje k $+\infty$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{n!}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{5^{n+1}}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+2}\cdot n!}{5^{n+1}(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Řada je s kladnými členy, lze použít podílové kritérium $\Big|$ $\Rightarrow$ Dle podílového kritéria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n+2}$ 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – alternující řada $\boxed{1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0$ $\boxed{1}$

3) $\forall n\in N$ $|a_n| = \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} = |a_{n+1}|$, tedy posl. $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a nerostoucí $\boxed{1}$

Dle Leibnitzova kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje $\boxed{1}$

10-T14-1 a) Zapište všechny předpoklady a tvrzení limitního odmocninového kritéria pro konvergenci, resp. divergenci mocninné řady. *Předpoklady : 1.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *je řada s* nezápornými *členy* $\boxed{1}$

2. Existuje ... $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = A \in R^*$ $\boxed{1}$

Tvrzení : a) Jestliže $A<1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje. $\boxed{1}$

b) Jestliže $A>1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje k $+\infty$ $\boxed{1}$

b) Určete střed, poloměr, interval a obor konvergence mocninné řady (Uveďte kritérium, které použijete)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{8^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{8^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{8^n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}\cdot 8^n}{(x-2)^n\cdot 8^{n+1}}\right| =$ $\boxed{1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x-2}{8}\right| = \frac{|x-2|}{8} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x=2$, tj. $c=2$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Nebo odmocninové kritérium $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{8^n}\right|} = \frac{|x-2|}{8} \overset{!}{=} 0$ atd.

$\frac{|x-2|}{8} < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 8 \Leftrightarrow x \in (-6;10)$ $\boxed{1}$

Střed konvergence : c = 2 $\boxed{1}$

Poloměr konvergence : R = 8 $\boxed{1}$

Interval konvergence : I = $(-6;10)$ $\boxed{1}$

Obor konvergence : M = $(-6;10)$ $\boxed{1}$

Dle podílového kritéria mocninná řada konverguje absolutně pro $x\in(-6;10) = I$

$x=10 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(10-2)^n}{8^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ – řada diverguje, protože $\lim\limits_{n\to\infty}s_n = \lim\limits_{n\to\infty}n = +\infty \Rightarrow 10 \notin M$ $\boxed{1}$

$x=-6 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-8)^n}{8^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1\dots$ $\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n-\text{sudá}}}s_n = \lim\limits_{n\to\infty}0 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n-\text{lichá}}}s_n = \lim(-1) = -1\end{matrix}\right\}$ řada diverguje, posl. část. součtů osciluje $\Rightarrow -6\notin M$ $\boxed{1}$